Diracノ相対性的電子論ニヨレバ、所謂電子ノspinナルモノハ、Hamiltonianガenergy即チtime derivative $\frac{\partial}{\partial t}$ ニ関シテ一次デアリ、而モ之ガLorentz transformationニ対シテ不変デアル様ニ取ルトキニヨリ自然ニ其ノ存在ヲ認メラレルノデアル。
コノ場合Hamiltonianノ中ニハcoordinates及ビmomentaノ他ニ所謂spin variables或ハ（四次元的）velocity componentsト見ナサレル α_μ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ ガ入ッテ居ル。
一方atomic nucleusニ就テ考ヘテ見ルニatomic spectraノアル種ノfine structureヲ説明スルタメニ矢張リspinヲ導入スル必要ガアッタガ、上ノ電子ノ場合カラ類推スレバ、コレモrelativisticナoriginヲ有スルモノデアラウ。
然シNuclear spinニ就テ論ジラレルノハ、atomノ出スspectraニ於テデアッテ、コノ場合ニハ是非トモ一ツノelectronト一ツノnucleusトノtwo body problemヲ取扱ハネバナラヌ。コノtwo bodyニ対スルHamiltonianヲ適当ニ取ルトキニヨリ電子ノspinト同時ニ核ノspinモ説明サレル様ニセネバナラヌ。之ハ実際中々困難ナ問題デアル。原理上relativisticデナクテ、単ニfirst approximationトシテrelativity conditionヲ取入レタ様ナHamiltonianヲ作ルコトサヘ困難デアリ、ソレカラ果シテ如何ニquantitativelyニ正シイ結果ヲ出シ得ルヤ否ヤ疑問デアル。
ソコデカヽル根本的ナ問題ハ一先ヅオイテ、従来ノ方法ト同ジクnucleusヲfixedサセテ見ルガ、其ノelectronニ及ボスfieldハelectrostaticナCoulombian field丈デナク、更ニnuclear spin ~~ニヨル~~ 即チmagnetic momentニヨルmagnetic fieldヲモ考慮スルトキニヨリDiracノrel. electron theoryニヨルHamiltonianヲ作リ、ソレカラ如何ナル結果ガ出テ来ルカヲ考察シテ見タイト思フ。

potential ガ A_0, $\mathbf{A}$ ナル field ニオケル electron ノ Hamiltonian

$$H=(p_0+\frac{e}{c}A_0)+\sum_{\mu=1}^{3}\alpha_\mu(p_\mu+\frac{e}{c}A_\mu)+\alpha_4 mc \qquad (1)$$

ニ於テ relativistic + spin variables $\alpha_\mu(\mu=1,2,3,4)$ ハ

$$\alpha_\mu\alpha_\nu+\alpha_\nu\alpha_\mu=2\delta_{\mu\nu}$$

ナル條件ヲ滿足スルモノ、ソレハ最モ簡單ナル expression トシテハ四行四列ノ matrix 例ヘバ、

$$\alpha_1=\rho_1\sigma_1 \quad \alpha_2=\rho_1\sigma_2 \quad \alpha_3=\rho_1\sigma_3 \quad \alpha_4=\rho_3$$

$$(2)\left\{\begin{array}{lll}\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} & \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix} & \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\\ \rho_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} & \rho_2=\begin{pmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&-i\\i&0&0&0\\0&i&0&0\end{pmatrix} & \rho_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

ト取ッテモヨイ。

但シ σ,ρ ハ夫レ α's ト同様ナ條件ヲ滿足ス、即チ

$$\sigma_\mu^2=1 \qquad \sigma_1\sigma_2=i\sigma_3=-\sigma_2\sigma_1 \text{ etc}$$
$$\rho_\nu^2=1 \qquad \rho_1\rho_2=i\rho_3=-\rho_2\rho_1 \text{ etc}$$

又ニ

$$\rho_\mu\sigma_\nu=\sigma_\nu\rho_\mu \qquad \mu,\nu=1,2,3$$

ソシテ σ ナル variables ニハ次ノ意味ガ與ヘラレル。

即チ central field 即チ $A_0=A_0(r)$ $\mathbf{A}=0$ ニ於テ classical ナ理論ト異ナッテ electron ノ orbital angular momentum $\mathbf{m}=[\mathbf{r}\,\mathbf{p}]$ ハ conserve シナイ。即チ Hamiltonian ト commute シナイ。ソノカハリ $\mathbf{M}=\mathbf{m}+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\sigma$ ナル量ガ conserve スル。従ッテ之ノ $\mathbf{M}$ ヲ total angular momenta ト考ヘ、$\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\sigma$ ヲ以テ spin angular momenta ヲアラハス量デアルト説明シタ。

