DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

§1. 重量子の場と重粒子の交互作用の一般論 (Scalar Theory)

前の論文に於て導入した場の量子化には Pauli-Weisskopf の理論が其儘使はれる. 今簡單の為此場は Scalar U 及 $\tilde{U}$ のみで describe されるものとする[+]

重粒子及 $U, \tilde{U}$ の場より成る全体の系の Hamilton 函數は次の式で弁えられる:

$$(1)\qquad H = H_S + H_U + H'$$

$$(2)\qquad H_S = \sum_i \left[(\vec{\alpha}_i \vec{p}_i) + \beta_i \left(\frac{1+\tau_3^{(i)}}{2}\mu_N + \frac{1-\tau_3^{(i)}}{2}\mu_P \right) \right]$$

$$(3)\qquad H_U = \frac{1}{4\pi}\iiint \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial t} + (\mathrm{grad}\,\tilde{U}, \mathrm{grad}\,U) + \kappa^2 \tilde{U} U \right] dv$$

$$(4)\qquad H' = g\sum_i \left[Q_i^* \tilde{U}(\vec{x}_i) + Q_i U(\vec{x}_i) \right] \beta_i$$

$$(5)\qquad \begin{cases} p_i = -i\hbar c\,\mathrm{grad}_i \\ Q_i^* = \dfrac{\tau_1^{(i)} + i\tau_2^{(i)}}{2}, \quad Q_i = \dfrac{\tau_1^{(i)} - i\tau_2^{(i)}}{2} \\ \kappa = \dfrac{\mu_U}{\hbar c} \end{cases}$$

此處で重粒子は Dirac の式に從ふものと假定した. $\vec{\alpha}_i, \beta_i$ 及 $\tau_1^{(i)}, \tau_2^{(i)}, \tau_3^{(i)}$ は夫々 i 番目の重粒子の Dirac Matrix 及 Isotopic Spin で, μ_N, μ_P, μ_U は夫々中性子, 陽子, 重量子の靜止エネルギーである.

$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial t}, \tilde{U}, U$ の間には次の交換関係が存在し, 其他はすべて交換可能である.

+) U, U^+ は Pauli-Weisskopf の理論に於ける ψ, ψ^* に $\sqrt{4\pi}\,\hbar c$ を乘じたものに相当する
以后のすべての Notation は Pauli-Weisskopf と全く同一である. $\hbar$ は Planck の h の $\frac{1}{2\pi}$ である.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

$$(6)\quad \begin{cases} i\left[\hbar\dfrac{\partial \tilde{U}(\vec{x})}{\partial t},\ U(\vec{x}')\right] = 4\pi\hbar^2c^2\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \\ i\left[\hbar\dfrac{\partial U(\vec{x})}{\partial t},\ \tilde{U}(\vec{x}')\right] = 4\pi\hbar^2c^2\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \end{cases}$$

Pauli-Weisskopf に從って場の變數を $\frac{\partial\tilde{U}}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial t}, \tilde{U}, U$ から $a_k^*, a_k, b_k^*\, b_k$ に變換すると

$$(3a)\quad H_U = \sum_k (a_k^* a_k + b_k^* b_k + 1)E_k\,,$$

$$(7)\quad \begin{cases} \tilde{U} = -i\hbar c\sqrt{\dfrac{2\pi}{V}}\displaystyle\sum_k \dfrac{1}{\sqrt{E_k}}(a_k^* - b_k)\,e^{-i(\vec{k}\vec{x})}, \\ U = -i\hbar c\sqrt{\dfrac{2\pi}{V}}\displaystyle\sum_k \dfrac{1}{\sqrt{E_k}}(-a_k + b_k^*)\,e^{i(\vec{k}\vec{x})}, \end{cases}$$

$$(8)\quad E_k = \hbar c\sqrt{k^2+\kappa^2},$$

となり交換関係は

$$(9)\quad [a_k, a_l^*] = \delta_{kl}\,,\qquad [b_k, b_l^*] = \delta_{kl}$$

他はすべて交換可能である. $N_k^+ = a_k^* a_k$, $N_k^- = b_k^* b_k$ は $0, 1, 2, \cdots$ なる固有値をとり夫々 Charge $+1$ をもち運動量++ $\hbar c\vec{k}$ を有す粒子及 Charge -1 をもち運動量 $-\hbar c\vec{k}$ をもつ粒子の數を意味する. 從て E_k は其らの粒子のエネルギーである.

