

YHAL  
E07 105 U03

Zur Fünfdimensionalen Darstellung  
der Relativitätstheorie  
von O. Klein in Kopenhagen (Zs. 46 S. 188 1928)

Einleitung. Durch die Entwicklung der Quantentheorie haben bekanntlich die Begriffe Raum und Zeit den unmittelbaren Sinn verloren, der ihnen in der älteren Physik und auch in der Relativitätstheorie zugeschrieben wurde. Dies hängt, wie besonders Bohr\* hervorgehoben hat, schon damit zusammen, daß unsere Meßwerkzeuge (Licht und freie materielle Teilchen) nach der Quantentheorie ein Verhalten zeigen, welches durch das Dilemma Korpuskel - Welle charakterisiert wird, wodurch eine scharfe Definition einer raumzeitlichen Koinkidenz, wie sie der gewöhnlichen Raum-Zeitfassung zugrunde liegt, unmöglich wird. Von diesem Gesichtspunkt aus ist zu erwarten, daß die allgemeine Relativitätstheorie einer Revision im Sinne des Quantenpostulats bedürftig ist, wie dies auch daraus hervorgeht, daß verschiedene ihrer Konsequenzen mit den Forderungen der Quantentheorie im Widerspruch sind.\*\*

Es zeigt sich nun bei der Betrachtung der Definitions- und Beobachtungsmöglichkeiten ein eigentümliches reziprokes Verhältnis der Raum-Zeitbeschreibung zu der Erhaltung von Energie und Impuls\*\*\*. Dies hängt auf das innigste damit zusammen, daß nach der Theorie der freien materiellen Teilchen ebenso wie der Strahlung im ~~leeren~~ leeren Raum - die einzigen Fälle, wo es bisher möglich war, in der Quantentheorie den Forderungen der Rel. Theo. streng zu genügen - eine Wellenphase zuzuordnen ist, worin Raum-Zeitkoordinaten und Komponenten des Impuls-Energievektors in symmetrischer Weise auftreten. In dieser Weise erscheinen die Erhaltungssätze, im Anschluß an die Vorstellungen der Lichtquantentheorie, als verallgemeinerte Frequenzbedingung, wie dies besonders durch die Erfahrungen beim Comptoneffekt nahegelegt ist. wird.

\* Bohr Naturwiss. Heisenberg: Zs 43 S. 192 (1927) (\*\*\*)

\*\* Zum Beispiel würde die einsteinsche Strahlenablenkung an einer Anzahl im Zustand statistischen Temp. gleichgew. sich bewegender materieller Körper das Strahlungsgleichgew. stören, was eine Art gravitationellen Comptoneffekt vermuten läßt. Entsprechendes Resultat wird man - schon durch das Nichtauftreten der Planckschen Konstante in den betreffenden Gleichungen - im Fall eines statistischen gleichgew. zwischen Grav. Wellen und Lichtwellen nach den Gesetzen der allgemeinen Relat. erwarten.

Wenn man an die scheinbar etwas zufällige Rolle der Erhaltungssätze in der analytischen Mechanik, als vier der vielen möglichen Integrale der Bewegungsgleichungen denkt, so könnte es nach dem eben erwähnten Gesichtspunkt scheinen, als ob die Raum-Zeitgrößen, die für unsere unmittelbaren Erfahrungen von so zentralerer Bedeutung sind, in dem mathematischen Gebäude der zukünftigen Quantentheorie in den Hintergrund treten würden. Ungeachtet der großen Fruchtbarkeit der Quantenmech. spricht indessen vieles dafür, daß der Ausgangspunkt für eine allgemeine mathematische Formulierung der Quantentheorie eher in den Feldgleichungen der klassischen Theorie zu suchen ist, als in den Bewegungsgleichungen der Punktmechanik. Hierdurch würde die Frage nach der Rolle der Raum-Zeitgrößen (oder vielmehr ihres Quantentheoretischen Analogons) in ein anderes Licht rücken, denn ein großer Teil der für die Feldtheorie charakteristischen Zustandsgrößen (die Einsteinschen Gravitationspotentiale) sind ja formal unmittelbar an die Raum-Zeitbegriffe geknüpft.