又他方カラ考ヘテ (1) ニ之ニ conjugate ナ

$$\tilde{H}=-(p_0+\frac{e}{c}A_0)+\sum_{\mu=1}^{3}\alpha_\mu(p_\mu+\frac{e}{c}A_\mu)+\alpha_4 mc$$

ヲ乘ズルト

$$-(p_0+\frac{e}{c}A_0)^2+(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A})^2+m^2c^2+\frac{e}{c}\frac{h}{2\pi}(\sigma\mathbf{H})+\frac{ie}{c}\frac{h}{2\pi}\rho_1(\sigma\mathbf{E})$$

ナル式ガ得ラレルカラ spin ヲ考ヘナカッタ場合ト比較シテ

$$\frac{1}{2m}\frac{e}{c}\frac{h}{2\pi}\sigma \quad \text{及ビ} \quad \frac{i}{2m}\frac{e}{c}\frac{h}{2\pi}\rho_1\sigma$$

ガ夫レ electron ノ magnetic 及ビ electric moment ヲアラハストイッテモヨイ。

以上ハ Dirac ノ論文ニ論ゼラレタ所デアルガ、次ニ更ニ一歩ヲ進メテ nucleus ガ $\mu\beta$ ナル vector デアラハサレル様ナ magnetic moment ヲ有シテ居ルトスレバ (但シ μ ハ mg. moment ノ大イサ β ハ unit vector)

$$A_0=\frac{Ze}{r}$$

又ハ更ニ一般ニ $A_0=A_0(r)$ ナル electrostatic field ノ他ニ

$$\mathbf{A}=-\mu[\beta\,\nabla\frac{1}{r}]=\mu\frac{[\beta\mathbf{r}]}{r^3}$$

ナル vector potential ヲ加ヘネバナラヌ。

コノ場合 β ハ nuclear spin ヲアラハス vector デアルカラ σ ト同様ニ

$$(3) \qquad \beta_\mu\beta_\nu+\beta_\nu\beta_\mu=2\delta_{\mu\nu} \qquad \mu=1,2,3$$

[illegible]

$$\beta_1\beta_2=i\beta_3 \text{ etc}$$

及ビ

$$\alpha_\mu\beta_\nu=\beta_\nu\alpha_\mu$$

ノ関係ヲ滿足スルモノトシテオク。

之ヲ(1)ニ入レレバ之ノ場合ノ Hamiltonian ガ得ラレルワケデアルガ、ココニ注意スベキコトハ今 α's ノ他ニ(3)ヲ滿足スル様ナ β's ヲ introduce シタノデアルカラ最早 α's トシテ (2) ノ如キ四行四列ノ matrix ヲトリウルカ否ヤワカラヌ。

ソレデ改メテ σ ノカハリニ α、ρ ノカハリニ γ トトル事トシ、σ,ρ ハ之カラモ矢張リ (2) ノ expression デ與ヘラレル matrix トシテオク。スルト (1) 式ハ

$$H=p_0+\frac{e}{c}A_0(r)+\gamma_1(\alpha,\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mu\frac{[\beta\mathbf{r}]}{r^3})+\gamma_3 mc \qquad (4)$$

トナル。

此ノ場合上ニ述ベタ total angular ~~momenta~~ momentum $\mathbf{M}$ ハ conserve スルカドウカ、即チ之ガ H ト commute スルカドウカヲ見ルト問題トナルノ

新ニ加ヘテ

$$\frac{e}{c}\mu\,\alpha\frac{[\rho\mathfrak{r}]}{r^3} = A\cdot\frac{\alpha\cdot[\rho\mathfrak{r}]}{r^3} = A\frac{\mathfrak{r}}{r^3}[\alpha\rho] \qquad (5)$$

$$A = \frac{e}{c}\mu$$

ノ項デアッテ

(6a) $\mathfrak{m}\{\mathfrak{r}[\alpha\rho]\} - \{\mathfrak{r}[\alpha\rho]\}\mathfrak{m} = \frac{1}{2}\frac{hi}{2\pi}[\mathfrak{r}[\alpha\rho]]^{*}$

