DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 1

U粒子の Spin.

U粒子が Bose particle であるために、その Spin は 0 か $\frac{\hbar}{2}$ の偶数倍である事が考へられる。湯川氏の最初の論文に於ては簡単のために Scalar の, Spin のない field が考へられた。その後 heavy particle の附加 magnetic moment を説明するために、最初は correspondence like な考へから、U粒子に対して Spin 1, magnetic moment $\frac{e\hbar}{2m_u c}$ が与へられた[1]。その後 heavy particle 間の interaction を正しく与へるために U particle が Spin 1 を持つ事が要求された。即ち初めに考へられた様な Scalar の, Spin のない U場は heavy particle 間の interaction 詳細を与へない[2]。それ故に、four vector や six vector をもった Maxwell 型の equation が考へられた。又一方から Spin 1 を持つ様な transformation の性質を持つ field といふ要求から Dirac の新しい一般的な linearised equation[3] の Spin 1 の場合が選ばれ、これを tensor form に直す事によつて やはり Maxwell 型

(1). Taketani, Kagaku 7 532, 1937
(2). Yukawa and Sakata; Proc. Phys-Math. Soc. Japan 19, 1084, 1937.
(3) Dirac, Proc. Roy. Soc. A, 155. 447. 1936.

の，但し静止質量を持った式に到達した．そしてこれが Proca が先に提出してゐた equation[4] の型である事が何となく我々にわかった。[5]

Proca は ~~[illegible]~~ 彼の formalism から従ふ spin の expression をその論文に與へてゐる．先づ彼は field のエネルギー運動量 tensor $T_{\nu\rho}$ を electromagnetic field $H_{\rho s}$ と charge current vector of U-field j_s の積から導く． ~~[illegible]~~ identities を作って

$$H_{\rho s}\cdot j_s = \partial^\nu T_{\nu\rho}. \qquad (1)$$

次に此の $T_{\nu s}$ から Angular momentum を導く．

$$P_{\nu\rho} = \frac{1}{ic}\int (x_\nu \cdot T_{4\rho} - x_\rho T_{4\nu})\, dV \quad (\nu,\rho = 1,2,3) \qquad (2)$$

これから partial integration によって space coordinate を explicit に含まない expression を導き出した Proca は spin とした．Z 軸の周りの angular momentum は ~~[illegible]~~ 上に従ひ，と (~~electro magnetic~~ interaction のない場合.)

$$P_{12} = \int \Big[(x U_x^+ - y U_y^+)\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right) + U_z^+ \left\{ x\left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right) + y\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right)\right\} - \frac{1}{4\pi}\tilde{U}_0 (x U_y - y U_x) + \mathrm{conj} \Big] dV \qquad (3)$$

(4) Proca, Jour. d. Phys. 7, 347, 1936.

(5) Kemmer も此の道を通った様である．Proc. Roy. Soc.

之から

$$\mathfrak{M}_z = U_x^+ U_y - U_y^+ U_x + \tilde{U}_x^+ \tilde{U}_y - \tilde{U}_y^+ \tilde{U}_x \qquad (4)$$

をProcaのspinとして得る。此の場合 (3) の最後の項から

$$\tilde{U}_0 = 4\pi c \operatorname{div} U^+ \qquad (\text{III } 10)$$

によって同じ ~~term~~ もの を得るから 実際は (4) ~~は~~ の2倍 を取ら ~~とらな~~ ねばならない。

Procaは (3) をdecomposeしてAngular momentumとspinとを得たが、~~遂~~ 之が正しいためには (3) がconstant of motionでなければならぬ。ProcaのTrgは普通の方法によって出して来た次式と全く同一である。

$$G_x = -\int \left[U_0^+ \frac{\partial U_0}{\partial x} + U^+ \frac{\partial U}{\partial x} + \text{comp conj} \right] dV \qquad (5)$$

之から

$$P_z = -\int \left[U^+ x \frac{\partial U}{\partial y} - U^+ y \frac{\partial U}{\partial x} + \text{conj} \right] dV \qquad (6)$$

Procaは之をidentitiesによって変型したのである。時間に対するP_zの変化は

$$i\hbar \frac{\partial P_z}{\partial t} = P_z \bar{H}_u - \bar{H}_u U_x \qquad (\text{III } 12)$$

之は (III 13) を使ふ事によって

$$\frac{\partial P_z}{\partial t} = -\int\Big[-\frac{1}{4\pi\kappa^2}\Big(\frac{\partial \tilde{U}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{U}_x}{\partial y}\Big)\,\mathrm{div}\,U$$

$$+ 4\pi c\,\Big(\frac{\partial U_y^+}{\partial x} - \frac{\partial U_x^+}{\partial y}\Big)\mathrm{div}\,\tilde{U}^+ + \text{comp conj}\Big]dV \quad (7)$$

Spin の expression を今空間廻轉に対する field quantities の transformation の性質から導いて見やう。(6) infinitesimal な空間廻轉は次で表はされる。

$$\begin{cases} x_i \longrightarrow x_i + \varepsilon\, s_{ik} x_k \\ t \longrightarrow t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} s_{ik} = -s_{ki} \\ (i, k = 1,2,3) \end{array}$$

今仮に z 軸の周りの廻轉を行へば

$$\begin{cases} x \to x - \varepsilon y \\ y \to y + \varepsilon x \\ z \to z \end{cases} \qquad \varepsilon\sigma_z = \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

four vector U の transformation の性質は x_i に同じなる故に (8) の空間廻轉に対しては

$$U_\alpha \to U_\alpha + \varepsilon\, s_{\alpha\beta} U_\beta - \varepsilon \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_i} s_{ik} x_k \qquad (9)$$

$$\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3.$$

(6). Heisenberg-Pauli II に従ふ.

