Theory of the Nuclear Spin

November 10th, 1929

Introduction

Diracノ相対性的電子論ニヨレバ、所謂電子ノspinナルモノハ、Hamiltonianガenergy及ビtime derivative $\frac{\partial}{\partial t}$ ニ関シテ一次デアリ、而モ之ガLorentz transformationニ対シテ不変デアル様ニ取ルコトニヨツテ必然ニ其ノ存在ヲ示サレルノデアル。
此ノ場合Hamiltonianノ中ニハ、Coordinates及ビ~~Momentum~~ Momentaノ外ニ所謂spin variables α_μ (μ = ~~0, 1, 2, 3~~ 1, 2, 3, 4) ~~ガ~~ガ入ツテ来ル。
一方atomic nucleusニツイテ考ヘテ見ルニ、atomic spectraノアル種ノfine structureヲ説明スルタメニ矢張リspinナルモノガ考ヘラレタノデアルガ、上ノ電子ノ場合ヲ類推スレバ、コレモrelativisticナHamiltonianヲ適当ニトルコトニヨツテ必然ト出テクルモノデアラウト思ハレル。
然シナガラnuclear spinニツイテ論ジラレルノハ、atomノ出スspectraニ~~ヲテ~~於テデアツテ、コノ場合ニハ少クトモ一ツノelectronト一ツノnucleusトノtwo body problemヲ取扱ハネバナラヌ。コノtwo bodyニ対スルHamiltonianヲ適当ニトルコトニヨツテ電子ノspinト同時ニ核ノspinモ~~大体~~説明サレル様ニセネバナラヌ。之ハ実際非常ニ困難ナ問題デアル。殊ニrelativisticデナク、単ニfirst approximationトシテrelativity correctionヲ取リ入レタ様ナHamiltonianヲ作ルコトサヘ中々困難デアル。ソレカラハタシテウマク~~nuclear spinガ説明~~ quantitativeニ正シイ結果ヲ出シウルカ否カ疑問デアル。
ソコデ筆者ハカヽル根本的ナ問題ハ一先サシオイテ、従来ノ方法ト同ジクnucleusヲfixedサレテ居ルガ其ノelectronニ及ボスfieldハelectrostaticナCoulombian field丈デナク~~更~~更ニ之ニ、nuclear spin~~ニヨル~~及ビmagnetic momentニヨルmagnetic fieldヲモ考慮スルコトニヨツテDiracノelectron relativity theoryハ~~イカナル~~変化ヲ受ケ、イカニコレHamiltonianハイカナル形

ヲトルカ、ソレカラ如何ナル結果ガ出テクルカヲ考察シテ見度イト思フノデアル。

§1. Hamiltonian for the electron in the field due to nucleus with magnetic moment.

potentialガ A_0, A ナル field ニオケル electron ノ Hamiltonian ハ既知ノ如ク

$$H = (p_0 + \frac{e}{c}A_0) + \sum_{\mu=1}^{3}\alpha_\mu (p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu) + \alpha_4 mc \qquad (1)$$

デアラハサレル。

ココニ $\alpha_\mu\ (\mu = 1, \cdots 4)$ ハ所謂 relativistic ナ spin variables デアツテ

$$\alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$$

ナル條件ヲ満足シテ居ラネバナラヌ。

之ハ最モ簡單ナ expression トシテ四行四列ノ matrix ニトルコトが出来ル。例ヘバ

$$\alpha_1 = \rho_1\sigma_1 \quad \alpha_2 = \rho_2\sigma_2 \quad \alpha_3 = \rho_1\sigma_3 \quad \alpha_4 = \rho_3$$

$$(2)\left\{\begin{array}{l} \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0&-i&0&0\\ i&0&0&0\\ 0&0&0&-i\\ 0&0&i&0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix} \\ \rho_1 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0&0&-i&0\\ 0&0&0&-i\\ i&0&0&0\\ 0&i&0&0 \end{pmatrix} \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

~~トルコトガ出来ル。~~ トシテモヨイ。*

ソコデ σ ナル一種ノ variables ニハ次ノ意味ガ与ヘラレル。

トイフノハ central field 即チ $A_0 = A_0(r)$ $A = 0$ ニ於テ、classical ナ理論ト異ナツテ electron ノ orbital angular momentum

$m = [r\,p]$ ハ conserve セナイ。即チ Hamiltonian ト commute シナイ。ソノカハリ $M = m + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\sigma$ ナル quantity ヲトルト之ガ conserve スル。從ツテ此ノ M ガ total angular momentum デアリ、$\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\sigma$ ナル量ハ spin angular momentum ヲアラハス量デアルト説明スルコトガ

*但シ σ, ρ ハ夫々 α's ト同様ナ條件ヲ満足スル。即チ

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1 \quad \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1 \quad \text{etc} \quad \rho_1^2 = \text{etc} = 1 \quad \rho_1\rho_2 = i\rho_3 = -\rho_2\rho_1$$

又 $\rho_\mu\sigma_\nu = \sigma_\nu\rho_\mu$.