(6b) $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\alpha\{\mathfrak{r}[\alpha\rho]\} - \{\ \ ''\ \ \}\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\alpha = \frac{1}{2}\frac{hi}{2\pi}[\alpha[\rho\mathfrak{r}]]$

トナリ従ッテ

$$\mathfrak{M}H - H\mathfrak{M} \neq 0$$

即チ total angular momentum $\mathfrak{M}$ ハ conserve セヌ。
然ルニ $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\rho$ ナル項ヲ考ヘテ見ルト、之ハ(5)ノ外ノ項トハ commute シ、且

(6c) $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\rho\{\mathfrak{r}[\alpha\rho]\} - \{\mathfrak{r}[\alpha\rho]\}\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\rho = -\frac{1}{2}\frac{hi}{2\pi}[\rho[\alpha\mathfrak{r}]]$

トナリ、(6a, b, c) ヲ加ヘ合ハスト

$$\{\mathfrak{m}+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\alpha+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\rho\}\{\mathfrak{r}[\alpha\rho]\} - \{\mathfrak{r}[\alpha\rho]\}\{\mathfrak{m}+\cdots+''\} = 0^{\dagger}$$

トナリ。
$\frac{A}{r^3}$ ナル factor モ又明カニ

(7) $\mathfrak{m}+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\alpha+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\rho$

ト commute スルカラ結局 之ハ Hamiltonian ト commute スル。
従ッテ之ヲ total angular momentum ト見ナシ得ル。
nucleus ヲ fixed シタカラ orbital angular momentum ハ勿論0デアルガ spin angular momentum 丈ハ依然トシテ存在シ 其ノ大イサハ electron ト同様 $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ デアルト仮ッテ居ル。
ソレデ 其レハ Dirac ノヤッタノト analogous ニ

$$(\mathfrak{m}+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\alpha+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\rho)^2 = (f^2-\frac{1}{4})(\frac{h}{2\pi})^2$$

トオキ Dirac ノ j ト同様ニ positive or negative integer ヲトル f ナル quantum number ヲ導入シ得ル。
之等ノ新シイ quantum number f ニツイテ selection rule ヲ立テ spectroscopically ニ hyperfine structure ヲ立テタル f ナル quantum no ト ノ関係ヲシラベル必要ガアルガ 後ニ譲ル。

---

* コノ計算ニハ $p_\mu q_\nu - q_\nu p_\mu = \frac{h}{2\pi i}\delta_{\mu\nu}$

† 之ハ $[A[BC]] = B(AC) - C(AB)$ ヨリ明カデアル。

尚 Dirac ノ理論ニヨルト上ニ述ベタ如ク electron ニ magnetic moment ノ他ニ imaginary デハアルガ $\frac{e}{2mc}\frac{h}{2\pi}i\gamma_1\alpha$ ナル electric moment モ持ッテ居ルカラ analogous ニ nucleus ニモ $i\mu\gamma_1\rho$ ナル electric moment ヲモ考ヘルト scalar potential A_0 ニハ更ニ

$$i\mu\gamma_1(\rho\nabla\frac{1}{r})$$

ナル項ヲ加ヘネバナラヌ。
シカシ之ノ項ハ矢張リ

$$\mathfrak{m}+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\alpha+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\rho$$

ト commute スル。

∵ $\mathfrak{m}(\rho\nabla\frac{1}{r}) - (\rho\nabla\frac{1}{r})\mathfrak{m} = -\frac{h}{2\pi}i\frac{[\rho\mathfrak{r}]}{r^3}$

$\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\rho(\rho\nabla\frac{1}{r}) - (\rho\nabla\frac{1}{r})\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\rho = \frac{h}{2\pi}i\frac{[\rho\mathfrak{r}]}{r^3}$

又勿論 $\alpha(\ \ ''\ \ ) - (\ \ ''\ \ )\alpha = 0$

∴ $(\mathfrak{m}+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\alpha+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\rho)(\rho\nabla\frac{1}{r}) - (\ ''\ )(\ ''+''+''\ ) = 0$

シタガッテ仮トヒ nucleus ノ electric moment ヲ考ヘテモ total angular momentum ノ conservation ニ変化ハナイ。
ソノ上コノ term ハ imaginary ノ eigenwert ヲモッテ居ルカラ energy ノ変化ヲ論ズル場合ニハ neglect シテヨイ。

