©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

YHAL
E07 104 U03

S 809 → 838

(25. 10. 1927)

Über eine neue Begründung der Quantenmechanik

P. Jordan.

I. Teil.

§ 1. Einleitung. Nach Schrödinger ist einer Hamiltonschen Funktion $H(p,q)$ eine Schwingungsgleichung

$$\left\{ H\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial q}, q\right) - W \right\} \varphi(q) = 0, \quad \varepsilon = \frac{h}{2\pi i} \tag{1}$$

zuzuordnen.

Sie steht in Korrespondenz zur klassischen Hamilton Jacobischen Gleichung, was besonders anschaulich wird, wenn man statt φ die Größe

$$S = \varepsilon \ln \varphi \tag{2}$$

einführt; man erhält dann aus (2) die Gleichung

$$\left\{ H\left(\frac{\partial S}{\partial q} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial q}, q\right) - W \right\} \cdot 1 = 0 \tag{3}$$

(eingeklammerter Operator angewandt auf die Zahl 1 gibt Null), die für $h \to 0$ in die Hamilton-Jacobische Gleichung übergeht.

Für die Durchführung der Theorie muß vorausgesetzt werden, daß (1) eine selbstadjungierte Gleichung ist. Dies möchte zunächst für eine sehr spezielle Bedingung angesehen werden; die folgenden Betrachtungen lassen jedoch erkennen, daß sie vollkommen übereinstimmt mit der ~~Wohl~~ wohlbekannten in der Matrizentheorie (bzw. ihren Verallgemeinerungen) auftretenden Beding. dafür, daß die Energiefunktion $H(p,q)$ "hermitisch" oder „reell" ist.

Die formalen Ergebnisse der folgenden Arbeit sind zum Teil auch von Herrn F. London aufgefunden und in einer Arbeit, die nach ~~aus~~ Anschluß meines Manuskripts erschien, in sehr klarer und durchsichtiger Form dargestellt. Es schien jedoch in Rücksicht auf den Zusammenhang des Ganzen untunlich, nachträglich Kürzung einiger Stellen vorzunehmen — (Zusatz bei der Korrektur). Im wesentlichen dieselben Tatsachen, die in dieser Arbeit erläutert sind, finden sich von einer etwas anderen Seite aus betrachtet, in einer im Erscheinen begriffenen Arbeit von Herrn P. A. M. Dirac.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

Ich habe mir die folgende Frage vorgelegt: Statt der p, q mögen durch eine kanonische Transformation neue Veränderliche P, Q eingeführt werden, wobei $H(p,q) = \bar{H}(P,Q)$ werden möge, dann wollen wir mit $\bar{H}$ die neue Wellengleichung

$$\left\{\bar{H}\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, x\right) - W\right\}\psi(x) = 0 \qquad (4)$$

bilden. Wir erhalten so zu jeder kanonischen Transformation ein besonderes $\psi(x)$. Wie verhalten sich diese $\psi(x)$ zu der ursprünglichen Funktion $\varphi(q)$? Die Beantwortung dieser Frage wird sich aus den späteren Betrachtungen ergeben.

Ihre Untersuchung führte zur Feststellung sehr allgemeiner formaler Zusammenhänge in den quantenmechanischen Gesetzen, welche die in den bisherigen Formulierungen niedergelegten formalen Tatsachen als spezielle Fälle in sich enthalten. Dabei ergab sich auch eine engere Verbindung zwischen den verschiedenen bislang entwickelten Darstellungen der Theorie. Bekanntlich ist die Quantenmechanik in vier verschiedenen, selbständigen Formen entwickelt worden; außer der ursprünglichen Matrizentheorie liegen vor die Theorie von Born und Wiener, die Wellenmechanik und die Theorie der q-Zahlen. Die Beziehungen der letzteren drei Formulierungen zur Matrizentheorie sind bekannt; jede Formulierung führt zu den gleichen Endformeln wie die Matrizentheorie, soweit diese selber reicht. Dabei standen jedoch die ~~D~~ drei späteren Formulierungen untereinander ohne eigentliche innere Verbindung dar; es fehlte sogar der allgemeine Beweis, daß sie auch dort, wo sie über die Matrizentheorie hinausgehen, zu äquivalenten Ergebnissen führen.