即ち

$$\left.\begin{aligned}
\sqcup_x &\to \sqcup_x - \varepsilon \sqcup_y + \varepsilon \frac{\partial \sqcup_x}{\partial x} y - \varepsilon \frac{\partial \sqcup_x}{\partial y} x \\
\sqcup_y &\to \sqcup_y + \varepsilon \sqcup_x + \varepsilon \frac{\partial \sqcup_y}{\partial z} y - \varepsilon \frac{\partial \sqcup_y}{\partial y} x
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

これから普通の様に Orbital angular momentum の operator は各軸の廻りの回轉として

$$\left.\begin{aligned}
L_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad L_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
L_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Spin angular momentum の operator として (Ⅲ 34) と同様に

$$S_x = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \hbar\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

を得る之等は electron の場合と同様に次の交換関係を充たす．

$$\left.\begin{aligned}
[S_y, S_z] &= i\hbar S_x \\
[S_z, S_x] &= i\hbar S_y \\
[S_x, S_y] &= i\hbar S_z
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

但 $[A, B] = AB - BA$

また

$$S = \hbar\sigma$$

とすれば σ は

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_y = i\sigma_x \\
&\sigma_z\sigma_x - \sigma_x\sigma_z = i\sigma_y \\
&\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = i\sigma_z, \\
&\sigma_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

即ち 固有値は 1, 0, −1 である. 各軸についてそれぞれ diagonal にすれば ~~それぞれ~~

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$\cancel{i(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x)}$. これらの点 electron spin と違って

$$\sigma_x\sigma_y \neq -\sigma_y\sigma_x.$$

(10) は Heisenberg-Pauli II によって

$$\left.\begin{aligned}
&U_\alpha \to U_\alpha + \varepsilon\frac{2\pi}{hc}\left[\bar{\Lambda}, U_\alpha\right] \\
&\bar{\Lambda} = \int \Lambda\, dv \\
&\Lambda = \left(s_{\alpha\beta}U_\beta - \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_i} s_{ik}x_k\right)P_{\alpha 4} \\
&\quad = -U_x^+ U_y + U_y^+ U_x + U^+ y\frac{\partial U}{\partial x} - U^+ x\frac{\partial U}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 7

それで結局 spin の expression として次を得る。

$$S_z = \int \left[-\sqcup_x^+ \sqcup_y + \sqcup_y^+ \sqcup_x - \tilde{\sqcup}_x^+ \tilde{\sqcup}_y + \tilde{\sqcup}_y^+ \tilde{\sqcup}_x \right] dV \qquad (18)$$

$\frac{\partial S_z}{\partial t}$ を作れば (7) と符号反対で同じものを得る。故に

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(P_z + S_z \right) = 0$$

を得て P_z に S_z を加へる事によって constant of motion を得る。

$$[A, B] = AB - BA.$$

$$\cancel{[A, B] = \frac{i}{\hbar}(AB - BA)}$$

$$\sqcup_x(\vec{r}, t)\sqcup_x^+(\vec{r}', t) - \sqcup_x^+(\vec{r}', t)\sqcup_x(\vec{r}, t) = i\hbar\delta(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$[\sqcup_x(\vec{r}, t)\sqcup_x^+(\vec{r}', t)] = i\hbar\delta(\vec{r}\,\vec{r}')$$

$$[q_l, p_k] = i\hbar\delta_{lk} \qquad [q_l^*, p_k^*] = i\hbar\delta_{lk}$$

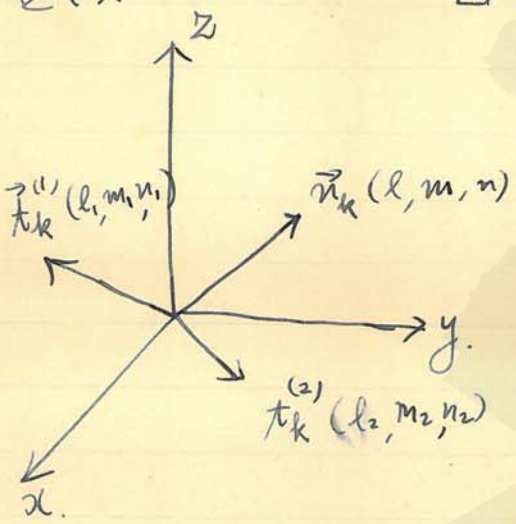
$$[q_l^{(i)}, p_k^{(i)}] = i\hbar\delta_{lk} \qquad [q_l^{(i)*}, p_k^{(i)*}] = i\hbar\delta_{lk}$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 8

Spin の Quantisation.