以上述ベタ所ハ nuclear spin ガ一ツノ spin variable ρ デアラハサレル場合デアッタガ更ニ一般的ニ、(4½ トイフ様ナ場合モ考ヘラレナケレバナラヌ) 幾ツカノ互ニ独立ナ spin vector ノ superposition ヲ考ヘテ見ヨウ。
即 $\rho^{(n)}\ (n=1,2,\cdots l)$ ヲ

(8a) $\left\{\begin{array}{ll} (\beta_\mu^{(n)})^2 = 1 & \beta_1^{(n)}\beta_2^{(n)} = i\beta_3^{(n)} = -\beta_2^{(n)}\beta_1^{(n)} \quad \text{etc} \\ \beta_\mu^{(m)}\beta_\nu^{(n)} = \beta_\nu^{(n)}\beta_\mu^{(m)} & \mu,\nu = 1,2,3 \\ \beta_\mu^{(m)}\alpha_\nu = \alpha_\nu\beta_\mu^{(m)} & \end{array}\right.$

ヲ満足スル variables トシ、之等ノ和ヲ magnetic moment ノ大イサヲ

μ_n トスレバ、之ニ對スル field ハ

(5') $$A = \sum_{n=1}^{l} \mu_n \frac{[\beta^{(n)} r]}{r^3}$$

トナリ 從ツテ total angular momentum トシテ

$$\mathfrak{M} + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\sigma + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\sum_n \beta^{(n)}$$

ガ conserve サレルコトニナル。

ソレナラバ實際 $\alpha, \beta^{(n)}, \gamma$ 等ハ explicitly ニアラハスレバイカナル形ヲトレバヨイカトイフニ 之等ハ前ニ (8a) ノ他ニ

(8b) $$\left\{\begin{array}{l} \beta^{(m)}_\mu \gamma_\nu = \gamma_\nu \beta^{(m)}_\mu \\ \alpha_\mu^2 = \gamma_\mu^2 = 1 \qquad \alpha_\mu\gamma_\nu = \gamma_\nu\alpha_\mu \\ \alpha_1\alpha_2 = i\alpha_3 = -\alpha_2\alpha_1 \qquad \gamma_1\gamma_2 = i\gamma_3 = -\gamma_2\gamma_1 \text{ etc} \end{array}\right.$$

~~ヲ満足スル~~ ナル關係ガアルガ、最モ簡單ナ場合トシテ $l=1$ ノ場合ヲ考ヘルト、例ヘバ、

(9) $$\left\{\begin{array}{l} \alpha = \begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix} \\ \beta = \begin{pmatrix}\rho_1 & 0\\ 0 & \rho_1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\rho_2 & 0\\ 0 & \rho_2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\rho_3 & 0\\ 0 & \rho_3\end{pmatrix} \\ \gamma = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \end{array}\right.$$

σ, ρ ハ (2) ノ四行四列ノ matrix

$$1 = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ナル八行八列ノ matrix ヲトレバヨイ。

一般ニ l 個ノ互ニ Vertauschbar ナル spin vector $\beta^{(n)}$ ($n=1,2,\cdots l$) ヲ construct スル方法ハ次ノ如シ。

今 a ナル matrix ガ 2^l 乗個ノ行列ヨリナル square matrix トシ 其ノ element ヲ ~~$a(\mu,\nu)$~~

$$a(\mu,\nu) = a(\mu_1\nu_1, \mu_2\nu_2, \cdots \mu_l\nu_l) \text{ or } a(\mu_1\mu_2\cdots\mu_l; \nu_1\nu_2\cdots\nu_l)$$

デアラハスコトトスル。μ 及ビ ν ハ夫々行及ビ列ヲアラハス數トシ μ's ν's ハ夫々 1 or 2 ノイヅレカノ値ヲトリ 全體トシテ行列ノ順ハ $\mu_1\mu_2\cdots\mu_l$ or $\nu_1\nu_2\cdots\nu_l$ ヲ一ツノ數ト見ナシ小サイ順ニトツタモノトスル。

ソコデ $a(\mu_1\nu_1, \mu_2\nu_2 \cdots \mu_l\nu_l) = \varepsilon_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_2\nu_2}\cdots\delta_{\mu_l\nu_l}$