Im Hinblick auf diese Verhältnisse, also einerseits die Auflösung der gewöhnlichen Raum-Zeitauffassung durch die Quantentheorie und andererseits die anscheinend notwendige durch sinngemäße Umschreibung der gewöhnlichen Feldtheorie und im nächsten Anschluß an die Erhaltungssätze für Impuls und Energie die Begriffe Raum und Zeit neu zu begründen, liegt es nahe, den fünften allgemeinen Erhaltungssatz, die Erhaltung der Elektrizitätsmenge, als Ausgangspunkt für die Einführung einer neuen der elektrischen Ladung konjugierten Größen zu et betrachten, die den vier raum-zeitlichen Koordinaten als formal gleichwertig an die Seite zu treten hat.

Die Existenz eines elektrischen Elementarquantums führt hierbei eine eigentümliche Situation mit sich, die beim ersten Anblick scheinbar gegen eine Zuordnung der Erhaltung der Elektrizität zu den übrigen Erhaltungssätzen spricht. Durch die nahe liegende Annahme, daß die Existenz der Elementarladung die Folge der Quantisierung einer in dem ent-

sprechenden klassischen Modell kontinuierlich veränderlicher Größen ist, verliert jedoch dieses Argument seine Beweiskraft. Würde doch auch, bei bestimmten, der Relativitätstheorie nicht widersprechenden Annahmen die Impulskomponente in irgend einer Richtung nur diskrete Werte annehmen.

Die Tatsache, daß ein freies elektrisches Teilchen stets eine bestimmte Ladung hat, hat aber nach der hier vertretenen Auffassung die prinzipielle Nichtbeobachtbarkeit der neuen Dimension zur Folge. Dies ist eine einfache Folgerung aus der Dirac-Jordanschen statistischen Formulierung der Quantentheorie, die besonders klar in der von Bohr begründeten Auffassung der Zusammenhänge zwischen Definition und Beobachtung zum Ausdruck kommt. Diese Nichtbeobachtbarkeit der neuen Dimension, die mit der Tatsache, daß unsere Erfahrungen — abgesehen von der aus dem Quantenpostulat hervührenden Begrenzung — sich mit Hilfe der Begriffe Raum und Zeit ordnen lassen, übereinstimmt darf nicht als Beweis der Überflüssigkeit des Begriffs der fünften Dimension betrachtet werden. Als schlagendes Beispiel für die Nützlichkeit einer nicht-beobachtbaren Größen in der Quantenmechanik sei die Eigenrotation des Elektrons erwähnt, die klassisch mit Hilfe eines Winkels beschrieben wird, welcher in der Quantentheorie prinzipiell unbeobachtbar ist.

Wie zuerst Kaluza hervorgehoben ist, wird durch die Einführung einer fünften Dimension in die Rel.theorie in der Tat ein ~~so~~ innige Verschmelzung der Gesetze des Elektromagnetismus mit denen der Gravitation erzielt, wodurch die Zustandsgrößen erscheinen wie die Einsteinschen Gravitationspotentiale in der gewöhnlichen Form der Relativitätstheorie. Hierdurch und nach dem erwähnten Gesichtspunkt scheint sich diese fünfdimensionale Form der Rel.theo. als der natürliche Ausgangspunkt für eine allgemeine Quantenfeldtheorie darzubieten. Im Hinblick hierauf soll im folgenden ein Versuch zu einer zusammenfassenden Darstellung der Grundlagen dieser Form der Relativitätstheorie versucht werden,

wobei der Rahmen der klassischen Theorie — abgesehen von einigen einfachen Betrachtungen zur Wellenmechanik — noch nicht verlassen wird. Es handelt sich also ~~nur~~ um eine nur in formaler Hinsicht von der gewöhnlichen Relativitätstheorie sich unterscheidende Darstellung.\*