出来ル。又他方ヨリ考ヘテ (1) ニ之ニ conjugate ナ

$$\tilde{H} = -(p_0 + \frac{e}{c}A_0) + \sum_{\mu=1}^{3}\alpha_\mu(p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu) + \alpha_4 mc$$

ヲ乗ズルト、

$$-(p_0 + \frac{e}{c}A_0)^2 + (p + \frac{e}{c}A)^2 + m^2c^2 + \frac{e}{c}\frac{h}{2\pi}(\sigma H) + \frac{ie}{c}\frac{h}{2\pi}\rho_1(\sigma E)$$

ナル式ガ得ラレルカラ spin ヲ考ヘナカツタ場合ノ Hamiltonian ト比較シテ

$$\frac{1}{2m}\frac{e}{c}\frac{h}{2\pi}\sigma \quad \text{及ビ} \quad \frac{i}{2m}\frac{e}{c}\frac{h}{2\pi}\rho_1\sigma$$

ガ夫々 electron ノ magnetic 及ビ electric moment ヲアラハストイツテモヨイデアラウ。

以上ハ Dirac ノ原論文ニ論ジラレタ所デアルガ、次ニ更ニ一歩ヲ進メテ introduction デ述ベタ様ニ nucleus ガ $\mu\beta$ ナル vector デアラハサレル様ナ magnetic moment ヲ有シテ居ルトスルト (但シ μ ハ mag. moment ノ大イサ、β ハ unit vector)

$$A_0 = \frac{Ze}{r} \quad \text{又ハ更ニ一般ニ} \quad A_0 = A_0(r)$$

ナル electrostatic field ノ他ニ

$$A = -\mu[\beta\,\nabla\frac{1}{r}] = \mu\frac{[\beta\,r]}{r^3}$$

ナル vector potential ヲ加ヘネバナラヌ。

之ヲ (1) ニ入レレバ此ノ場合ノ Hamiltonian ガ得ラレルワケデアルガ、ココニ注意スベキハ、†

此ノ場合 β ハ nuclear spin ヲアラハス vector デアルカラ σ ト同様ニ

$$(3)\left\{\begin{array}{ll} \beta_\mu\beta_\nu + \beta_\nu\beta_\mu = 2\delta_{\mu\nu}\ ^{*} & (\mu = 1, 2, 3) \\ \alpha_\mu\beta_\nu = \beta_\nu\alpha_\mu & \end{array}\right.$$

~~トナルコトデアル。~~ 且

† 是レハ今 α's ノ他ニ (3) ヲ満足スル新ナ β's ヲ introduce シタノデアルカラ最早 α's トシテ (2) ノ如キ四行四列ノ matrix ヲトリ得ルカ否カワカラヌ。

ソレデ改メテ σ ノカハリニ α、ρ ノカハリニ γ トトルコトニシ、σ, ρ ハ之カラモ矢張リ (2) ノ expression デ与ヘラレル matrix トシテオク。

スルト (1) 式ハ

* 尚 $\beta_1\beta_2 = i\beta_3$ etc ヲモ満足スルモノトシテオク。

† α, β, γ ノ満足スベキ式ハ後ノ (8) デ与ヘラレル。

$$H = p_0 + \frac{e}{c}A_0(r) + \gamma_1\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\mu\frac{[\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{r}]}{r^3}\right) + \gamma_3 mc \qquad (4)$$

トナル。

コノ場合上ニ述ベタ total angular momentum $\mathbf{M}$ ハ conserve スルカドウカ 即チ之ガ H ト vertauschbar カドウカヲ見ルト. 問題トナルノハ 新タニ加ヘタ

$A = \frac{e}{c}\mu$

$$\frac{e}{c}\mu\ \boldsymbol{\alpha}\frac{[\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{r}]}{r^3} = A\cdot\frac{\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{r}]}{r^3} = A\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}] \qquad (5)$$

ノ項デアッテ

(6a) $\mathbf{m}\{\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}]\} - \{\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}]\}\mathbf{m} = \frac{1}{2}\frac{hi}{2\pi}[\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}]]$ *

(6b) $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\alpha}\{\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}]\} - \{\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}]\}\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2}\frac{hi}{2\pi}[\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{r}]]$