(18) 式を Pauli Weisskopf の方法に従って quantise して見やう。
⊔ 場を次の様に Fourie transformation をして、



$$
\left.
\begin{aligned}
\sqcup &= \sum_k \left(q_k \vec{n}_k + q_k^{(1)} t_k^{(1)} + q_k^{(2)} t_k^{(2)} \right) e^{i\vec{k}\vec{x}} \\
\tilde{\sqcup} &= \sum_k \left(q_k^* \vec{n}_k + q_k^{*(1)} t_k^{(1)} + q_k^{*(2)} t_k^{(2)} \right) e^{-i\vec{k}\vec{x}} \\
\sqcup^+ &= \sum_k \left(p_k \vec{n}_k + p_k^{(1)} t_k^{(1)} + p_k^{(2)} t_k^{(2)} \right) e^{-i\vec{k}\vec{x}} \\
\tilde{\sqcup}^+ &= \sum_k \left(p_k^* \vec{n}_k + p_k^{*(1)} t_k^{(1)} + p_k^{*(2)} t_k^{(2)} \right) e^{i\vec{k}\vec{x}}
\end{aligned}
\right\} \quad (19)
$$

$\vec{n}_k$, $\vec{t}_k^{(1)}$, $\vec{t}_k^{(2)}$ はそれぞれ longitudinal, 及び二つの transversal の方向の單位 vector で、~~[illegible]~~ 各軸への成分を $\vec{n}_k(l, m, n)$, $\vec{t}_k^{(1)}(l_1, m_1, n_1)$, $t_k^{(2)}(l_2, m_2, n_2)$ とすると、(18) 式は次の様になる

$$
\left.
\begin{aligned}
S_z = -\sum_k \Big[& A\left(p_k q_k^{(1)} - p_k^{(1)} q_k\right) + B\left(p_k^{(2)} q_k - p_k q_k^{(2)}\right) + C\left(p_k^{(1)} q_k^{(2)} - p_k^{(2)} q_k^{(1)}\right) \\
& + A\left(p_k^* q_k^{*(1)} - p_k^{*(1)} q_k^*\right) + B\left(p_k^{*(2)} q_k^* - p_k^* q_k^{*(2)}\right) + C\left(p_k^{*(1)} q_k^{*(2)} - p_k^{*(2)} q_k^{*(1)}\right) \Big] \\
\text{但}\quad & A = l m_1 - l_1 m, \quad B = l_2 m - l m_2, \quad C = l_1 m_2 - l_2 m_1
\end{aligned}
\right\} \quad (20)
$$

$$\left.\begin{array}{ll}\Psi = (p_k, p_k^{(1)}, p_k^{(2)}), & \Psi^* = (p_k^*, p_k^{*(1)}, p_k^{*(2)}) \\ \Phi = (q_k, q_k^{(1)}, q_k^{(2)}), & \Phi^* = (q_k^*, q_k^{*(1)}, q_k^{*(2)})\end{array}\right\} \quad (21)$$

及

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

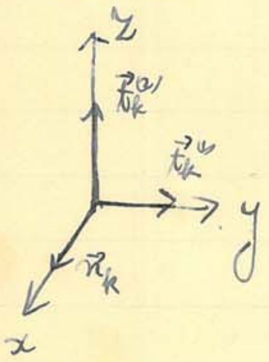
トオケバ

$$S_2 = -\sum_k \{ i\Psi(A\sigma_1 + B\sigma_2 + C\sigma_3)\Phi + i\Psi^*(A\sigma_1 + B\sigma_2 + C\sigma_3)\Phi^* \}$$

(22) に右を~~掛~~付けたものは、$\underbrace{\sigma_1 \text{ は } \vec{t}_k^{(2)} \text{ 方向の、} \sigma_2 \text{ は } \vec{t}_k^{(1)} \text{ 方向の、} \sigma_3 \text{ は } \vec{n}_k}^{(12)\text{ の } x, y, z \text{ 方向の代りに}}$ 方向の spin operator を表はす.

(i) $\vec{n}_k$ が x 軸に、$t_k^{(1)}$ が y 軸に、$t_k^{(2)}$ が z 軸に向いてゐる場合

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0.$$



σ_1 を diagonal に直す.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z = -i\sum_k \left(p_k q_k - p_k^{(1)} q_k^{(1)} + p_k^* q_k^* - p_k^{*(1)} q_k^{*(1)} \right)$$