§1. Der Erhaltungssatz bei den elektrischen Teilchen. An den in der Einleitung entwickelten Gesichtspunkt anknüpfend, wollen wir zuerst die Erhaltungssätze in dem einfachen Fall eines elektrisch geladenen Teilchens betrachten. Die Erhaltung von Energie und Impuls wird hier durch die Bewegungsgl. ausgedrückt, während die Erhaltung der Elektrizität einfach aussagt, daß die Ladung des Teilchens konstant bleibt. Nehmen wir zuerst an, daß kein elektromagnetisches Feld vorhanden ist. Die Bewegung geht dann nach Einstein auf geodätischen Linien der Raum-Zeitmannigfaltigkeit vor sich. Es sei die Lage des Teilchens durch die vier Raum-Zeitkoordinaten  $x^1, x^2, x^3, x^4$  definiert. Das zu dem Teilchen gehörige Differential der Eigenzeit ist dann gegeben durch

$$dc = \sqrt{-\frac{g_{ik}}{c^2} dx^i dx^k}$$

wo  $c$  die Vakuumlichtgesch. bedeutet, und die  $g_{ik}$  die zehn Komponenten des metrischen Fundamentaltensors bezeichnen, die nach Einstein sowohl die metrischen als auch die gravitativen Eigenschaften des Raumes zum Ausdruck bringen. Führen wir die kovarianten Komponenten des Impulsenergievektors des Teilchens  $p_1, p_2, p_3, p_4$  ein, wo

$$p_i = mg_{ik} \frac{dx^k}{dc} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

und  $m$  die Masse des Teilchens bedeutet, so lassen sich die Bewegungsgleichungen, d. h. die Gleichungen der Geodätischen Linien, bekanntlich auf die folgende Hamiltonsche Form bringen:

$$\frac{dx^i}{dc} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dc} = -\frac{\partial H_0}{\partial x^i} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

wo 
$$H_0 = \frac{1}{2m} g^{ik} p_i p_k \quad (3)$$

\* Das folgende bildet eine sehr verspätete ausführlichere Darstellung der Bestrebungen des Verfassers zur 5-dimensionalen Form der Relativität, die — da sich inzwischen verschiedene Forscher mit diesem Thema beschäftigt haben — von math. Resultaten

Wir fügen nun zu den Koordinaten  $x^1, x^2, x^3, x^4$  eine weitere fünfte Koordinate  $x^0$  hinzu und zu den Impulsenergiekomponenten  $p_1, p_2, p_3, p_4$  eine zu  $x^0$  konjugierte Größe  $p_0$ , die gemäß dem in der Einleitung gesagten proportional der Ladung des Teilchens angenommen werden soll. Setzen wir

$$p_0 = \frac{e}{\beta c} \quad (4)$$

wo  $\beta$  eine später zu bestimmende universelle Konstante bezeichnet von der Dimension einer elektrischen Ladung dividiert durch eine Energie. Zu den Gleichungen (2) können wir also das Paar hinzufügen

$$\frac{dx^0}{dc} = \frac{\partial H_0}{\partial p_0} = 0, \quad \frac{dp_0}{dc} = -\frac{\partial H_0}{\partial x^0} = 0 \quad (5)$$

als Ausdruck der Konstanz der elektrischen Ladung.

Wir fragen demnächst nach der Form der entsprechenden Gleichungen bei der Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes, das wir durch die vier Komponenten  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  des elektromagnetischen Potentialvektors charakterisieren wollen. Bekanntlich lassen sich auch in diesem ~~nur~~ Falle die Bewegungsgleichungen auf Hamiltonsche Form bringen, wenn wir für die Hamiltonsche Funktion setzen

$$H = \frac{1}{2m} g^{ik} (p_i - \frac{e}{c} \varphi_i) (p_k - \frac{e}{c} \varphi_k) + const \quad (6)$$

In diesem Ausdruck ersetzen wir  $e/c$  durch  $\beta p_0$  und nehmen aus später ersichtlichen Gründen die beliebige additive Konstante in  $H$  gleich  $\frac{1}{2m} p_0^2$  an. Den resultierenden Ausdruck können wir folgendermaßen schreiben

$$H = \frac{1}{2m} \{ g^{ik} p_i p_k - 2\beta \varphi^k p_k p_0 + (1 + \beta^2 \varphi^k \varphi_k) p_0^2 \} \quad (7)$$

wo die  $\varphi^k$  die kontravarianten Komponenten des Potentialvektors be-  
 wohl kaum neues bringt. Ich hoffe, daß dieselbe doch etwas Interesse beanspruchen darf, da sie sich sowohl durch die physikalischen Gesichtspunkte wie durch die Form von den übrigen Arbeiten — auch den früheren Arbeiten des Verfassers — unterscheidet. Insbesondere halte ich es nicht mehr für möglich, durch die Einführung einer fünften Dimension den von der Quantentheorie geforderten Abweichungen von der R-Z Beschreibung der klassischen Theorie gerecht zu werden.