Similarly, the variables describing the heavy particles can be changed by expanding ~~the~~ $\tilde{\Psi}, \Psi$ into a series of u_m, v_n $(m; n = 1, 2, \cdots)$, where u_m is the unquantized wave function ~~with four components~~ for the neutron in the state m and v_n that for the proton in the state n.

++) 此處で運動量はエネルギーの單位で測る爲 c が乘じてある.

§2. Matrix element.

Radiation Theory の場合と同様に, H の中 H′ を small perturbation として 摂動論を用ひて 種々な計算をやるには H′ の Matrix element を計算しておく必要がある.

$\Psi(\vec{x})$ 及 $\Phi(\vec{x})$ で[+++] 重粒子が 陽子状態 及 中性子状態に在る場合の波動函数をあらはすものとし, m, n で initial state 及 final state を区別して置けば 正負重量子の放出及吸收の Matrix element は次の式で与へられる；

$$
(10)\quad
\begin{cases}
H'_{m, N_k^+ \to n, N_k^+ + 1} = -i\sqrt{N_k^+ + 1}\, g\hbar c \sqrt{\dfrac{2\pi}{V E_k}} \displaystyle\int \Phi_n^*(\vec{x})\, \beta\, \Psi_m(\vec{x})\, e^{-i\vec{k}\vec{x}}\, d\vec{x} \\[2ex]
H'_{m, N_k^+ \to n, N_k^+ - 1} = i\sqrt{N_k^+}\, g\hbar c \sqrt{\dfrac{2\pi}{V E_k}} \displaystyle\int \Psi_n^*(\vec{x})\, \beta\, \Phi_m(\vec{x})\, e^{i\vec{k}\vec{x}}\, d\vec{x} \\[2ex]
H'_{m, N_k^- \to n, N_k^- + 1} = -i\sqrt{N_k^- + 1}\, g\hbar c \sqrt{\dfrac{2\pi}{V E_k}} \displaystyle\int \Psi_n^*(\vec{x})\, \beta\, \Phi_m(\vec{x})\, e^{i\vec{k}\vec{x}}\, d\vec{x} \\[2ex]
H'_{m, N_k^- \to n, N_k^- - 1} = i\sqrt{N_k^-}\, g\hbar c \sqrt{\dfrac{2\pi}{V E_k}} \displaystyle\int \Phi_n^*(\vec{x})\, \beta\, \Psi_m(\vec{x})\, e^{-i\vec{k}\vec{x}}\, d\vec{x}
\end{cases}
$$

重粒子に外力の働いて居ない場合は 最后の積分は即ちに積分出来て 運動量の保存則を得る.

+++) $\Psi(\vec{x})$, $\Phi(\vec{x})$ の Argument は簡單の為 $\vec{x}$ と記したが 本当は $\vec{x}, \sigma$ と スピン座標迄も書かねばならない. 以后此 Abkürzung を用ひる.

When a ~~neutron and a proton~~ heavy particle 1 is in a neutron state m with the energy W_m and ~~another~~ 2 in a proton state n', with the energy W_n the second and the ~~related~~ terms of the Hamiltonian ~~takes the form~~ (6) become

$$H_M = W_m + W_n$$

and

$$\overline{H'} = -ikc\sum_k (a_k^* - b_k)\, g\sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} \iiint u$$

§3. 中性子－陽子間の交換力の導来

前の論文では中性子陽子間の交換力をMøllerの方法に從って導いたが以下に於ては純量子論的方法に依っても全く同一の結果になる事を示し，次節に於ては此方法を更に進めて同種重粒子間の力を求める.

此方法で交換力を導くには中性子及陽子が一ヶ宛存在し重量子は一つも無い状態から中性子が陽子に陽子が中性子に変って居り重量子は矢張存在しておらぬ状態への轉移行列を攝動論の第二次近似で調べればよい.

中性子及陽子の最初の状態を$\Phi_m(\vec{x_1})$, $\Psi_{m'}(\vec{x_2})$とし荷電を2から1に移した后の状態を$\Psi_n(\vec{x_1})$, $\Phi_{n'}(\vec{x_2})$とすると斯る轉移のMatrix elementは次の式であらはされる：

$$(11)\quad H^{(2)}_{\substack{m\to n\\ m'\to n'}} = -\sum_k \frac{H(1)_{m,0\to n,N_k^+=1}\cdot H(2)_{m',N_k^+=1\to n',0}}{E_k} - \sum_k \frac{H(2)_{m',0\to n',N_k^-=1}\cdot H(2)_{m,N_k^-=1\to n,0}}{E_k}$$