Pauli-Weisskopf に従って次の transformation を行ふ，

$$\left.\begin{array}{ll}
p_k = \sqrt{\dfrac{\hbar}{8\pi c}}\dfrac{1}{\sqrt{k_0}}\left(a_k^* + b_k\right) & q_k = -i\sqrt{2\pi\hbar c}\sqrt{k_0}\left(-a_k + b_k^*\right) \\
p_k^* = \sqrt{\dfrac{\hbar}{8\pi c}}\dfrac{1}{\sqrt{k_0}}\left(a_k + b_k^*\right) & q_k^* = -i\sqrt{2\pi\hbar c}\sqrt{k_0}\left(a_k^* - b_k\right) \\
p_k^{(i)} = \sqrt{\dfrac{\hbar}{8\pi\kappa^2 c}}\sqrt{k_0}\left(a_k^{(i)*} + b_k^{(i)}\right) & q_k^{(i)} = -i\sqrt{2\pi\hbar c\kappa^2}\dfrac{1}{\sqrt{k_0}}\left(-a_k^{(i)} + b_k^{*(i)}\right) \\
p_k^{*(i)} = \sqrt{\dfrac{\hbar}{8\pi\kappa^2 c}}\sqrt{k_0}\left(a_k^{(i)} + b_k^{*(i)}\right) & q_k^{*(i)} = -i\sqrt{2\pi\hbar c\kappa^2}\dfrac{1}{\sqrt{k_0}}\left(a_k^{*(i)} - b_k^{(i)}\right) \\
 & \\
a_k = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{8\pi c}{\hbar}}\sqrt{k_0}\,p_k^* - \dfrac{i}{\sqrt{2\pi\hbar c}\sqrt{k_0}}\,q_k\right) & \\
b_k = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{8\pi c}{\hbar}}\sqrt{k_0}\,p_k - \dfrac{i}{\sqrt{2\pi\hbar c}\sqrt{k_0}}\,q_k^*\right) & \\
a_k^{(i)} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{8\pi\kappa^2 c}{\hbar}}\dfrac{1}{\sqrt{k_0}}\,p_k^{*(i)} - \dfrac{i\sqrt{k_0}}{\sqrt{2\pi\hbar c\kappa^2}}\,q_k^{(i)}\right) & i = 1, 2. \\
b_k^{(i)} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{8\pi\kappa^2 c}{\hbar}}\dfrac{1}{\sqrt{k_0}}\,p_k^{(i)} - \dfrac{i\sqrt{k_0}}{\sqrt{2\pi\hbar c\kappa^2}}\,q_k^{*(i)}\right) & \\
 & \\
[a_k, a_l^*] = \delta_{kl} & [b_k, b_l^*] = \delta_{kl}. \\
[a_k^{(i)}, a_l^{(i)*}] = \delta_{kl} & [b_k^{(i)}, b_l^{(i)*}] = \delta_{kl}.
\end{array}\right\} (23)$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 11

結局

$$S_z = \sum_k \frac{\hbar}{2} \Big(a_k^* a_k - a_k^{*(1)} a_k^{(1)} - b_k b_k^* + b_k^{(1)} b_k^{*(1)}$$
$$- a_k^* b_k^* + a_k^{*(1)} b_k^{*(1)} + b_k a_k - b_k^{(1)} a_k^{(1)}$$
$$- a_k a_k^* + b_k^{(1)} a_k^{*(1)} + b_k^* b_k - b_k^{*(1)} b_k^{(1)}$$
$$+ a_k b_k - a_k^{(1)} b_k^{(1)} - b_k^* a_k^* + b_k^{*(1)} a_k^{*(1)} \Big)$$

Bose particle の交換関係 (23) によって 個々の particle の spin は消えてしまひ. pair の term だけが残る.

$$S_z = \sum_k \hbar \left(- a_k^* b_k^* + a_k^{*(1)} b_k^{*(1)} + b_k a_k - b_k^{(1)} a_k^{(1)} \right) \qquad (24a)$$

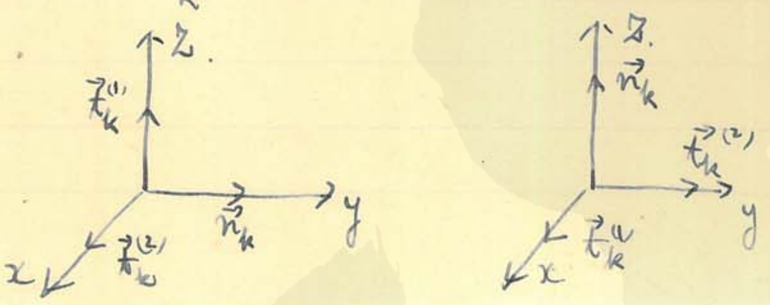
(ii) 同様にして $\vec{n}_k \sim y$軸, $\vec{t}_k^{(1)} \sim z$軸, $\vec{t}_k^{(2)} \sim x$軸 の場合を diagonal にすれば, $A=0,\ B=1,\ C=0$.

$$S_z = \sum_k \hbar \left(a_k^* b_k^* - a_k^{*(1)} b_k^{*(1)} - b_k a_k + b_k^{(1)} a_k^{(1)} \right) \qquad (24b)$$

(iii), $\vec{n}_k \sim z$軸, $\vec{t}_k^{(1)} \sim x$軸, $\vec{t}_k^{(2)} \sim y$軸 の場合には,

$A=0,\ B=0,\ C=1.$

$$S_z = \sum_k \hbar \left(- a_k^{*(1)} b_k^{*(1)} + a_k^{*(2)} b_k^{*(2)} + b_k^{(1)} a_k^{(1)} - b_k^{(2)} a_k^{(2)} \right) \qquad (24c)$$