Die in dieser Arbeit dargestellte Theorie enthälte alle vier Formulierungen in sich als sehr spezielle Fälle und stellt ihre inneren Wechselbeziehungen klar. Wir beziehen uns der Einfachheit halber bei allen Erörterungen auf Systeme von nur einem Freiheitsgrad. Die vorzuführenden Betrachtungen können jedoch sofort auf System von beliebig vielen Freiheitsgraden verallgemeinert werden.

Die gewonnenen Einsichten in die formalen Zusammenhänge der Theorie ermöglichten auch die quantitative~~n~~ Fassung und Weiterentwicklung einer von Pauli stammenden Idee, durch welche der ~~Sin~~ eigentliche physikalische Sinn der quantenmech. Gesetze in ein neues Licht gerückt wird. Im engen Anschluß an den Paulischen Gedanken soll hier versucht werden, die quantenmech. Gesetze als Folgerungen einiger einfacher statistischer Annahmen zu begründen. Pauli hat im Anschluß an Überlegungen von Born[1]) folgende physikalischer Deutung der Schrödingerschen Eigenfunktionen vorgeschlagen[2]): Ist $\varphi_n(q)$ normiert, so gibt

$$|\varphi_n(q)|^2 dq \qquad (5)$$

die Wahrscheinlichkeit an, daß, wenn das System sich im Zustand n befindet, die Koordinate q einen Wert im Intervall $q, q+dq$ besitzt.

Diese Deutung ist eng verwandt mit Borns Deutung der Lösung $\sum_n c_n(t)\varphi_n(q)$ der vom Parameter W befreiten Schrödingerschen~~-~~gleichung; Born nimmt an, daß

$$|c_n(t)|^2 \qquad (6)$$

die Wahrscheinlichkeit sei, daß zur gegebenen Zeit t das System im n-ten Zustand ist. Beide Deutungen sind physikalisch so unmittelbar einleuchtend und naturgemäß, daß eine ausführlichere Erläuterung überflüssig scheint. Sie sind auch beide enthalten in der allgemeinen statistischen Deutung der Quantenmechanik, die wir im folgenden entwickeln.

Pauli hat folgende Verallgemeinerung ins Auge gefaßt: Es seien q, β zwei hermitsche quantenmechanische Größen, die wir hier der Bequemlichkeit halber beide als stetig veränderlich annehmen wollen; dann wir es stets eine Funktion $\varphi(q, \beta)$ geben, derart, daß

1) M. Born 38 S. 803 . 40 167
2) W. Pauli, Anmerkung in einer im Druck befindlichen Arbeit über Gasentartung.

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室所蔵 湯川秀樹史料(中間子論関係)
E07 104 U03

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

1) Eine direkte Komposition der Wahrscheinlichkeiten selber anstatt ihrer Amplituden, entsprechend der gewöhnlichen Wahrscheinlichk.rech, ergibt sich in zwei Klassen von Spezialfällen, nämlich erstens bei Vorhandsein von Inkohärenzen [M. Born, Zs. f. Phys. 40 167, 1926; P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) 112, 661, 1926] und zweitens bei Resonanz (W. Heisenberg; P. Jordan)

$$|\varphi(q_0, p_0)|^2 dq \qquad (7)$$

die (relative) Wahrscheinlichkeit mißt, daß bei gegebenem Zahlenwert p_0 von p die Größe q einen Zahlenwert im Intervall q_0, q_0+dq besitzt. Die Funktion $\varphi(q,p)$ wird von Pauli als Wahrscheinlichkeitsamplitude bezeichnet. Man wird dabei erwarten müssen:

Postulat I: Die Funktion $\varphi(q,p)$ ist unabhängig von der mech. Natur (der Hamiltonfunktion) des Systems und nur durch die kinemat. Beziehung zwischen q und p bestimmt.

Postulat II: Ist $\psi(Q_0, q_0)$ die Wahrsch.amplitude für einen Zahlwert Q_0 von Q bei vorgegebenem $q=q_0$, so wird die Amplitude $\Phi(Q_0, p_0)$ für ein gewisses Q_0 bei vorgegebenem p_0 gleich

$$\Phi(Q_0, p_0) = \int \psi(Q_0, q)\,\varphi(q, p_0)\, dq. \qquad (8)$$

wobei die Integration über den ganzen Wertebereich von q zu erstrecken ist.

