原子 spectra ノ hyperfine structure ハ多クノ場合原子核ノ spin ガ電子ノ運動ニ及ボス影響ニヨルモノトシテ説明サレル。Hargreaves ハ之ヲ Pauli-Darwin ノ spinning electron ノ理論ニヨツテ、量子力学的ニ計算シタガ、最モ重要ナ場合デアル s-level ノ separation ニ就スル計算ニハ Dirac ノ相対論的ナ波動方程式ヲ使フ必要ガアツタ。ソレデコノ問題ヲ最初カラ Dirac ノ理論ヲ用キテ計算スレバドウナルカトイフコトガ考ヘラレルワケデアルガ、原子核ト電子トノ二体問題ヲ厳密ニ相対律的ニ解クコトハ現在ニ於テ非常ニ困難デアルカラ、近似トシテ電子ハ Dirac 的ニ、原子核ハ Pauli-Darwin 的ニ考ヘテ計算ヲ~~简~~ ~~子ニ又ル他ハナイノデアル~~ シテ見タ。実際核ノ質量ガ大デ速度ガ小デアルカラ、カク仮定シテモ大ナル誤差ハ起ラヌ苦デアル。其ノ後最近 Fermi ガ同様ノ計算ヲヤツテ居ルコトヲ気付タカラ、コレト重複スル部分ハ止メテ、total angular momentum ノ conservation ニツイテ述ベルニ止メテオク。

Fermi ト同ジ notation ヲ使フト、Dirac ノ relativistic Hamiltonian ハ

$$H = -eV + c\,\alpha\left(p - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right) + \beta mc^2$$

トナル。

但シ、

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

β, α ハ一般ニ

$$\beta^2 = \alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = 1 \qquad \alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x = 0 \ \text{etc.} \qquad \alpha_x\beta + \beta\alpha_x = 0 \ \text{etc}$$

ナル関係ヲ満足シ得ルトトリウル。

又 ~~$\alpha = \rho_1\sigma$~~ ~~$\alpha_x = \rho_1\sigma_1$~~ $\alpha_y = \rho_1\sigma_2$ $\alpha_z =$

$$\rho_1\rho_2 = i\rho_3 = -\rho_2\rho_1 \qquad \rho_2\rho_3 = i\rho_1 = -\rho_3\rho_2 \qquad \rho_3\rho_1 = i\rho_2 = -\rho_1\rho_3$$

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1 \qquad \text{etc}$$

$$\rho_i\sigma_k = \sigma_k\rho_i \qquad \rho_i^2 = \sigma_k^2 = 1.$$

ナル関係ヲ有スル二組ノ matrises ρ, σ ヲ用ヒレバ、之ヲハ又

$$\alpha_x = \rho_1\sigma_1 \quad \alpha_y = \rho_1\sigma_2 \quad \alpha_3 = \rho_1\sigma_3 \qquad \beta = \rho_3$$

トシテアラハシ得ル。

skalar potential V ガ radius ノミニ depend シテ居ル Alkali atom 等ノ場合ニ於テ vector potential $\mathfrak{A} = 0$ ノ時ニハ orbital angular momentum $\mathfrak{m} = [\mathfrak{r} \times \mathfrak{p}]$ ト spin angular momentum $\frac{h}{4\pi}\sigma$ トノ和 $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} + \frac{h}{4\pi}\sigma$ ハ conserve スル

即チ

$$\mathfrak{M}H - H\mathfrak{M} = 0$$

トナル。但シ $[\mathfrak{r} \times \mathfrak{p}]$ ハ $\mathfrak{r}$ ト $\mathfrak{p}$ ノ vector product ヲアラハスモノトスル。

依ツテ Nucleus ガ magnetic moment μ ヲ有シテ居レバ、ソノ component ヲ

μ_x, μ_y, μ_z トシテソノ Eigenwert ガ

$$\mu,\ \mu\frac{K-1}{K},\ \mu\frac{K-2}{K},\ \dots\ -\frac{\mu(K-1)}{K},\ -\mu$$

デ

$$\mu_y\mu_z-\mu_z\mu_y = i\frac{\mu}{K}\mu_x \quad etc$$

$$\text{or}\quad [\mu\times\mu] = i\frac{\mu}{K}\mu$$

ヲ満足シ、~~M 値~~ 且 μ ハ r, p, α, β (従テ or ρ, σ) ト commute スルト假定シテオク。

~~Nucl~~ Nucleus ノ magnetic moment ニヨル field ノ vector potential

$$\mathfrak{A} = \frac{[\mu\times r]}{r^3}$$

デアラハサレル。

ソコデ今 $\qquad MH - HM$ ヲ考ヘテ見ルニ、M ハ $\mathfrak{A}$ 以外ノ項トハ commute スルカラ、

$$MH - HM = -e\rho_1\left\{M\frac{\sigma[\mu\times r]}{r^3} - \frac{\sigma[\mu\times r]}{r^3}M\right\}$$