それで結局 L! 粒子 の Spin の expression を量子化すれば Particle の spin は消えてしまい(7) pair production と Annihilation のみが 丸 と云ふ angular momentum をもつ事になる。之は Zitter term に相当するものである。Spin が消えるのは ~~Vertau~~ 交換関係の性質に関ってゐる。それ故次の結論をする事が出来やう。即ち Bose particle に於ては field は ~~spin を持つ~~ 空間~~廻~~回転に対する transformation の性質として Spin を持つが、quantise した Bose particle は spin を持たない。此の点が Fermi particle と Bose particle の本質的な区別であり、Bose particle が Field として扱はれる事と関係を持ってゐる。
Field を quantise した場合に Field の持つ性質と quantised particle の性質との一致、不一致と云ふ事が Fermi particle と Bose particle の characteristic な区別になるのではないであらうか、そして之が後者が Field として扱はれる根拠になるのではないか?

Interaction の term を見るとき普通は Bose particle は時空座標での derivative を持ちうるが Fermi particle は時空座標での derivative をもたない。但 Konopinsky Uhlenbeck の時には 時空座標での derivative

~~曲~~は Proca の expression を quantise して同様な結果を得てゐる

(7) Durandin and Erschow, Phys. Zeits d. Sowj 12, 406, 1937

を含んでゐるか。此の事が同時にFermi式のquantisationの困難を起して来る。即ちneutrinoは普通のFermi particleと少しく性質が異る、そしてFieldの性質をどちらかと云へば持ってゐる様に考へられる。

Spinが消える事は、~~[illegible]~~以上の様でないならば、plane waveで各polarisationの方向にFourier transformationを行った~~[illegible]~~ quantisationに於ては、spinの性質が消えてしまう様にも考へられる。だからFieldをspinの3つのstatesに展開してこれをquantiseしなければいけないのではないかと考へられる。

即ちFieldのspinはquantised ~~angular momentum~~ のorbital angular momentumと考へられる、これがHeitler & Othersの行った方法のjustificationである。

U粒子の磁気能率

heavy particle の附加磁気能率は最初、U粒子が spin 1、磁気能率 $\frac{e\hbar}{2M_U c}$ を持つものとして、純粋に Wick[8] 流の考へから ~~計算され~~ estimate され、order がよく一致する事が示された。[1] IV に於て ~~Heavy U粒子~~ electromagnetic field との interaction を入れた U場の式の non-relativistic approximation のものから U quanta が spin 1, 0, −1 ~~を持ち~~, magnetic moment $\frac{e\hbar}{2m_U c}$ を持つ事がわかった。Wick の方法に於て intermediate state の U quanta は relativistic な energy であるから、relativistic な場合の magnetic moment をしらべねばならない。

勿論此の Wick 流の行き方は、先の章で明かになった様に quantise して出て来た particle が spin をもたない様に改変されなければならなくなった。そして寧ろ Fröhlich, Heitler, and Kemmer[9] の方法の様に Heavy Particle との interaction の性質から orbital angular momentum を持って U quanta が出て来るのが、Heavy particle の spin と correlation をもつ事によって additional magnetic moment を持つと考へた方がよい様に思はれる。

(8) Wick, Rend. Lincei 21, 170, 1935.
(9)

$(\vec{p} - \frac{ie}{c}\vec{A})^2 + \cdots$

$+ \bigcirc \vec{H}$

$H_z\, y\left(\tilde{U}\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}\right)$

U quanta の charge current は III により, 又 Proca によって次の様に與へられる. field のない場合に,

$$j_0 = -\frac{ie}{\hbar}\left(U^+U - \tilde{U}^+\tilde{U}\right)$$

$$j_x = -\frac{ie}{4\pi\kappa^2\hbar c}\left\{\tilde{U}\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} - (\tilde{U}\,\mathrm{grad})U_x + (U\,\mathrm{grad})\tilde{U}_x\right\} - \frac{ie}{\hbar}\left(\tilde{U}_0\tilde{U}_x^+ - U_0U_x^+\right) \qquad (25)$$

今 ~~次で與へられる~~ magnetic field ~~の存在する場合の energy~~ . z方向に ~~H_z の~~ 一定の大いさ H_z をもつ

$$A_x \overset{\ominus}{=} \frac{1}{2}yH_z,\quad A_y = \overset{\oplus}{-}\frac{1}{2}xH_z,\quad A_z = 0. \qquad (26)$$

が存在する場合. これによる U-quanta の energy は

$$\int \underline{A\, j}\, dV = \int\left[\frac{1}{2}\, yH_z j_x - \frac{1}{2}xH_z j_y\right]dV. \qquad (27)$$

で與へられる. partial integration により, 之から H_z に比例する次の項を得る.

$$m_z H_z = \frac{ie}{4\pi\hbar c\kappa^2}\overset{\mathrm{curl}\,A}{H_z}\int\left[\tilde{U}_xU_y - \tilde{U}_yU_x\right]dV \qquad (28)$$

此の m_z は Proca が先に 他の field の magnetic ~~U particle の magnetic~~ moment として與へたものである.