トナリ 従ッテ $\mathbf{M}H - H\mathbf{M} \neq 0$

即チ total angular momentum $\mathbf{M}$ ハ conserve シナイ。

然ルニ $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\beta}$ ナル項ヲ考ヘルト 之ハ(5)以外ノ項トハ勿論 commute シ、且

(6c) $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\beta}\{\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}]\} - \{\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}]\}\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\beta} = -\frac{1}{2}\frac{hi}{2\pi}[\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{r}]]$

トナリ.(6a, b, c) ヲ加ヘ合スト*

$$\left\{\mathbf{m} + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\beta}\right\}\{\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}]\} - \{\quad\}\left\{\mathbf{m} + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\beta}\right\} = 0 \dagger$$

トナリ. $\frac{A}{r^3}$ ナル factor モ又明カニ $\{\quad\}$ ト commute スルカラ 結局

(7) $\mathbf{m} + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\beta}$

ハ Hamiltonian ト commute スル。従ッテ之ヲ total angular momentum ト考ヘルコトガ出来ル。

nucleus ハ fixed シテヰルト考ヘタノデアルカラ ソノ orbital angular momentum ハ勿論 0 デアルガ spin angular 丈ハ相対論的ニ其ノ大キサハ electron ト同様 $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ デアルトイフコトニナル。

ソコデ実際ハ Dirac ノヤッタノト analogous ニ

$$\left(\mathbf{m} + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\beta}\right)^2 = \left(f^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2$$

ト置キ、Dirac ノ場合ノ j ト同様ニ positive or negative integer ヲトル f ナル quantum ヲ introduce スルコトガ出来ル。

* コノ計算ニハ $p_\mu q_\nu - q_\nu p_\mu = \frac{h}{2\pi i}\delta_{\mu\nu}$ ヲ使フ。

† ニハ $[\mathbf{A}[\mathbf{B}\mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{B})$ ニヨリ明カデアル。

之ノ新シキ quantum number f ニツイテ selection rule ヲ定メ spectroscopi~~cally~~ ニ於ケル hyperfine structure ヲ定メル f ナル quantum number トノ関係ヲ調ベル必要ガアルガ 之ハ後ニ述ベル。

尚 Dirac ノ理論ニヨルト上ニ述ベタ如ク ~~ma~~ electron ニ magnetic moment ノ他ニ imaginary ニシテアルガ $\frac{e}{2mc}\frac{h}{2\pi}i\gamma_1\boldsymbol{\alpha}$ ナル electric moment ヲモモッテ居ルカラ 之ト analogous ニ nucleus ニモ $i\mu\gamma_1\boldsymbol{\beta}$ ナル electric moment ヲモ考ヘルト scalar potential A_0 ニハ更ニ $i\mu\gamma_1\left(\boldsymbol{\beta}\nabla\frac{1}{r}\right)$ ナル項ヲ加ヘネバナラヌ。

然シ之ノ項ハ矢張リ

$$\mathbf{m} + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\beta}$$

ト commute スル。

$$\because\quad \mathbf{m}\left(\boldsymbol{\beta}\nabla\frac{1}{r}\right) - \left(\boldsymbol{\beta}\nabla\frac{1}{r}\right)\mathbf{m} = -\frac{h}{2\pi}i\frac{[\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{r}]}{r^3}$$

$$\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\beta}\left(\boldsymbol{\beta}\nabla\frac{1}{r}\right) - \left(\boldsymbol{\beta}\nabla\frac{1}{r}\right)\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\beta} = \frac{h}{2\pi}i\frac{[\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{r}]}{r^3}$$

而シテ勿論

$$\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}\nabla\frac{1}{r}\right) - (\quad〃\quad)\boldsymbol{\alpha} = 0.$$

$$\therefore\quad \left(\mathbf{m} + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\beta}\right)\left(\boldsymbol{\beta}\nabla\frac{1}{r}\right) - \left(\boldsymbol{\beta}\nabla\frac{1}{r}\right)(\quad〃\quad) = 0.$$

従ッテ タトヘ nucleus ノ electric moment ヲ考ヘテモ total angular momentum ノ conservation ニ変化ハナイ。

ソノ上ニ ノ term ハ ~~pure~~ imaginary ノ eigenwert ヲモッテ居ルカラ energy level ノ変化ヲ論ズル場合ニハ neglect シテヨイ。

以上述ベタ所ハ nuclear spin ガ一ツノ spin variable $\boldsymbol{\beta}$ デアラハサレル場合デアッタガ、更ニ一般的ニハ（$4\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ トイフ様ナ amount ノ spin モ考ヘネバナラヌ場合モアルコトヲ考ヘルト）幾ツカノ互ニ独立ナ spin vector ノ superposition ヲ考ヘネバナラヌ。