Hier sei auf die von de Broglie gegebene Übersicht über den Gegenstand hingewiesen (J. de Phys. 8, 65, 1927). Ausführlicher Literaturangaben findet man bei L. Rosenfeld, Acad. Roy. de Belgique (5) 23 Heft 6, 1927. H. Madsen, H. Mandel (2) 39 5136, 1926, 45 5285, 1927), Gonthier u. Juvet (C.R. 185 341, 412, 448, 535, 1927).

deuten. Wie wir sehen, hat dieser Ausdruck eine entsprechende Form wie die der Ausdruck (3) für die zu den geodätischen Linien gehörige Hamiltonsche Funktion. Dies führt uns dazu, versuchsweise eine solche Metrik des fünfdimensionalen Raumes einzuführen, daß die kontravarianten Komponenten  $\gamma^{ik}$  des Fundamental tensors gegeben sind durch

$$\gamma^{ik} = g^{ik}, \quad \gamma^{i0} = -\beta \varphi^i, \quad \gamma^{00} = 1 + \beta^2 \varphi_k \varphi^k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \quad (8)$$

Wir können nämlich dann schreiben

$$H = \frac{1}{2m} \sum \gamma^{ik} p_i p_k \quad (9)$$

wo das Summenzeichen wie überall im folgenden eine Summation von 0 bis 4 über doppelt auftretende Indizes andeuten soll. Die kanonischen Gleichungen  $\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$   $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ) (10)

sind nun die Gleichungen fünfdimensionaler geodätischer Linien, von denen das erste ~~paar~~ die Erhaltung der Ladung (wegen des Nichtvorkommens von  $x^0$  in  $H$ ) bzw. die Definition von  $\frac{dx^0}{dt}$  ausdrücken, während die vier übrigen Paare die Bewegungsgleichungen darstellen.

Wenn  $\gamma_{ik}$  die kovarianten Komponenten des Fundamental tensors bezeichnen, so ergibt sich aus (9) auf Grund von (10)

$$p_i = m \sum \gamma_{ik} \frac{dx^k}{dt} \quad (11)$$

Wenn andererseits die Form (7) von  $H$  benutzt wird, so folgt aus (10)

$$m \frac{dx^0}{dt} = (1 + \beta^2 \varphi_k \varphi^k) p_0 - \beta \varphi^k p_k, \quad m \frac{dx^i}{dt} = g^{ik} p_k - \beta \varphi^i p_0$$

oder

$$p_i = m g_{ik} \frac{dx^k}{dt} + \beta p_0 \varphi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (12)$$

und also auch

$$p_0 = m \left\{ \frac{dx^0}{dt} + \beta \varphi_k \frac{dx^k}{dt} \right\}$$

$$p_i = m \left\{ \beta \varphi_i \frac{dx^0}{dt} + \left( g_{ik} + \beta^2 \varphi^i \varphi_k \right) \frac{dx^k}{dt} \right\} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \quad (13)$$

woraus durch Vergleich mit (11) folgt

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \beta^2 \varphi_i \varphi_k \quad \gamma_{i0} = \beta \varphi_i \quad \gamma_{00} = 1 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \quad (14)$$

Aus diesen Werten für die  $\gamma_{ik}$  ersieht man, daß dem Quadrat  $d\sigma^2$  des

fünfdimensionalen Linienelements die Form gegeben werden kann

$$d\sigma^2 = d\mathcal{D}^2 + ds^2 \quad (15)$$

$$wo \quad ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (16)$$

das Quadrat des einsteinschen Linienelements bezeichnet, während

$$d\mathcal{D} = dx^0 + \beta \varphi_i dx^i \quad (17)$$

Aus der letzten Form des Linienelements können wir leicht das gewonnene Resultat verifizieren, daß die Bewegungsgleichungen zusammen mit der Erhaltung der Ladung durch die Gleichungen fünfdimensionaler geodätischer Linien dargestellt werden können. Es lassen sich nämlich die zu (15) gehörigen geodätischen Linien durch die folgenden Lagrangeschen Gleichungen darstellen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dx^i}{dt} \right)} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (18)$$

$$wo \quad L = \frac{1}{2} m \left( \frac{d\sigma}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} \left\{ g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \left( \frac{dx^0}{dt} + \beta \varphi_i \frac{dx^i}{dt} \right)^2 \right\} \quad (19)$$