トナリ。（但シ $\delta_{\mu\nu} = 0$ or 1 according as $\mu \neq \nu$ or ν ）

a^2 ヲツクレバ

$$a(\mu_1\lambda_1, \mu_2\lambda_2 \cdots \mu_l\lambda_l)\,a(\lambda_1\nu_1, \lambda_2\nu_2 \cdots \lambda_l\nu_l)$$
$$= \varepsilon_{\mu_1\lambda_1}\varepsilon_{\lambda_1\nu_1}\cdot\delta_{\mu_2\lambda_2}\delta_{\lambda_2\nu_2}\cdots\delta_{\mu_l\lambda_l}\delta_{\lambda_l\nu_l}$$
$$= \varepsilon_{\mu_1\lambda_1}\varepsilon_{\lambda_1\nu_1}\cdot\delta_{\mu_2\nu_2}\cdots\delta_{\mu_l\nu_l}$$

從ツテ $a^2=1$ 即チ $a(\mu\lambda)a(\lambda,\nu) = \delta_{\mu\nu}$ ナルタメニハ

$$\varepsilon_{\mu_1\lambda_1}\varepsilon_{\lambda_1\nu_1} = \delta_{\mu_1\nu_1}$$

即チ

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}\end{pmatrix}^2 = 1$$

之ニハ Pauli ノ spin variables $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\+i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ ヲトレバヨイ。之等ヲ夫々 $\varepsilon^{(1)}\ \varepsilon^{(2)}\ \varepsilon^{(3)}$ トスレバ、

$$\varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(2)} = i\varepsilon^{(3)} = -\varepsilon^{(2)}\varepsilon^{(1)} \quad \text{etc}$$

ヲ満足スル。

ソコデ

$$\beta^{(m)}_\lambda(\mu,\nu) = \delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_2\nu_2}\cdots\delta_{\mu_{m-1}\nu_{m-1}}\varepsilon^{(\lambda)}_{\mu_m\nu_m}\delta_{\mu_{m+1}\nu_{m+1}}\cdots\delta_{\mu_l\nu_l}$$

トスレバ 之等ガ (8a) ノ式ヲ満足スル spin variables トナル。

之ヲ應用スレバ、$l=2$ ノ時ニハ

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1\,1\,1 & 1\,1\,{-1} & 1\,{-1}\,1 & 1\,{-1}\,{-1} & {-1}\,1\,1 & {-1}\,1\,{-1} & {-1}\,{-1}\,1 & {-1}\,{-1}\,{-1} \\
\hline
1\,1\,1 & 0 & 1 & & & & & & \\
1\,1\,{-1} & 1 & 0 & & & & & & \\
1\,{-1}\,1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\
1\,{-1}\,{-1} & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
{-1}\,1\,1 & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
{-1}\,1\,{-1} & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
{-1}\,{-1}\,1 & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
{-1}\,{-1}\,{-1} & & & & & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{|cc}
\begin{matrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{matrix} & 0 \\
0 & \begin{matrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{matrix}
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}\rho_1 & 0\\ 0 & \rho_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{|cc}
0 & \begin{matrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix} \\
\begin{matrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix} & 0
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

コノ表ヨリ (9) ガ得ラレル。

之ヲ綜スルト wave equation ハ (4) カラ、

$$\psi_B \qquad -z(i\sigma_1+\sigma_2)\}=0$$

$$(10)\begin{cases}(p_0+\frac{e}{c}A_0)\psi_A+\rho_1(\sigma p)\psi_A+\rho_3 mc\psi_A \\ \qquad +\rho_1\frac{e}{c}\frac{\mu}{r^3}(x\sigma_2-y\sigma_1)\psi_A+\rho_1\frac{e}{c}\frac{\mu}{r^3}\{xi\sigma_3+y\sigma_3 \\ (p_0+\frac{e}{c}A_0)\psi_B+\rho_1(\sigma p)\psi_B+\rho_3 mc\psi_B \\ +\rho_1\frac{e}{c}\frac{\mu}{r^3}\{-xi\sigma_3+y\sigma_3+z(i\sigma_1-\sigma_2)\}\psi_A+\rho_1\frac{e}{c}\frac{\mu}{r^3}(-x\sigma_2+y\sigma_1)\psi_B \\ \qquad =0\end{cases}$$