然ルニ $\quad \sigma[\mu\times r] = \mu[r\times\sigma] = r[\sigma\times\mu]$

デ

$$m\{r[\sigma\times\mu]\} - \{r[\sigma\times\mu]\}m = \frac{h}{2\pi i}[r\times[\sigma\times\mu]]$$

$$\frac{h}{4\pi}\sigma\{\sigma[\mu\times r]\} - \{[\mu\times r]\sigma\}\frac{h}{4\pi}\sigma = \frac{h}{2\pi i}[\sigma\times[\mu\times r]]$$

トナル。

トナル。

$\because\quad \{yp_z - zp_y\}\{x(\sigma_y\mu_z-\sigma_z\mu_y) + y(\sigma_z\mu_x-\sigma_x\mu_z) + z(\sigma_x\mu_y-\sigma_y\mu_x)\}\{yp_z-zp_y\}$

$-\{x(\sigma_y\mu_z-\sigma_z\mu_y) + y(\sigma_z\mu_x-\sigma_x\mu_z) + z(\sigma_x\mu_y-\sigma_y\mu_x)\} = \frac{h}{2\pi i}[r\times[\sigma\times\mu]]_x$

$= \frac{h}{2\pi i}\{y(\sigma_x\mu_y-\sigma_y\mu_x) - z(\sigma_z\mu_x-\sigma_x\mu_z)\}\quad$ ~~xp~~ $p_x x - x p_x = \frac{h}{2\pi i}1 \quad etc$

~~従ヒ之ノ計算ニハ~~ $\quad yp_z - p_z y = 0 \quad etc.$

~~ヲ用キル。~~ ヲ用ヰレバ $\quad \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2i\sigma_z \quad etc$ ヲ使ッテ

又 $\quad \frac{h}{4\pi}\sigma_x\{\sigma_x[\mu\times r]_x + \sigma_y[\mu\times r]_y + \sigma_z[\mu\times r]_z\}$

$-\{\sigma_x[\mu\times r]_x + \sigma_y[\mu\times r]_y + \sigma_z[\mu\times r]_z\}\frac{h}{4\pi}\sigma_x$

$= 2i\frac{h}{4\pi}\{\sigma_y[\mu\times r]_z - \sigma_z[\mu\times r]_y\} = \frac{h}{2\pi i}[\sigma\times(\mu\times r)]_x$

$$\therefore\quad MH - HM = -e\rho_1\frac{h}{2\pi i}\frac{\{[r\times[\sigma\times\mu]] + [\sigma\times[\mu\times r]]\}}{r^3}$$

$$\neq 0$$

故ニ M ハ conserve シナイ。

ソコデ $\quad \frac{h}{2\pi}\mu$ ヲ考ヘルト、$\mathfrak{A}$ 以外ノ項トハ commute シ

$$\frac{h}{2\pi}\mu\{\mu[r\times\sigma]\} - \{\mu[r\times\sigma]\}\mu = \frac{h}{2\pi i}\frac{\mu}{K}\{\mu\{r\times\sigma]\}$$

トナル。

∵ μ_z ニ関スル Vertauschungsrelation カラ、

$$\frac{h}{2\pi}\mu_x\{\mu_x[r\times\sigma]_x+\mu_y[r\times\sigma]_y+\mu_z[r\times\sigma]_z\}$$

$$-\{\qquad\qquad\}\frac{h}{2\pi}\mu_x$$

$$=\frac{h}{2\pi}(-i)\frac{\mu}{\kappa}\{\mu_y[r\times\sigma]_z-\mu_z[r\times\sigma]_y\}$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\frac{\mu}{\kappa}[\mu\times[r\times\sigma]]_x$$

シカルニ $[r\times[\sigma\times\mu]]+[\sigma\times[\mu\times r]]+[\mu\times[r\times\sigma]]$

$$=\sigma(r\mu)-\mu(r\sigma)+\mu(\sigma r)-r(\sigma\mu)$$

$$+r(\mu\sigma)-\sigma(\mu r)=0.$$

$$\therefore\ \left(M+\frac{h}{4\pi}\sigma+\frac{h}{2\pi}\frac{\kappa}{\mu}\mu\right)H-H\left(M+\frac{h}{4\pi}\sigma+\frac{h}{2\pi}\frac{\kappa}{\mu}\mu\right)=0$$

即チ $M+\frac{h}{2\pi}\frac{\kappa}{\mu}\mu$ ハ conserve スル。之ヲ total angular momentum ト考ヘ、$\frac{h}{2\pi}\frac{\kappa}{\mu}\mu$ ヲ nucleus ノ spin angular momentum ト考ヘルコトガ出来ル。