此の expression を quantise して見よう。Spin の時と同様に直角坐標を取り (19) の transformation を行へば

$$m_z = \frac{ie}{4\pi\hbar c\kappa^2}\int\left[\tilde{U}_x U_y - \tilde{U}_y U_x\right] dV$$

$$= \frac{ie}{4\pi\kappa^2\hbar c}\sum_k \Big\{ A\left(q_k^* q_k^{(1)} - q_k^{*(1)} q_k\right) + B\left(q_k^{*(2)} q_k - q_k^* q_k^{(2)}\right) + C\left(q_k^{*(1)} q_k^{(2)} - q_k^{*(2)} q_k^{(1)}\right)\Big\} \quad (29)$$

A, B, C は (20) にて與へ~~[illegible]~~ へられてあるもの。(23) の transformation を行ふと

$$m_z = \frac{ie\cdot 2\pi\hbar c\kappa}{4\pi\kappa^2\hbar c}\sum_k \Big\{ A\big(a_k^* a_k^{(1)} - a_k^{*(1)} a_k + b_k b_k^{*(1)} - b_k^{(1)} b_k^* - a_k^* b_k^{*(1)} - b_k a_k^{(1)} + a_k^{*(1)} b_k^* + b_k^{(1)} a_k\big)$$

$$+ B\big(a_k^{*(2)} a_k - a_k^* a_k^{(2)} + b_k^{(2)} b_k^* - b_k b_k^{*(2)} - a_k^{(2)*} b_k^* - b_k^{(2)} a_k + a_k^* b_k^{*(2)} + b_k a_k^{(2)}\big) \quad (29a)$$

$$+ C\frac{\kappa}{k_0}\big(a_k^{*(1)} a_k^{(2)} - a_k^{*(2)} a_k^{(1)} + b_k^{(1)} b_k^{*(2)} - b_k^{(2)} b_k^{(1)*} - a_k^{*(1)} b_k^{*(2)} - b_k^{(1)} a_k^{(2)} + a_k^{*(2)} b_k^{*(1)} + b_k^{(2)} a_k^{(1)}\big)\Big\}.$$

$$\vec{n}_k \sim x \qquad \vec{t}_k^{(1)} \sim y \qquad \vec{t}_k^{(2)} \sim z$$

$$m_y = \frac{e\hbar}{2m_0 c}\left(-a_k^{*(2)} a_k^{(2)} + a_k^{*(1)} a_k^{(1)} - \cdots\right)$$

$$m_x = \frac{e\hbar}{2m_0 c}\frac{\kappa}{k_0}\left(-a_k^{*(y)} a_k^{(y)} + a_k^{*(z)} a_k^{(z)} - \cdots\right)$$

(22) の σ_1, σ_2, σ_3 を使ひ

$$\psi = (a_k, a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, -b_k^*, -b_k^{(1)*}, -b_k^{*(2)})$$

$$\psi^* = (a_k^*, a_k^{*(1)}, a_k^{*(2)}, -b_k, -b_k^{(1)}, -b_k^{(2)})$$

とすれば次の様に表はす事が出来る

$$m_z = -\frac{e\hbar}{2m_u c}\sum_k \psi^*\Big[A\Big\{\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \sigma_1\\ \sigma_1 & 0\end{pmatrix}\Big\}$$
$$+B\Big\{\begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \sigma_2\\ \sigma_2 & 0\end{pmatrix}\Big\}+C\frac{\kappa}{k_0}\Big\{\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \sigma_3\\ \sigma_3 & 0\end{pmatrix}\Big\}\Big]\psi. \quad (30)$$

Spin の場合と同様に三つの場合につき diagonal にする.

(i). $\vec{n}_k$ は x 軸に, $\vec{t}_k^{(1)}$ は y 軸に, $\vec{t}_k^{(2)}$ は z 軸に, それぞれ向いてゐる場合.

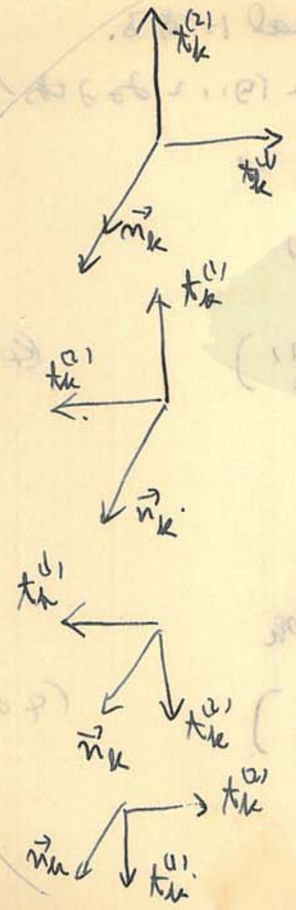
$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

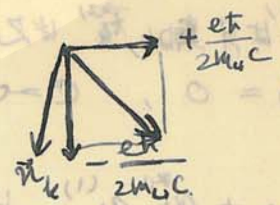
$$m_z = \frac{e\hbar}{2m_u c}\sum_k\Big(-a_k^* a_k + a_k^{*(1)} a_k^{(1)} - b_k^* b_k + b_k^{*(1)} b_k^{(1)}$$
$$+ a_k^* b_k^* - a_k^{*(1)} b_k^{*(1)} + a_k b_k - a_k^{(1)} b_k^{(1)}\Big). \quad (40a)$$

(ii) $\vec{n}_k \sim y$ 軸, $\vec{t}_k^{(1)} \sim z$ 軸, $\vec{t}_k^{(2)} \sim x$ 軸.