即 $\boldsymbol{\beta}^{(n)}$ $(n=1,2,\dots l)$ ~~[illegible]~~ ヲ

$$(8a)\begin{cases} (\beta_\mu^{(n)})^2 = 1 \qquad \beta_1^{(n)}\beta_2^{(n)} = i\beta_3^{(n)} = -\beta_2^{(n)}\beta_1^{(n)} \quad \text{etc} \\ \beta_\mu^{(m)}\beta_\nu^{(n)} = \beta_\nu^{(n)}\beta_\mu^{(m)} \\ \beta_\mu^{(m)}\alpha_\nu = \alpha_\nu\beta_\mu^{(m)} \end{cases}$$

~~又 (8b) $\beta_\mu^{(m)}\gamma_\nu = \gamma_\nu\beta_\mu^{(m)}$~~

ヲ満足スル variables トシ、之等ノ夫々ノ magnetic moment ノ amount ヲ μ_n トスレバ、ココデハ field ハ

$$(5)' \qquad A = \sum_{n=1}^{l} \mu_n \frac{[\beta^{(n)} r]}{r^3}$$

トナリ、従ツテ total angular momentum トシテ

$$\mathfrak{m} + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\alpha + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\sum_n \beta^{(n)}$$

ガ conserve スルコトニナル。

ソレナラバ実際 $\alpha, \beta^{(n)}, \gamma$ 等ハ explicitly ニアラハスニハ如何ナル形ヲトレバヨイカヲ考ヘテ見ルニ、之等ノ間ニハ (8a) ノ他ニ

$$(8b)\begin{cases} \beta_\mu^{(m)}\gamma_\nu = \gamma_\nu\beta_\mu^{(m)} \qquad (m=1,2,\dots l) \\ \alpha_\mu^2 = \gamma_\mu^2 = 1 \qquad \alpha_\mu\gamma_\nu = \gamma_\nu\alpha_\mu \\ \alpha_1\alpha_2 = i\alpha_3 = -\alpha_2\alpha_1 \qquad \gamma_1\gamma_2 = i\gamma_3 = -\gamma_2\gamma_1 \quad \text{etc} \end{cases}$$

ヲ満足スルト見テ、最モ簡単ナ場合トシテハジメニノベタ $l=1$ ノ場合ヲ考ヘルト例ヘバ8行8列ノ matrix トシテアラハシ

$$(9)\begin{cases} \alpha = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \\ \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & +i\rho_3 \\ -i\rho_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 0 & -\rho_3 \end{pmatrix} \\ \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \rho_2 \\ \rho_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 0 & \rho_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

トナツテモヨイ。

但シ σ, ρ ハ (2) デ与ヘラレル四行四列ノ matrix トシ

$$1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

ヲアラハス。

§2. Solution of the wave equations in the perturbing field due to nuclear magnetic field.

サテ吾々ハ次ニ quantitatively ニ詳細ナ知識ヲ得ルタメニハ上述ノ場合ニ於ケル wave equations ヲトカネバナラヌ。

先ヅ (4) ノ Hamiltonian ヲトレバ wave equations ハ

$$\left\{p_0 + \frac{e}{c}A_0(r) + \gamma_1\left(\alpha, p + \frac{e}{c}\mu\frac{[\beta r]}{r^3}\right) + \gamma_3 mc\right\}\psi = 0 \qquad (10)$$

トナル。

但シ p_0, p ハ夫々 $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{h}{2\pi i}\text{grad}$ ヲアラハシ、wave function ψ ハ α, β, γ ノ matrix ノ行列ノ数丈ノ component ヲ持ツトスル。

コノ場合 operation ハ通例ノ如ク、element ガ $\alpha_{\mu\nu}$ ナル matrix α ヲ component ガ ψ_λ ナル wave function ψ ニ operate スル結果ハ $\sum_\nu \alpha_{\mu\nu}\psi_\nu$ ナル components ヲ有スル ψ' ガ得ラレ、之ガ $\alpha\psi$ デアラハサレテ居ルモノトスル。

~~コノ場合~~

(10) ノ式ヲ α, β, γ ガ (9) デアラハサレタ場合ニツイテ少シ細ク書イテ見レバ

$$(11)\begin{cases} \left(p_0 + \frac{e}{c}A_0\right)\psi_A + \rho_1(\sigma p)\psi_B + \rho_3 mc\,\psi_A + B_1\psi_A + C_1\psi_B = 0 \\ \left(p_0 + \frac{e}{c}A_0\right)\psi_B + \rho_1(\sigma p)\psi_A + \rho_3 mc\,\psi_B + B_2\psi_A + C_2\psi_B = 0 \end{cases}$$