Betrachten wir nun außerdem die folgende Größe:

$$L_0 = \frac{m}{2} g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \beta \varphi_i p_0 \varphi^i \frac{dx^0}{dt} \quad (20)$$

so sehen wir leicht, daß wenn  $x$  irgend eine der Größen  $x^1, x^2, x^3, x^4, \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}, \frac{dx^4}{dt}$  bedeutet

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L_0}{\partial x}$$

ist. In der vier der Gl. (18), welche die Bewegung des Teilchens ausdrücken, dürfen wir also  $L$  durch  $L_0$  ersetzen, bekommen aber dann, wegen  $\beta p_0 = e/c$ , die bekannte Lagrangesche Form der Bewegungsgl. eines elektrischen Teilchens.

Für elektrische Teilchen in einem gravitationellen und elektromag. Felde lassen also die fünf Erhaltungssätze in die Aussage zusammenfassen: Die „Bahn“ eines elektrischen Teilchens in der fünfdimensionalen Mannigfaltigkeit ist eine geodätische Linie des Linienelem. (15). Die Konstanz der elektrischen Ladung erscheint hierbei als Folge des Nichtvorkommens von  $x^0$  in den Komponenten des fünfdim-

ensionalen metrischen Fundamentaltenors.

Es mag bemerkt werden, daß die in der gewöhnlichen Form der Relat. Theorie fremdartig anmutende Form der Momente

$$p_i = m u_i + \frac{e}{c} \phi_i$$

wo  $u_1, u_2, u_3, u_4$  die kovarianten Komponenten der Vierergeschw. bedeuten (Vgl. Gleich. (12)), in der fünfdimensionalen Darstellung in einem natürlichen Lichte erscheint. Nach (11) hat man in der

Tat 
$$p_i = m \sum \gamma_{ik} \frac{dx^k}{dt}$$

wo 
$$\sum \gamma_{ik} \frac{dx^k}{dt}$$

offenbar eine in bezug auf die fünfdimensionale Metrik kovariante Komponente der „Fünfergeschwindigkeit“ bedeutet.

§ 2. Invarianzeigenschaften der betrachteten fünfdimensionalen Mannigfaltigkeit.

Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen werden wir versuchen, die Gesetzmäßigkeiten der Relativitätstheorie allgemein mit Hilfe einer 5-dimensionalen Riemannschen Geometrie darzustellen. Da wir fürs erste nicht den Rahmen der gewöhnlichen Relativitätstheorie verlassen wollen, ist es zweckmäßig, hierbei die Koordinatenwahl so zu beschränken, daß vier der fünf Koordinaten (sagen wir  $x^1, x^2, x^3, x^4$ ) sich stets auf die in wohlbekannter Weise definierte R-2-mannigfaltigkeit der Relativitätstheorie beziehen. Um zu den gewöhnlichen physikalischen Gesetzen zu gelangen, müssen wir die fundamentale Annahme über das Linienelement  $ds$  des fünfdimensionalen Raumes machen, daß bei geeigneter Wahl der fünften Koordinaten die Größen  $\gamma_{ik}$  nur von den R-2-Koordinaten  $x^1, x^2, x^3, x^4$  abhängen. Wir werden dann die Koordinatenwahl in bezug auf  $x^0$  so einschränken, daß diese Bedingung in allen zum Gebrauch gelangenden Koordinatensystemen erfüllt ist. Dies mag als ein-wohl vorläufiger-Ausdruck für die in der Einleitung erwähnte Nichtbeobachtbarkeit der fünften Dimension betrachtet werden.