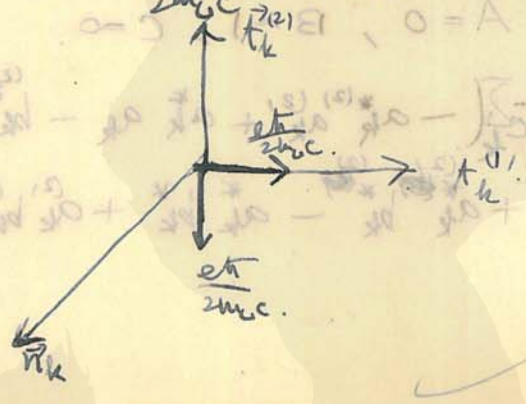
$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0.$$

$$m_z = \frac{e\hbar}{2m_u c}\sum_k\Big(-a_k^{*(2)} a_k^{(2)} + a_k^* a_k - b_k^{(2)*} b_k^{(2)} + b_k^* b_k$$
$$+ a_k^{*(2)} b_k^{*(2)} - a_k^* b_k^* + a_k^{(2)} b_k^{(2)} - a_k b_k\Big). \quad (40b)$$





であるから $\vec{n}_k$ の magnetic moment は $\vec{t}_k^{(1)}$ 方向に $\frac{e\hbar}{2m_0c}$ と、$\vec{t}_k^{(2)}$ の反対の方向に $\frac{e\hbar}{2m_0c}$ の成分を持つ事になる。



(iii) $\vec{n}_k \sim z$軸, $\vec{t}_k^{(1)} \sim x$軸, $\vec{t}_k^{(2)} \sim y$軸.

$$A=0,\quad B=0,\quad C=1.$$

$$m_z = \frac{e\hbar}{2m_u c}\sum_k \frac{\kappa}{k_0}\Big(-a_k^{*(1)}a_k^{(1)} + a_k^{*(2)}a_k^{(2)} - b_k^{*(1)}b_k^{(1)} + b_k^{*(2)}b_k^{(2)}$$
$$+ a_k^{*(1)}b_k^{*(1)} - a_k^{*(2)}b_k^{*(2)} + a_k^{(1)}b_k^{(1)} - a_k^{(2)}b_k^{(2)}\Big) \quad (40c)$$

~~purpose~~ これらから次の~~事~~ことがわかる.

(a) propagationの方向 $\vec{k}$ で平均する場合. ~~U-particleの~~ ~~spin 方向との~~ ~~correlation~~ quantised U-particle の spin が消えるために! magnetic moment との correlation がないために, ~~の~~ electron の様に一定の spin ~~ride~~ 方向のものに~~限る~~付いて平均を取る事が出来ないために, 種々の $\vec{k}$ での平均は消える。

~~(b) 各 component の magnetic moment の向きは component の向きに直角である。~~

(b). (40c) で示す様に transversal の一部は energy 大なるとき比的に小となる。

(c) 各 component の magnetic moment の向きは其の component の向きに直角である。

例へば z方向に進む時 longitudinal component の magnetic moment は

$$\begin{cases} \vec{t}_k^{(1)} \sim y\text{軸},\ \vec{t}_k^{(2)} \sim z\text{軸 のとき} & -\dfrac{e\hbar}{2m_u c} \\ \vec{t}_k^{(1)} \sim z\text{軸},\ \vec{t}_k^{(2)} \sim -y\text{軸 のとき} & +\dfrac{e\hbar}{2m_u c} \\ \vec{t}_k^{(1)} \sim -y\text{軸},\ \vec{t}_k^{(2)} \sim -z\text{軸 のとき} & +\dfrac{e\hbar}{2m_u c} \\ \vec{t}_k^{(1)} \sim -z\text{軸},\ \vec{t}_k^{(2)} \sim y\text{軸 のとき} & -\dfrac{e\hbar}{2m_u c} \end{cases}$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

以上は Proca の expression の quantisation であるが (25)式の $\sqcup_0$ に (III 19) を入れると

$$j_x' = -\frac{ie4\pi c}{\hbar}\left(\mathrm{div}\,\sqcup^+,\tilde{\sqcup}_x^+ - \mathrm{div}\,\tilde{\sqcup}^+\cdot\sqcup_x^+\right) \qquad (41)$$

(26) の electromagnetic field に apply すると

$$m_z' = \frac{ie4\pi c}{\hbar}\int\left[\tilde{\sqcup}_x^+\sqcup_y^+ - \tilde{\sqcup}_y^+\sqcup_x^+\right]dV \qquad (42)$$