トナル。

但シ ψ_A, ψ_B ハ夫々 ψ ノ8個ノ components 中ハジメノ4個、後ノ4個ヲアラハシ、

最後ノ B, C 等ノツイタ項ハ $\gamma_1\left(\alpha, \frac{e}{c}\mu\frac{[\beta r]}{r^3}\right)\psi$ ヲ細ク分ケタモノデ、

$$(12)\begin{cases} B_1 = \frac{e\mu}{cr^3}\left(\sigma_3\rho_2 x + \sigma_3\rho_1 y - (\sigma_1\rho_2 + \sigma_2\rho_1) z\right) \\ C_1 = \frac{e\mu}{cr^3}\left(i\sigma_2\rho_2 x - i\sigma_1\rho_2 y\right) \\ B_2 = \frac{e\mu}{cr^3}\left(-i\sigma_2\rho_2 x + i\sigma_1\rho_2 y\right) \\ C_2 = \frac{e\mu}{cr^3}\left(-\sigma_3\rho_2 x + \sigma_3\rho_1 y + (\sigma_1\rho_2 - \sigma_2\rho_1) z\right) \end{cases}$$

$$\{(p_0+\frac{e}{c}A_0)+\gamma_1(\alpha\, p)+\gamma_3 mc\}\psi=0 \qquad (10')$$

デアル。

ソコデ μ ハ非常ニ小サイ量デアルカラ B, C ノ項ヲ Störung ト考ヘルト Störung ノナイ場合ノ wave eq. ハ

$$\left.\begin{aligned}&(p_0+\frac{e}{c}A_0)\psi_A+\rho_1(\sigma\, p)\psi_B+\rho_3 mc\,\psi_A=0\\ \text{or}\quad &(p_0+\frac{e}{c}A_0)\psi_B+\rho_1(\sigma\, p)\psi_A+\rho_3 mc\,\psi_B=0\end{aligned}\right\}(11)'$$

トナル。

A_0 ハ r ノミノ函数デ~~アルカラ~~ time ヲフクマヌ場合ヲ考ヘテ居ルノデアルカラ $p_0=\frac{W}{c}$ デ W ガ energy ヲアラハスコトニナル。

今上ノ式ヲ一見シテ明カナゴトク

$$\psi_A=\psi_B$$

トオクト、両式ハ共ニ

$$(p_0+\frac{e}{c}A_0)\psi_A+\rho_1(\sigma\, p)\psi_A+\rho_3 mc\,\psi_A=0$$

トナル。コレハ Dirac ノ equation (1) ト全ク同ジデアル。

従ッテ $\psi(\psi_A,\psi_B)$ ニ於テ ψ_A, ψ_B ガ共ニ Dirac ノ equation ノ solution デアル様ニトレバ ~~両方~~ コレハ明カニ (11)' ノ一ツノ solution トナル。コレヲ ~~Ψ_I トシテオク~~ $\Psi_I(\psi_0,\psi_0)$ トシテオク。

次ニ ψ ヲ (10') ノ一ツノ solution トシテオクト、(10') カラ明カナ如ク

$$p_0+\frac{e}{c}A_0+\gamma_1(\alpha\, p)+\gamma_3 mc$$

ト vertauschbar ナ量ヲ ψ ニ乗ジタモノモ又一ツノ solution デアル。然ルニ β's ハ明ニコト vertauschbar デアルカラ

$$\beta_1\Psi_I,\quad \beta_2\Psi_I,\quad \beta_3\Psi_I$$

ガ共ニ又 (10') ノ solution トナル*。

コレヲクハシクカクト夫々

$$(\psi_0,\psi_0)\qquad (i\rho_3\psi_0,\,-i\rho_3\psi_0)\qquad (\rho_3\psi_0,\,-\rho_3\psi_0)$$

トナル。従ッテ之等全体、四ツノ solution 中 ~~linear 要ナルモノハ~~ linearly indep ナモノハ

$$\Psi_I(\psi_0,\psi_0)\quad \text{及ビ}\quad \Psi_{II}(\rho_3\psi_0,\,-\rho_3\psi_0)$$

ノ二ツデアル。

~~コノ他ニ~~ 本質ト linearly independent ナ solution ガナイトスレバ† コノ場合 system ハ doubly degenerated デアル。

Ψ_I ト Ψ_{II} ハ明カニ orthogonal デアル。

† コノ事ハ後ニノベル。

* 一般ニハ β's ノ任意ノ函数ヲ乗ジテヨイガ、β's ノ任意ノ函数ハ β's ノ linear fn. ナルカラ、コレハ上ノ四ツト linearly independent デハナイ。