この式に(10)を代入して二つの項を纏め且つ積分と$\sum_k$の順序を變へると

$$(11a)\quad H^{(2)}_{\substack{m\to n\\ m'\to n'}} = -4\pi g^2\hbar^2c^2 \iint \left\{\frac{1}{V}\sum_k \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x_2}-\vec{x_1})}}{E_k^2}\right\} \Psi_n^*(\vec{x_1})\beta_1\Phi_m(\vec{x_1})\Phi_{n'}^*(\vec{x_2})\beta_2\Psi_{m'}(\vec{x_2})\,d\vec{x_1}\,d\vec{x_2}$$

{ }を先に計算して仕舞ふと次の様になる.++++

++++) $V\to\infty$の際$\frac{1}{V}\sum_k \to \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}$となることを考慮する.

$$\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}\frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{E_{k}^{2}} = \frac{1}{(2\pi)^3(\hbar c)^2}\int\frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{k^2+\kappa^2}d\vec{k}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2(\hbar c)^2 r_{12}}\int_0^\infty\frac{k\sin kr_{12}\,dk}{k^2+\kappa^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi(\hbar c)^2}\,\frac{e^{-\kappa r_{12}}}{r_{12}}$$

此處に　$\vec{x}=\vec{x}_2-\vec{x}_1$,　$r_{12}=|\vec{x}|=|\vec{x}_2-\vec{x}_1|$

之を (11a) に入れると

$$(11b)\qquad H^{(2)}_{\substack{m\to n\\ m'\to n'}} = -g^2\iint\frac{e^{-\kappa r_{12}}}{r_{12}}\Psi_n^*(\vec{x}_1)\beta_1\Phi_m(\vec{x}_1)\Phi_{n'}^*(\vec{x}_2)\beta_2\Psi_{m'}(\vec{x}_2)\,d\vec{x}_1 d\vec{x}_2$$

この式より中性子陽子間に次の様な Heisenberg 型の交換力の存在を知り得た：

$$(12)\qquad V_{PN} = J(r_{12})\,P_{12}^{H}\,\beta_1\beta_2$$

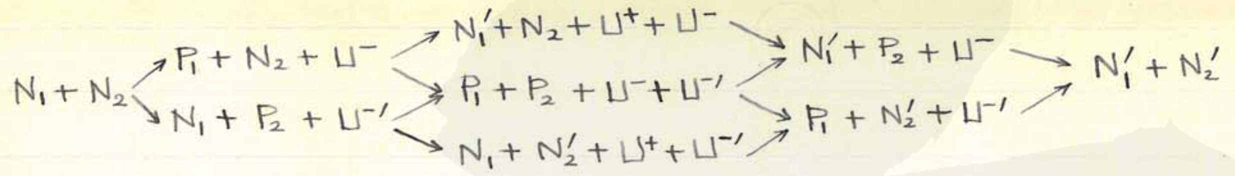
こゝに

$$(12a)\qquad J(r_{12}) = g^2\frac{e^{-\kappa r_{12}}}{r_{12}}$$

且つ P_{12}^H は Heisenberg の置換オペレーター, $\beta_1\beta_2$ は non-relativistic の際は 1と とれる

§4. 同種重粒子間の力

次に前節の方法の第四近似として得られる同種重粒子間の力を計算する．それには例えば最初二つの中性子が存在してゐたとすると其の中の一方が放出した正負の重量子を他方が再び吸收することにより各々其の運動狀態を変化すると云ふ様な過程に対するMatrix elementを~~計算~~調べればよい．斯様に同種重粒子間の交互作用にcontributeする過程は全部で六つあって其等をschematischにかくと下の様になる：



二つの中性子の最初の狀態を$\Psi_m(\vec{x}_1)$, $\Psi_{m'}(\vec{x}_2)$，最后の狀態を$\Psi_n(\vec{x}_1)$, $\Psi_{n'}(\vec{x}_2)$としておく．上の六過程による両者間の轉移行列は次の式で与えられる：

$$(13)\qquad H^{(4)}_{\substack{m\to n\\ m'\to n'}} = -\sum_{i,i'}\sum_{k,k'} \frac{H(1)_{\substack{m\to i\\ N_l^-=0\to 1}}\cdot H(1)_{\substack{i\to n\\ N_k^+=0\to 1}}\cdot H(2)_{\substack{m'\to i'\\ N_k^+=1\to 0}}\cdot H(2)_{\substack{i'\to n'\\ N_l^-=1\to 0}}}{E_l^2(E_k+E_l)}$$

