Zu Dirac's Theorie des Kreiselelektrons

A. Landé

§ 1 Die von Dirac entwickelte Wellenmechanik des rotierenden Elektrons ist besonders deswegen so überzeugend, weil sie gegenüber der früheren Theorie des Punktelektrons keine Komplizierung, sondern eher eine Vereinfachung durch Reduktion der früheren Wellengleichung zweiter Ordnung auf solche erste Ordnung bringt. Diracs Gleichungssystem für die vier gekoppelten Wellenfunktionen ψ_1 bis ψ_4 lautet:

$$\left\{ i \sum_k \gamma_k \left(p_k + \frac{\varepsilon}{c} \Phi_k\right) + \mu c, \psi_\zeta \right\} = 0 \qquad (\zeta = 1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

Die darin vorkommenden vier Operatoren γ_1 bis γ_4 sind mit den Koordinaten x_k, den Impulsen p_k und den Potentialkomponenten Φ_k vertauschbar, sollen jedoch bei Ausübung auf ψ_ζ das Resultat

$$\{\gamma_k \psi_\zeta\} = \sum_{\zeta'} \gamma_k^{\zeta\zeta'} \cdot \psi_{\zeta'} \qquad (2)$$

ergeben; die konstanten Koeffizienten $\gamma_k^{\zeta\zeta'}$ sind dabei gewisse Matrixkomponenten, durch deren nähere Angabe erst die Koppelungsoperatoren γ_k in (2) definiert sind. Für die γ_k wird verlangt

$$\left.\begin{aligned} (\gamma_k)^2 &= 1 \quad (= \text{Einheitsmatrix}) \\ \gamma_k \gamma_l &= -\gamma_l \gamma_k \qquad \text{für} \quad k \neq l \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wodurch die Invarianz der Wellengleichung (1) gegenüber Lorentztransformationen garantiert ist.

Dirac selbst hat seine Theorie mit Hilfe spezieller γ-Matrizen*) durchgeführt, welche etwas unnatürliche Realitätseigenschaften besitzen, γ_1 und γ_3 imaginär, γ_2 und γ_4 reell. Man wird im Sinne der Relativitätstheorie lieber $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ reell und nur γ_4 imaginär annehmen wollen, um größere Symmetrie zu erreichen. Wir möchten deshalb an Stelle von Dirac zunächst folgende Koppelungsmatrizen betrachten, die ebenfalls den Bedingung (3) genügen:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1 &= \begin{Bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & +1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix} \qquad
\gamma_2 = \begin{Bmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & +1 \end{Bmatrix} \\
\gamma_3 &= \begin{Bmatrix} \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ +1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +1 & \cdot & \cdot \end{Bmatrix} \qquad
\gamma_4 = \begin{Bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -i \\ \cdot & \cdot & -i & \cdot \\ \cdot & +i & \cdot & \cdot \\ +i & \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Sie haben, ebensowie Dirac's γ, die hermitesche Eigenschaft*

$$\gamma_k^{\zeta\zeta'} = \tilde{\gamma}_k^{\zeta'\zeta},$$

wo $\sim$ den Übergang zum konjugiert komplexen bedeutet.

Die Definition des Operators $\mathfrak{G}$ durch

$$\mathfrak{G}_{kl} = \frac{h}{2i\pi}\gamma_k\gamma_l = -\frac{h}{2i\pi}\gamma_l\gamma_k \quad \text{und} \quad \{\mathfrak{G}_{kl}\psi_\zeta\} = \Sigma_{\zeta'}\,\mathfrak{G}_{kl}^{\zeta\zeta'}\psi_{\zeta'} \qquad (5')$$

gibt im einzelnen mit Hilfe von (4) die Matrizen

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{G}_{23} &= \frac{h}{2\pi}\begin{Bmatrix} \cdot & \cdot & -i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -i \\ +i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +i & \cdot & \cdot \end{Bmatrix} &
\mathfrak{G}_{31} &= \frac{h}{2\pi}\begin{Bmatrix} \cdot & i & \cdot & \cdot \\ -i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -i \\ \cdot & \cdot & i & \cdot \end{Bmatrix} \\
\mathfrak{G}_{12} &= \frac{h}{2\pi}\begin{Bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -i \\ \cdot & \cdot & i & \cdot \\ \cdot & -i & \cdot & \cdot \\ i & \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix} &
\mathfrak{G}_{14} &= \frac{h}{2\pi}\begin{Bmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & +1 \end{Bmatrix} \\
\mathfrak{G}_{24} &= \frac{h}{2\pi}\begin{Bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix} &
\mathfrak{G}_{34} &= \frac{h}{2\pi}\begin{Bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \end{Bmatrix}
\end{aligned}\right\} \quad (5'')$$