何故 $\Sigma\int\psi_0\rho_3\psi_0\,dv-\Sigma\int\psi_0\rho_3\psi_0=0$

ψ_0 自身ガ normalise サレタ solution デアルトシテオクト

$$\frac{1}{\sqrt2}\Psi_I(\frac{1}{\sqrt2}\psi_0,\,\frac{1}{\sqrt2}\psi_0)\qquad \frac{1}{\sqrt2}\Psi_{II}(\frac{\rho_3}{\sqrt2}\psi_0,\,\frac{-\rho_3}{\sqrt2}\psi_0)$$

ガ orthogonal デ normalise サレタ solution トナル。

ソコデ nuclear spin ニヨル Störung ガ加ハレバ、コノ場合一ツノ eigenwert p_0 ~~ニ対スル~~ ハ一般ニ二ツニ split up サレ doublet term ガ得ラレル。~~コノ energy 変化ヲ詳シク研究スル為ニ一般的ナ附記ヲモウ少シ論ジテ見ヨウ。~~ 然シ Ψ_I, Ψ_{II} ノ他ニ之ト linearly indep ナ solution ガアリハシタメ eigenwert ガ更ニ多ク ニ split up スル恐レハナイカ。

~~上ノ如ク上ノ(9)式デ~~ コレニツイテ厳密ニ論ズルコトハ非常ニ困難デアルガ後ニ述ベル所モ参照サレタイ。

ドウシテモ一般的ナ場合即チ (5)' デ与ヘラレル field ノ場合ヲ考ヘテ見ルト、$\alpha, \beta^{(m)}, \gamma$ 等ハ一般ニ多数ノ行列ヲ有スル matrix デアラハサレネバナラヌデアラウガ、コノ場合ニツイテモ unperturbed system ノ degeneration ノ様子ヲ見ルニ、Ψ_I ヲ (10') 式ノ一ツノ solution トスレバ

$$\begin{array}{ccc}\beta_1^{(1)}\Psi_I & \beta_2^{(1)}\Psi_I & \beta_3^{(1)}\Psi_I\\ \beta_1^{(2)}\Psi_I & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \beta_1^{(l)}\Psi_I & \beta_2^{(l)}\Psi_I & \beta_3^{(l)}\Psi_I\end{array}$$

ガ又 solution デアル。何故ナラ β's ハ全テ α, γ ト vertauschbar デ従ッテ Hamiltonian ト vertauschbar ダカラデアル。

補遺．一般的ニ ℓ 組ノ互ニ vertauschbar ナル spin vector $\rho^{(n)}$ $(n=1,2,\dots \ell)$ ヲ construct スル方法ハ次ノ如シ。

β　a ナル matrix ガ 2^ℓ 乗個ノ行列ヲ有スル square matrix トシ其ノ Element ヲ

$a(\mu,\nu) = a(\mu_1\nu_1, \mu_2\nu_2, \cdots \mu_\ell\nu_\ell)$ or $a(\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_\ell;\nu_1,\nu_2,\cdots\nu_\ell)$

デアラハシタトスル。μ 及ビ ν ハ夫々行及ビ列ヲアラハス数トシ μ's ν's ハ夫々 1 及 2 ノイヅレカノ値ヲトリ，全体トシテノ行列ノ順ハ $\mu_1\mu_2\cdots\mu_\ell$ or $\nu_1\nu_2\cdots\nu_\ell$ ヲ一ツノ数トミタ時ノ小サイ順ニナラブトスル。

ソシテ　$a(\mu_1\nu_1, \mu_2\nu_2 \cdots \mu_\ell\nu_\ell) = \varepsilon_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_2\nu_2}\cdots\delta_{\mu_\ell\nu_\ell}$

トトリ，　(但シ $\delta_{\mu\nu} = 0$ or 1 according as $\mu \neq \nu$ or $=\nu$)

a^2 ヲツクレバ，

$$a(\mu_1\lambda_1, \mu_2\lambda_2, \cdots, \mu_\ell\lambda_\ell)\, a(\lambda_1\nu_1, \lambda_2\nu_2 \cdots, \lambda_\ell\nu_\ell)$$
$$= \varepsilon_{\mu_1\lambda_1}\varepsilon_{\lambda_1\nu_1}\cdot\delta_{\mu_2\lambda_2}\delta_{\lambda_2\nu_2}\cdots\cdots\delta_{\mu_\ell\lambda_\ell}\delta_{\lambda_\ell\nu_\ell}$$
$$= \varepsilon_{\mu_1\lambda_1}\varepsilon_{\lambda_1\nu_1}\cdot\delta_{\mu_2\nu_2}\cdots\delta_{\mu_\ell\nu_\ell}$$