を得る. 故に magnetic moment として

$$\mu_z = m_z + m_z'$$

~~を得る。~~

$$= \int\left[\frac{ie}{4\pi\hbar c k^2}\left\{\tilde{\sqcup}_x\sqcup_y - \tilde{\sqcup}_y\sqcup_x\right\} + \frac{ie4\pi c}{\hbar}\left(\tilde{\sqcup}_x^+\sqcup_y^+ - \tilde{\sqcup}_y^+\sqcup_x^+\right)\right]dV \qquad (43)$$

を得る。 m_z' を quantise して見やう。 (19) 式によつて m_z と全く同様に

$$m_z' = \frac{ie4\pi c}{\hbar}\sum_k\left\{A\left(p_k^* p_k^{(1)} - p_k^{*(1)} p_k\right) + B\left(p_k^{*(2)} p_k - p_k^* p_k^{(2)}\right) C\left(p_k^{*(1)} p_k^{(2)} - p_k^{*(2)} p_k^{(1)}\right)\right\}$$

(23) ~~(19a)~~ の transformation を行へば!

$$m_z' = \frac{ie\hbar}{2m_u c}\sum_k \Big\{ A\,(a_k a_k^{*(1)} - a_k^{(1)} a_k^* + b_k^* b_k^{(1)} - b_k^{*(1)} b_k$$

$$+ a_k b_k^{(1)} - b_k^{*(1)} a_k^* + b_k^* a_k^{*(1)} - a_k^{(1)} b_k)$$

$$+ B\,(a_k^{(2)} a_k^* - a_k a_k^{*(2)} + b_k^{(2)*} b_k - b_k^* b_k^{(2)}$$

$$+ a_k^{(2)} b_k - b_k^* a_k^{*(2)} + b_k^{*(2)} a_k^* - a_k b_k^{(2)})$$

$$+ C\,\frac{k_0}{\varkappa}\,(a_k^{(1)} a_k^{*(2)} - a_k^{(2)} a_k^{*(1)} + b_k^{(1)*} b_k^{(2)} - b_k^{*(2)} b_k^{(1)}$$

$$+ a_k^{(1)} b_k^{(2)} - b_k^{*(2)} a_k^{*(1)} + b_k^{(1)*} a_k^{*(2)} - a_k^{(2)} b_k^{(1)}) \Big\}$$

$k_0 = \varkappa$ では　μ_z は pair production の term しか含まない.

$$\mu_z = m_z + m_z'$$

$$= \frac{ie\hbar}{2m_u c}\sum_k \Big[2A\,(- a_k^* b_k^{*(1)} - b_k a_k^{(1)} + a_k^{*(1)} b_k^* + b_k^{(1)} a_k)$$

$$+ 2B\,(- a_k^{*(2)} b_k^* - b_k^{(2)} a_k + a_k^* b_k^{*(2)} + b_k a_k^{(2)})$$

$$+ C\,\Big\{ \left(\frac{\varkappa}{k_0} - \frac{k_0}{\varkappa}\right)(a_k^{*(1)} a_k^{(2)} - a_k^{*(2)} a_k^{(1)} + b_k^{(1)} b_k^{*(2)} - b_k^{(2)} b_k^{(1)*})$$

$$+ \left(\frac{\varkappa}{k_0} + \frac{k_0}{\varkappa}\right)(- a_k^{*(1)} b_k^{*(2)} - b_k^{(1)} a_k^{(2)} + a_k^{*(2)} b_k^{*(1)} + b_k^{(2)} a_k^{(1)}) \Big\} \Big]$$

(iii) の場合を diagonal にすれば

$$\mu_z = \frac{e\hbar}{2m_u c}\sum_k \Big[\Big(\frac{\kappa}{k_0} - \frac{k_0}{\kappa}\Big)\Big(-a_k^{*(1)}a_k^{(1)} + a_k^{*(2)}a_k^{(2)} - b_k^{*(1)}b_k^{(1)} + b_k^{*(2)}b_k^{(2)}\Big) + \Big(\frac{\kappa}{k_0} + \frac{k_0}{\kappa}\Big)\Big(a_k^{*(1)}b_k^{*(1)} - a_k^{*(2)}b_k^{*(2)} + a_k^{(1)}b_k^{(1)} - a_k^{(2)}b_k^{(2)}\Big)\Big] \quad (44)$$

此の場合には energy k_0 に比例して magnetic moment が増加して行く.

heavy particle との interaction に於て U-particle の或 energy の所で切らねばならなかった，之は ~~Selbstenergy~~ heavy particle との interaction の 4th order から要求される(9) し，~~又 Selbstenergy~~ heavy particle の自己 energy や magnetic moment からも要求される(1)(9)。所が (44) に於て k_0 と共に magnetic moment が増加する故に或所で此の electromagnetic field との interaction を切らねばならなくなって来る。すなはち U ~~quand~~ particle との interaction は g によって heavy particle との間のそれも e によって electromagnetic field との間の interaction も切らねばならなくなって来る。之は transversal field に於てである事は注目に価する。

(44) の magnetic moment は U particle の spin が無い故に heavy particle の spin と correlation を持たない故．最初に Wick 流に考へられたものに

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 22

はならない。但之が Rabi effect の説明に何物かを
もたらすであらう事は考へられる。