但シ ψA, ψB ハ wave function ノ 8ツノ components ノ 初メノ四ツト 後ノ四ツヲ 代表スルモノトスル。

(10) 式ハ

$$\gamma_1\left(\alpha,\frac{e}{c}\mu\frac{[\mathfrak{p}\mathfrak{r}]}{r^3}\right)=\frac{e}{c}\mu\gamma_1\frac{\mathfrak{r}}{r^3}[\alpha\beta]\ (=H_1\ \text{say})$$

$$=\frac{e}{c}\mu\frac{\gamma_1}{r^3}\{x(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)+y(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)+z(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\}$$

$$=\frac{e}{c}\frac{\mu}{r^3}\begin{pmatrix}\rho_1 & 0\\ 0 & \rho_1\end{pmatrix}\left\{x\begin{pmatrix}\sigma_2 & i\sigma_3\\ -i\sigma_3 & -\sigma_2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-\sigma_1 & \sigma_3\\ \sigma_3 & \sigma_1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0 & -i\sigma_1-\sigma_2\\ i\sigma_1-\sigma_2 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

カラ容易ニ出テクル。

之ノ H_1 ノ項ヲ störung ト考ヘルト. Störung H_1 ノナイ場合ハ ψA, ψB 共ニ Dirac ノ元ノ equation (Hydrogen) ノ solution デアルベシ。之ヲ ψ₀ ト記サウ

ソコデ störung ノナイ場合ノ solution トシテ orthogonal normalised ノ $\Phi_I(\psi_0,0)$ $\Phi_{II}(0,\psi_0)$ ヲトルト störungsenergie ハ

$$\begin{pmatrix}\sum\int\tilde{\Phi}_I H_1\Phi_I & \sum\int\tilde{\Phi}_I H_1\Phi_{II}\\ \sum\int\tilde{\Phi}_{II}H_1\Phi_1 & \sum\int\tilde{\Phi}_{II}H_1\Phi_{II}\end{pmatrix}$$

之ハ $H_1=\begin{pmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{pmatrix}$ ト記シテオクト

$$\begin{pmatrix}\sum\int\tilde{\psi}_0 H_{11}\psi_0 & \sum\int\tilde{\psi}_0 H_{12}\psi_0\\ \sum\int\tilde{\psi}_0 H_{21}\psi_0 & \sum\tilde{\psi}_0 H_{22}\psi_0\end{pmatrix}$$

トナル。

$$H_{11}=\frac{e}{c}\frac{\mu}{r^2}\begin{pmatrix}0&0&0&ie^{-i\varphi}\\0&0&-ie^{i\varphi}&0\\0&ie^{-i\varphi}&0&0\\-ie^{i\varphi}&0&0&0\end{pmatrix}\sin\theta \qquad \begin{pmatrix}&&&-ie^{-i\varphi}\\&&+ie^{i\varphi}&\\&-ie^{-i\varphi}&&\\+ie^{i\varphi}&&&\end{pmatrix}\sin\theta$$

$$H_{12}=\frac{e}{c}\frac{\mu}{r^2}\left\{\begin{pmatrix}0&0&ie^{-i\varphi}&0\\0&0&0&-ie^{-i\varphi}\\ie^{i\varphi}&0&0&0\\0&-ie^{-i\varphi}&0&0\end{pmatrix}\sin\theta+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-2i&0\\0&0&0&0\\-2i&0&0&0\end{pmatrix}\cos\theta\right\}$$

$$H_{21}=\frac{e}{c}\frac{\mu}{r^2}\left\{\begin{pmatrix}0&0&-ie^{i\varphi}&0\\0&0&0&ie^{i\varphi}\\-ie^{i\varphi}&0&0&0\\0&ie^{i\varphi}&0&0\end{pmatrix}\sin\theta+\begin{pmatrix}0&0&0&2i\\0&0&0&0\\0&2i&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cos\theta\right\}$$

$$H_{22}=\frac{e}{c}\frac{\mu}{r^2}\begin{pmatrix}0&0&0&\mp ie^{-i\varphi}\\0&0&ie^{i\varphi}&0\\0&-ie^{-i\varphi}&0&0\\ie^{i\varphi}&0&0&0\end{pmatrix}\sin\theta \qquad \psi_1=-iF_K\begin{pmatrix}&&&ie^{-i\varphi}\\&&-ie^{i\varphi}&\\&ie^{-i\varphi}&&\\-ie^{i\varphi}&&&\end{pmatrix}$$

$k=0$

次ニ Darwin ニ従ッテ $\psi_0(k,u)$ ヲ

$$\psi_0(k,u)\begin{cases}\psi_1=-iF_K P_{K+1}^{u} & \psi_2=-iF_K P_{K+1}^{u+1}\\ \psi_3=(k+u+1)G_K P_K^{u} & \psi_4=(-k+u)G_K P_K^{u+1}\end{cases}$$