従ッテ　$a^2 = 1$　即チ　$a(\mu,\lambda)\,a(\lambda,\nu) = \delta_{\mu\nu}$　ナルタメニハ

$$\varepsilon_{\mu_1\lambda_1}\varepsilon_{\lambda_1\nu_1} = \delta_{\mu_1\nu_1}$$

デナケレバナラヌ。従ッテ　$\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}\end{pmatrix}^2 = 1$

∴ コレハ Pauli ノ spin variables　$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\+i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ ヲトレバヨイ。

之等ヲ夫々 $\varepsilon^{(1)}$ $\varepsilon^{(2)}$ $\varepsilon^{(3)}$ トスレバ，　$\varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(2)} = i\varepsilon^{(3)}$ etc ヲ満足スル。

ソシテ　$\rho^{(m)}_{\lambda}(\mu\nu) = \delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_2\nu_2}\cdots\delta_{\mu_{m-1}\nu_{m-1}}\varepsilon^{(\lambda)}_{\mu_m\nu_m}\delta_{\mu_{m+1}\nu_{m+1}}\cdots\delta_{\mu_\ell\nu_\ell}$

トスレバ之等ガ　(8a) ノ式ヲ満足スル spin variables トナル。

之ヲ(9)ノ場合ニ応用スルト

$$\begin{array}{ccc|cccccccc}
 & & & 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\
 & & & 1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\
 & & & 1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\
\hline
1&1&1 & 0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&1&-1 & 1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&-1&1 & 0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&-1&-1 & 0&0&1&0&0&0&0&0\\
-1&1&1 & 0&0&0&0&0&1&0&0\\
-1&1&-1 & 0&0&0&0&1&0&0&0\\
-1&-1&1 & 0&0&0&0&0&0&0&1\\
-1&-1&-1 & 0&0&0&0&0&0&1&0
\end{array}
\quad
\begin{array}{|cccccccc}
0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0
\end{array}
\quad
\begin{array}{|cccccccc}
0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0
\end{array}
\quad
\begin{array}{|cccccccc}
0&0&0&0&-i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-i\\
i&0&0&0& & & & \\
0&i&0&0& &0& & \\
0&0&i&0& & & & \\
0&0&0&i& & & &
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}\sigma_1&0\\0&\sigma_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_2&0\\0&\sigma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_3&0\\0&\sigma_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_1&0\\0&\rho_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_2&0\\0&\rho_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_3&0\\0&\rho_3\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$(H+H_1)\Psi = 0$　　$+\varepsilon_1\Psi_a$　　Ψ.

$\Psi = a_1\Psi_I + a_2\Psi_{II} + \varepsilon\Psi_b$　　$\Sigma\Psi_a + H_1\Psi_I\cdots = 0$

$b_1\Psi_I + b_2\Psi_{II}$　　$= 0$

$H\varepsilon\Psi_b + H_1\cdots + \cdots = 0$

之ヲ以ッテ wave equation ハ

$$\left.\begin{aligned}(p_0+\tfrac{e}{c}A_0)\psi_A + \rho_1(\sigma, p)\psi_A + \rho_3 mc\psi_A + B_1\psi_A + C_1\psi_B = 0\\ (p_0+\tfrac{e}{c}A_0)\psi_B + \rho_1(\sigma, p)\psi_B + \rho_3 mc\psi_B + B_2\psi_A + C_2\psi_B = 0\end{aligned}\right\}\ (a)$$

トナル。

ココニ　$\gamma_1\left(\alpha, \frac{e}{c}\mu\frac{[\sigma r]}{r^3}\right) = \frac{e}{c}\mu\frac{\gamma}{r^3}[\sigma\alpha, \rho] = H_1$

$$= \frac{e}{c}\mu\cdot\frac{\gamma_1}{r^3}\{x\cdot(\alpha_2\rho_3 - \alpha_3\rho_2) + y(\alpha_3\rho_1 - \alpha_1\rho_3) + z(\alpha_1\rho_2 - \alpha_2\rho_1)\}$$
$$= \frac{e}{c}\frac{\mu}{r^3}\begin{pmatrix}\rho_1&0\\0&\rho_1\end{pmatrix}\left\{x\cdot\begin{pmatrix}\sigma_2 & i\sigma_3\\ -i\sigma_3 & -\sigma_2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-\sigma_1 & \sigma_3\\ \sigma_3 & \sigma_1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0 & \sigma_1 - i\sigma_2\\ i\sigma_1-\sigma_2 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