Unabhängig von der speziellen γ-Wahl ist nach (3), (4) und (5) allgemein

$$\mathfrak{G}_{kl}^{\zeta\zeta'} - \tilde{\mathfrak{G}}_{kl}^{\zeta'\zeta} = \frac{h}{2\pi i}\left[(\gamma_k\gamma_l)^{\zeta\zeta'} + (\widetilde{\gamma_k\gamma_l})^{\zeta'\zeta}\right] = \frac{h}{2\pi i}\Sigma_\alpha\left[\gamma_k^{\zeta\alpha}\gamma_l^{\alpha\zeta'} + \gamma_k^{\alpha\zeta'}\gamma_l^{\zeta\alpha}\right]$$
$$= \frac{h}{2\pi i}(\gamma_k\gamma_l + \gamma_l\gamma_k)^{\zeta\zeta'} = 0$$

d.h. $\mathfrak{G}_{kl}$ sind hermitisch; ferner ist allgemein nach (3) und (5)

$$(\mathfrak{G}_{kl})^2 = \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2\cdot\gamma_k\gamma_l\cdot\gamma_k\gamma_l = -\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2\gamma_k\gamma_k\gamma_l\gamma_l = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\cdot 1 \qquad (6')$$

und schließlich die Diagonalsumme

$$\Sigma_\zeta\,\mathfrak{G}_{kl}^{\zeta\zeta'} = \frac{h}{2\pi i}\Sigma_\zeta\Sigma_{\zeta'}\gamma_k^{\zeta\zeta'}\gamma_l^{\zeta'\zeta} = \frac{h}{2\pi i}\frac{1}{2}\Sigma_\zeta\Sigma_{\zeta'}\left(\gamma_k^{\zeta\zeta'}\gamma_l^{\zeta'\zeta} - \gamma_l^{\zeta\zeta'}\gamma_k^{\zeta'\zeta}\right)$$
$$= 0 \qquad (6'')$$

Führt man die Beziehung

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G}_{23} &= \mathfrak{Q}_x \;\;-\!- \;\; \mathfrak{G}_{14} = i\,\mathfrak{P}_x, \\ \mathfrak{M}_{23} &= \mathfrak{H}_x \;\;-\!- \;\; \mathfrak{M}_{14} = -i\,\mathfrak{E}_x \quad (\mathfrak{M} = \mathrm{Rot}\,\Phi) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

ein, so läßt sich nach Dirac die Wellengleichung (1) auf die Form

$$\left\{\Sigma_k\left(p_k + \frac{\varepsilon}{c}\Phi_k\right)^2 + \mu^2c^2 + \frac{\varepsilon}{c}(\mathfrak{M}\mathfrak{G}),\ \psi_\zeta\right\} = 0$$

$$p_k = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{M}\mathfrak{G} = \mathfrak{M}_{23}\mathfrak{G}_{23} + \cdots = (\mathfrak{H}\mathfrak{Q}) + (\mathfrak{E}\mathfrak{P}) \qquad (9)$$

Bei Diracs Wahl der γ ergab sich ein magnetisches Moment $\mathfrak{Q}$ mit reellem Operator $\mathfrak{Q}_x$, imaginärem $\mathfrak{Q}_y$ und reellem $\mathfrak{Q}_z$, ein elektrisches Moment $\mathfrak{P}$ mit imaginärem $\mathfrak{P}_x$, reellem $\mathfrak{P}_y$, imaginärem $\mathfrak{P}_z$. Dagegen sind hier $\mathfrak{Q}_x\,\mathfrak{Q}_y\,\mathfrak{Q}_z$ reell, $\mathfrak{P}_x\mathfrak{P}_y\mathfrak{P}_z$ imaginär; hier wie bei Dirac wird nach (6')

$$\mathfrak{Q}_x^2 = \mathfrak{Q}_y^2 = \mathfrak{Q}_z^2 = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\cdot 1 = -\mathfrak{P}_x^2 = -\mathfrak{P}_y^2 = -\mathfrak{P}_z^2 \quad \text{-- } (10)$$

so daß sich an Diracs physikalischen Folgerungen nichts ändert. — Zu den allgemeinen Gleichungen (3) (6') (6'') (10) führen alle die Matrizen γ', welche aus dem γ durch eine vierdimensionale „Drehung“

$$\gamma_k' = \Sigma_j \alpha_{kj} \gamma_j \qquad (\Sigma_j \alpha_{kj} \alpha_{lj} = \delta_{kl} = \Sigma_j \alpha_{jk} \alpha_{jl}) \quad (11)$$

entstehen (diese Transformation soll nur auf die γ, nicht auf die Koordinaten x_1 bis x_4 ausgeübt werden). Die dabei resultierenden Matrizen G_π sind im allgemeinen verschieden von den G_π. Die besonderen G_π haben also, im Gegensatz zu den G_π^2, keine physikalische invariante Bedeutung, ebensowenig wie die besonderen γ.

Eine Minkowskische Drehung des Koordinatensystems allein bei festgehaltenen Koppelungsoperatoren γ führt zu Wellengleichungen in den neuen Koordinaten x_k' von der Form

$$\{ i \Sigma_j \gamma_j \Sigma_k (\alpha_{kj} p_k' + \tfrac{\varepsilon}{c} \alpha_{kj} \Phi_k') + \mu c, \Psi_\zeta \}$$
$$= \{ i \Sigma_k \gamma_k' (p_k' + \tfrac{\varepsilon}{c} \Phi_k') + \mu c, \Psi_\zeta \} = 0$$

mit Operatoren γ', welche aus dem γ durch die Drehungsformation (11) entstehen. Eine Transformation der γ allein, bei festgehaltenem Koordinatensystem, welche zu den Gleichungen

$$\{ i \Sigma_k \gamma_k' (p_k + \tfrac{\varepsilon}{c} \Phi_k) + \mu c, \Psi_\zeta \} = 0$$

führt, ist somit äquivalent einer inversen Transformation der Koordinaten allein. Wenn also nach bekannten Sätzen bei einer kanonischen Transformation der Koordinaten die Matrixenelemente eines Operators invariant sind, so sind sie auch invariant beim Übergang zu neuen γ' bei unveränderten Koordinaten.