Der Umstand, daß sonach nicht die Wahrscheinlichkeiten selbst, sondern ihre Amplituden dem gewöhnlichen Kombinationsgesetz der Wahrsch.rechnung folgen, kann passend als Interferenz der Wahrscheinlichkeiten bezeichnet werden [1]

§2. Statistische Begründung der Quantenmechanik. Eine quantenmechanische Größe q betrachten wir als eine Zahl, die in einer gewissen Punktmenge der komplexen Ebene veränderlich ist. Diese Punktmenge kann aus Kurvenstücken und diskreten Punkten bestehen. Wir stellen uns im folgenden ~~auszuführenden~~ zur Vereinfachung der Ausdrucksweise vor, daß sie nur aus einer Kurve besteht, deren Bogenelement wir durch $|dq|$ bezeichnen. Die im folgenden auszuführenden Integrationen sind stets über das ganze Wertgebiet von q zu erstrecken; sie wären bei genauerer Ausdrucksweise im Allgemeinen noch durch Summen zu ergänzen. Wir werden nur durch gelegentliche Zwischenbemerkungen erläutern, wie die systematische Behandlung der nicht kontinuierlich variablen Größen durch eine sinngemäße Übertragung der für stetig variable Größen entwickelten Betrachtungen durchzuführen ist.

Die Multiplikation der Zahlwerte der quantenmech. Größen ist selbstverständlich kommutativ. Es spielt jedoch neben der gewöhnlichen Addition und Multiplikation noch eine andere Verknüpfungsweise der quantenmechanischen Größen eine wichtige Rolle, die symbolisch gleichfalls als Addition u. Multiplikation bezeichnet wird, und die statt des kommutativen Gesetzes der Multiplikation den bekannten quantenmechanischen Vertauschungsregeln genügt. Wir wollen aber diese Verknüpfungsregeln nicht unter die primären Voraussetzungen der Theorie aufnehmen. In Rücksicht auf diese symbolische Addition u. Multiplikation müssen wir später, da wir sie in derselben Weise bezeichnen werden wie die gewöhnliche, unterscheiden zwischen einer mech. Größe p (einer „q-Zahl") und ihrem Zahlwert p. Da wir jedoch auch diese zumeist mit denselben Buchstaben bezeichnen, so muß sehr sorgfältig auf die Bedeutung der verschiedenen Formeln geachtet werden.

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室所蔵 湯川秀樹史料(中間子論関係)
E07 104 U03

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

751. Jordan, Klein,
766 Jordan.

41. S. 828. Wentzel; Richtungsverteilung der Photo-elektron
892. Bothe;
927.
Q42 375. London; Theorie von Weyl
555. Wataghin;
637. A. Markoff
43. 1 Wentzel : Comptoneffekt,
0 524 〃 ; Strahlungslose Quantensprung
5. 601. Pauli ; 2 Mal. mg. Elektrons.
624. Wigner;
Guth ;
0 Guido Beck
Fues.
Wentzel

44 1. Jordan;
291. Jordan; Polarization der Lichtquanten.
517. Reichenbacher.
543. Bothe.
0 585. Dirac
758. Landé
0 773. Lanczos,
893.

45 285.
455.
476.
488.
863. Reichenbacher.

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室所蔵 湯川秀樹史料(中間子論関係)
E07 104 U03

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

Annal. 82 S. 355 – 393 A. Unsöld : Beträge zur Q. mech der Atome
83 Käf Bechert : S. 905

37 S. 263. Anomalen Zeeman effekt.
S. 376 Jordan :
38 S. 441 Heisenberg.
39 S. 226 Fock.
S. 495
S. 499 Heisenberg :

40 S. 167 Born :
S. 193. London : Wellenmech.
S. 255. Reichenbacher : Relat.
322. Madelung : Wellengl.
S. 399. Fermi : Zur Wellenmech des Stoß-vorganges
S. 420 ; M. Berek : Kohärenz und Konsonanz des Lichtes.
S. 574 ; Wentzel : Photoelek. Effekt.
S. 1708 ; V. Bursian : Grundlagen der Disp. theorie von Schröd.

41 S. 24 : Ehrenfest u. Uhlenbeck : Wellenmech. Interpretation der Boltzmannschen Statistik
S. 235 ; Guth : Wellengl.
S. 332. Bothe :
345.
407 ; Klein : Wellenmech u. Elektrodyn.
443 ; Guido Beck : Photoeffekt
S. 797 Jordan ;

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室所蔵 湯川秀樹史料(中間子論関係)
E07 104 U03