$$-\ (\text{同様な項五ケ})$$

これに(10)を代入し且つ

$$\sum_i \psi_i^*(\vec{x})\,\psi_i(\vec{x}') = \delta(x-x')$$

の関係を用ひてi, i'の和を行ってしまふと(13)は下の様にかける；

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

$$(13a)\quad H^{(4)}_{\substack{m\to n\\ m'\to n}} = \iint K(\vec{x})\,\Phi_n^*(\vec{x}_1)\,\Phi_m(\vec{x}_1)\,\Phi_{n'}^*(\vec{x}_2)\,\Phi_{m'}(\vec{x}_2)\,d\vec{x}_1\,d\vec{x}_2$$

ここに

$$\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$$

$$(14)\quad K(\vec{x}) = -\frac{(2\pi)^2(g\hbar c)^4}{V}\left[4\sum_{k,l}\frac{e^{i(\vec{l}-\vec{k})\vec{x}}}{E_k E_l^3(E_k+E_l)} + 2\sum_{k,l}\frac{e^{i(\vec{l}-\vec{k})\vec{x}}}{E_k^2 E_l^2(E_k+E_l)}\right]$$

k,l の和は積分に直すと簡単に計算されて次の様になる.

$$\frac{4}{V^2}\sum_{k,l}\frac{e^{i(\vec{l}-\vec{k})\vec{x}}}{E_k E_l^3(E_k+E_l)} + \frac{2}{V^2}\sum_{k,l}\frac{e^{i(\vec{l}-\vec{k})\vec{x}}}{E_k^2 E_l^2(E_k+E_l)}$$

$$= \frac{1}{2\pi^4(\hbar c)^5 r_{12}^2}\left[2\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{k l \sin k r_{12}\,\sin l r_{12}\,dk\,dl}{\sqrt{k^2+\kappa^2}\,\sqrt{(l^2+\kappa^2)^3}\,(\sqrt{k^2+\kappa^2}+\sqrt{l^2+\kappa^2})} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{k l \sin k r_{12}\,\sin l r_{12}\,dk\,dl}{(k^2+\kappa^2)(l^2+\kappa^2)(\sqrt{k^2+\kappa^2}+\sqrt{l^2+\kappa^2})}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi^4(\hbar c)^5 r_{12}^2}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{k l \sin k r_{12}\,\sin l r_{12}\,dk\,dl}{\sqrt{(l^2+\kappa^2)^3}\,(k^2-l^2)}$$

$$= \frac{1}{2\pi^3(\hbar c)^5 r_{12}^2}\int_0^\infty \frac{l \sin l r_{12}\,\cos l r_{12}\,dl}{\sqrt{(l^2+\kappa^2)^3}}$$

$4\pi^2 (g\hbar c)^4$

$$= \frac{i H_0^{(1)}(2i\kappa r_{12})}{4\pi^2(\hbar c)^5 r_{12}}$$

$\frac{2g^4}{\pi \hbar c r^2}$

従て (14) は

$$(14a)\quad K(\vec{x}) = -\frac{g^4}{\hbar c}\,\frac{i H_0^{(1)}(2i\kappa r_{12})}{r_{12}}, \qquad (r_{12} = |\vec{x}|)$$

此處に $H_0^{(1)}(z)$ は Hankel 函数である.

(14a) と (12a) の比を造る:

$$(15)\quad \frac{|K(r_{12})|}{|J(r_{12})|} = \frac{g^2}{\hbar c}\, e^{\kappa r_{12}}\, i H_0^{(1)}(2i\kappa r_{12})$$

$\frac{g^2}{\hbar c}$ を除いた部分を表にすると下の様になる†:

κr_{12}	0.05	0.1	0.25	0.5	1.0	1.5
$e^{\kappa r_{12}}\, iH_0^{(1)}(2i\kappa r_{12})$	1.62	1.23	0.76	0.44	0.20	0.1

$K(r_{12})$ の r_{12} の大きい所では $iH_0^{(1)}(2i\kappa r_{12})$ の漸近展開が出来るから

$$(14b)\quad K(r_{12}) \cong \frac{g^4}{\hbar c}\,\frac{e^{-2\kappa r_{12}}}{\sqrt{\pi\kappa r_{12}^3}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\kappa r_{12}}\right)\cdots\right)$$

$$(\kappa r_{12} \gg 1)$$

の表式を得る.

†) Janke-Emde, Funktionentafeln, P.286