従ッテ

$$\tilde{\psi}_0(k,u)\begin{cases}\tilde{\psi}_1=iF_K P_{K+1}^{u} & \tilde{\psi}_2=iF_K \tilde{P}_{K+1}^{u+1}\\ \tilde{\psi}_3=(k+u+1)G_K\tilde{P}_K^{u} & \tilde{\psi}_4=(-k+u)G_K\tilde{P}_K^{u+1}\end{cases}$$

トナルカラ。先

$$\begin{pmatrix}\sum\int\tilde{\Phi}_I(k,u)H_1\Phi_I(k,u) & \sum\int\tilde{\Phi}_I H_1\Phi_{II}\\ \sum\int\tilde{\Phi}_{II}H_1\Phi_I & \sum\int\tilde{\Phi}_{II}H_1\Phi_{II}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\int\tilde{\psi}_0 H_{11}\psi_0 & \sum\int\tilde{\psi}_0 H_{12}\psi_0\\ \sum\int\tilde{\psi}_0 H_{21}\psi_0 & \sum\int\tilde{\psi}_0 H_{22}\psi_0\end{pmatrix}$$

二行 ~~=0~~ :

次ニ $\Phi_I(k,u)$ ト $\Phi_I(k,u+1)$ ノ coupling ヲ考ヘル.

$$\psi_0(k,u+1)=\begin{cases}\psi_1=-iF_kP_{k+1}^{u+1} & \psi_2=-iF_kP_{k+1}^{u+2}\\ \psi_3=(k+u+2)P_k^{u+1} & \psi_4=(-k+u+1)G_kP_k^{u+2}-\end{cases}$$

$$\sum\tilde{\Phi}_IH_1\Phi_I=\sum\tilde{\psi}_0H_{11}\psi_0=iF_k\tilde{P}_{k+1}^{u}(-k+u)G_kP_k^{u+1}ie^{-i\varphi}\sin\theta$$
$$+iF_k\tilde{P}_{k+1}^{u+1}(k+u+1)G_kP_k^{u}(-i)e^{i\varphi}\sin\theta$$
$$+(k+u+1)G_k\tilde{P}_k^{u}(-i)F_kP_{k+1}^{u+1}ie^{-i\varphi}\sin\theta$$
$$+(-k+u)G_k\tilde{P}_k^{u+1}(-i)F_kP_{k+1}^{u}(-i)e^{i\varphi}\sin\theta$$
$$=(k-u)F_kG_k(\tilde{P}_{k+1}^{u}P_k^{u+1}e^{-i\varphi}+\tilde{P}_k^{u+1}P_{k+1}^{u}\}e^{i\varphi})\sin\theta$$
$$+(k+u+1)F_kG_k(\tilde{P}_{k+1}^{u+1}P_k^{u}e^{i\varphi}+\tilde{P}_k^{u}P_{k+1}^{u+1}e^{-i\varphi})\sin\theta$$

$$\therefore\int\cdots=\int\frac{e}{c}\frac{\mu}{r^2}F_kG_kr^2dr\Big[-2(k-u)\frac{4\pi}{(2k+3)(2k+1)}(k+u+1)!(k-u+1)!$$
$$+2(k+u+1)\frac{4\pi}{(2k+3)(2k+1)}(k+u+2)!(k-u)!\Big]$$
$$=\int\frac{e}{c}\mu F_kG_kdr\frac{8\pi}{(2k+3)(2k+1)}(k+u+1)!(k-u)!\big[-(k-u)(k-u+1)$$
$$+(k+u+1)(k+u+2)\big]$$
$$=\int\frac{e}{c}\mu F_kG_kdr\frac{16\pi(k+1)}{(2k+3)(2k+1)}(2u+1)(k+u+1)!(k-u)!$$
$$=\frac{\int\frac{e}{c}\mu F_kG_kdr}{\int(F_k^2+G_k^2)r^2dr}\frac{4(k+1)}{(2k+3)(2k+1)}(2u+1)$$

$16\pi(k+u+1)!(k-u)!$

$u=-1$

$k=0.$

其ノ他ノ項ハ 0.