$\Psi_a = \sum A_n \Psi_n$

ナレバ，

$$B_1 = \rho_1\frac{e}{c}\frac{\mu}{r^3}(x\cdot\rho_1\sigma_2 - y\rho_1\sigma_1)$$
$$C_1 = \rho_1\frac{e}{c}\frac{\mu}{r^3}(x i\sigma_3 + y\sigma_3 - z(i\sigma_1 + \sigma_2))$$
$$B_2 = \rho_1\frac{e}{c}\frac{\mu}{r^3}(-x i\sigma_3 + y\sigma_3 + z(i\sigma_1 - \sigma_2))$$
$$C_2 = \rho_1\frac{e}{c}\frac{\mu}{r^3}(-x\sigma_2 + y\sigma_1)$$

$A_n\Psi_n$

$E A_I + \bigcirc a_1 + \bigcirc a_2 = 0$

$E A_{II} + \bigcirc a_1 + \bigcirc a_2 = 0$

$\begin{pmatrix}\circ&\circ\\\circ&\circ\end{pmatrix}$

(a) 式ノ solution ハ störung B, C ノナイ時ノ ψ_A, ψ_B 共ニ Dirac ノ eq ノ solution ψ_0 デアラハサレル。

ソシテ störung ノナイ時ノ solution トシテ orthogonal, normalised ノ

$\Psi_I(\psi_0, 0)$　$\Psi_{II}(0, \psi_0)$ ヲトレバ，　Ψ

~~störung~~ energy 変化ハ störungsenergie ノ

$$\begin{pmatrix}\sum\int\tilde{\Psi}_I H_1\Psi_I & \sum\int\tilde{\Psi}_I H_1\Psi_{II}\\ \sum\int\tilde{\Psi}_{II}H_1\Psi_I & \sum\int\tilde{\Psi}_{II}H_1\Psi_{II}\end{pmatrix}$$

デアラハサレル，之ハ

$$\begin{pmatrix}\sum\int\tilde{\psi}_0 B_1\psi_0 & \sum\int\tilde{\psi}_0 C_1\psi_0\\ \sum\int\tilde{\psi}_0 B_2\psi_0 & \sum\int\tilde{\psi}_0 C_2\psi_0\end{pmatrix}$$

$$(b)\left\{\begin{aligned}&\psi_1 = -iF_k P^u_{k+1},\quad \psi_2 = -iF_k P^{u+1}_{k+1}\\ &\psi_3 = (k+u+1)P^u_k\psi_4 = (-k+u)G_k P^{u+1}_k\end{aligned}\right.$$

トナル。~~之ハ0ナレバ~~，ソシテ Darwin ニ従ッテ

デアルカラ　$\Psi_I(\psi_0, 0)$, $\Psi_{II}(0, \psi_0)$ ノ間ニハ coupling ハナイ。

之ニ反シテ (b) ト　$(c)\left\{\begin{aligned}&\psi_1 = -i(k+u+1)F_{-k-1}P^u_k \quad \psi_2 = -i(-k+u)F_{-k-1}P^{u+1}_k\\ &\psi_3 = G_{-k-1}P^u_{k+1} \quad \psi_4 = G_{-k-1}P^{u+1}_{k+1}\end{aligned}\right.$

トキヲトルト、先 $\Psi^{(k)}_{\mathrm{I}}$ ト $\Psi^{(-k-1)}_{\mathrm{II}}$ トヲトルト

$$\begin{pmatrix} \int \tilde{\Psi}^{(k)}_{\mathrm{I}} H_1 \Psi^{(-k-1)}_{\mathrm{I}} & \int \tilde{\Psi}^{(k)}_{\mathrm{I}} H_1 \Psi^{(-k-1)}_{\mathrm{II}} \\ \int \tilde{\Psi}^{(k)}_{\mathrm{II}} H_1 \Psi^{(-k-1)}_{\mathrm{I}} & \int \tilde{\Psi}^{(k)}_{\mathrm{II}} H_1 \Psi^{(-k-1)}_{\mathrm{II}} \end{pmatrix} =$$

$$B_1 = \frac{e}{c}\frac{\mu}{r^3}(\rho_1\sigma_2 x - \rho_1\sigma_1 y)$$

$$= \;''\; \left\{ \begin{pmatrix} & & & -i \\ & & i & \\ & -i & & \\ i & & & \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} y \right\}$$

$$= \frac{e}{c}\frac{\mu}{r^3} \left\{ \begin{matrix} & & & -ix-y \\ & & ix-y & \\ & -ix-y & & \\ ix-y & & & \end{matrix} \right\} = \frac{e}{c}\frac{\mu}{r^2} \left\{ \begin{matrix} & & & ie^{-i\varphi} \\ & & -ie^{i\varphi} & \\ & ie^{-i\varphi} & & \\ -ie^{i\varphi} & & & \end{matrix} \right\} \sin\theta$$