$$\sum\tilde{\Phi}_I(u)H_1\Phi_{II}(u+1)=\sum\tilde{\psi}_0(u)H_{12}\psi_0(u+1)$$
$$=F_kG_k\Big\{\frac{4\pi}{(2k+3)(2k+1)}\Big\{(k+u+1)!(k-u+1)!(k+u+2)$$
$$+(k-u-1)(k+u+2)!(k-u)!+(k+u+1)(k+u+2)!(k-u)!$$
$$+(k-u)(k+u+3)!(k-u-1)!+2(k+u+2)(k+u+2)!(k-u)!$$
$$+2(k-u)(k+u+2)!(k-u)!$$
$$=F_kG_k\frac{4\pi\cdot8(k+1)}{(2k+3)(2k+1)}\cancel{(k+u+2)!(k-u)!}$$
$$\overline{4\pi(k+u+1)!(k-u-1)!\sqrt{(k+u+2)(k-u)}}$$
$$\int(F_k^2+G_k^2)r^2dr$$
$$=\frac{F_kG_k}{\int(F_k^2+G_k^2)r^2dr}\frac{8(k+1)}{(2k+3)(2k+1)}\sqrt{(k+u+2)(k-u)}$$
$$\sqrt{(j\pm u\pm1)(j+u+1)}$$

其ノ他ノ項ハ 0,

ソシテ Energy 変化ヲ与ヘル式ハ $\Phi_I(u)$, $\Phi_{II}(u+1)$ ノ間デ

$$\begin{vmatrix}(2u+1)-\varepsilon & 2\sqrt{(k+u+2)(k-u)}\\ 2\sqrt{(k+u+2)(k-u)} & +(2u+3)-\varepsilon\end{vmatrix}=0$$

カラ求メラレル。

即チ $\varepsilon=-(2K+1)$ or $\cancel{+}(2K+3)$ $-(2j-1)$

$(2(k+1)+1)$

$$\frac{4(k+1)}{4j^2}$$
$$(2j+1)(2j-1)$$
$$=\boxed{\frac{4j^2}{4j^2-1}}$$
$$\frac{4(k+1)^2}{(2k+3)(2k+1)}$$

ソレデ Eigenfunction ~~ハ~~ ヲ

$$\beta_{11}\Phi_I(u)+\beta_{12}\Phi_{II}(u+1)=$$
$$\beta_{21}\Phi_I(u)+\beta_{22}\Phi_{II}(u+1)$$

$j=-(k+1)$

$j=-1$	$K=0.S$		$\boxed{\frac{4}{3}}$
$j=-2$	$K=1$	$2P_{3/2}$	$\frac{16}{15}$
$j=1$	$K=-~~2~~$	$2P_{1/2}$	$\frac{4}{13}$

ゆえに.

$$\{(2u+1)+(2k+1)\}\beta_{11}+2\sqrt{(k+u+2)(k-u)}\,\beta_{12}=0$$

$$\{(2u+1)\,\underline{\pm}(2k+3)\}\beta_{21}+2\sqrt{(k+u+2)(k-u)}\,\beta_{22}=0$$

ここで.

$$\Psi_A=\sqrt{k+u+2}\;\Psi_I(u)\mp\sqrt{k-u}\;\Psi_{II}(u+1)\qquad \varepsilon_1=\pm 2k+1$$

$$\Psi_B=\sqrt{k-u}\;\Psi_I(u)+\sqrt{k+u+2}\;\Psi_{II}(u+1)\qquad \varepsilon_2=-(2k+3)$$

$k=0$ $\qquad \varepsilon_1 \mp 1$ $\qquad \varepsilon_2=+3$

$\Psi_{II}(-1)$

$\Psi_I(-1)\,\underline{\pm}\,\Psi_{II}(0)$ $\qquad \Psi_I(-1)+\Psi_{II}(0)$

$\Psi_I(0)$

$k=1$ $\qquad \varepsilon_1=\mp 3$ $\qquad \varepsilon_2=\pm 5$

$\Psi_{II}(-2)$

$\Psi_I(-2)\mp\sqrt{3}\,\Psi_{II}(-1)$ $\qquad$ ~~$\sqrt{3}\,\Psi_I(-2)+\Psi_{II}(-1)$~~

○ $\sqrt{2}\,\Psi_I(-1)\mp\sqrt{2}\,\Psi_{II}(0)$ $\qquad$ ~~$\sqrt{2}\,\Psi_I(-1)+\sqrt{2}\,\Psi_{II}(0)$~~

$\sqrt{3}\,\Psi_I(0)\mp\Psi_{II}(1)$ $\qquad$ ~~$\Psi_I(0)+\sqrt{3}\,\Psi_{II}(1)$~~

$\Psi_I(1)$