Betrachten wir nun eine durch die folgenden Gleichungen ausgedrückte

Koordinatentransformation

$$x^0 = \Psi(x^1, x^2, x^3, x^4), \quad x^i = \psi_i(x^1, x^2, x^3, x^4) \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

so folgt

$$dx^0 = \sum \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} dx^i = \sum \alpha^i dx^i$$

Die Größen  $\alpha_i = \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}$  müssen aber auf Grund des eben Gesagten von  $x^0$  unabhängig sein, da diese Koordinate sonst in den  $\psi_i$  auftreten würde. Man hat nun

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial x^i} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^0} \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

Folglich muß  $\alpha_0$  eine Konstante sein, da wir stets gleich Eins annehmen wollen, da diese weitere Einschränkung, wie wir gleich sehen werden, die Gleichheit einer gegebenen elektrischen Ladung in allen erlaubten Bezugssystemen zur Folge hat. Durch unsere Annahmen reduzieren sich also die zugelassenen Koordinatentransformationen auf die folgende Gruppe (A)

$$x^0 = x^0 + \Psi_0(x^1, x^2, x^3, x^4), \quad x^i = \psi_i(x^1, x^2, x^3, x^4) \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

Wir wollen die Invarianzeigenschaften der in Betracht kommenden Vektoren und Tensoren der Gruppe (A) gegenüber untersuchen. Es seien  $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$  die kontravarianten Komponenten eines fünfdimensionalen Vektors. Wir bilden die Komponenten desselben Vektors in dem gestrichelten Koordinatensystem. Für  $i=1, 2, 3, 4$  hat man

$$\sigma^{i'} = \sum \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\mu} \sigma^\mu = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\mu} \sigma^\mu$$

Die Komponenten  $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$  verhalten sich folglich wie die kontravarianten Komponenten eines Vierervektors. Betrachten wir auch die kovariante Komponente  $\sigma_0$ , es ist

$$\sigma_0 = \sum \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{i'}} \sigma_{\mu'} = \sigma_0'$$

Die Größe  $\sigma_0$  ist also eine Invariante, woraus nach (A) die Invarianz der Ladung folgt.

Betrachten wir demnächst einen 5-dimensionalen Tensor zweier Ranges mit den Komponenten  $\Theta^{ik}$ . Wir haben dann für  $i, k=1, 2, 3, 4$

$$\Theta^{i'k'} = \sum \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Theta^{ik} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Theta^{ik}$$

Die raum-zeitlichen kontravarianten Komponenten des Tensors bilden demnach einen vierdimensionalen Tensor. Für die gemischten Komponenten  $\Theta_{\nu}^{\mu}$ , wo  $i = 1, 2, 3, 4$ , hat man ferner

$$\Theta_{\nu}^{\mu} = \sum \Theta_{\mu}^{\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \Theta_{\nu}^{\mu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

Diese bilden also einen Vierervektor, und das Gleiche gilt von den Komponenten  $\Theta_{\nu}^{\mu}$ . Die Komponente  $\Theta_{00}$  bildet eine Invariante, denn es gilt

$$\Theta_{00} = \sum \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^0} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^0} \Theta_{\mu\nu} = \Theta_{00}$$

Schließlich betrachten wir die Größe  $\sum \Theta_{0i} dx^i$ . Da

$$\Theta_{0i} = \sum \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^0} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^i} \Theta_{\mu\nu} = \sum \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^i} \Theta_{0\nu},$$

so hat man

$$\sum \Theta_{0i} dx^i = \sum \Theta_{0\nu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^i} dx^i = \sum \Theta_{0\nu} dx^{\nu}.$$

Auch diese Größe bildet folglich eine Invariante, was natürlich auch von der Größe  $\sum \Theta_{i0} dx^i$  gilt.

Wenden wir diese Resultate auf den Fundamentaltensor  $\gamma_{ik}$  auf, so folgt erstens, daß die Festsetzung  $\gamma_{ik} = g_{ik}$  für  $i, k = 1, 2, 3, 4$  mit den Transformationen (A) verträglich ist. Aus dem Umstand, daß

$\sum \gamma_{0i} dx^i$  eine Invariante bildet, folgt ferner, wegen der Invarianz von  $\gamma_{00}$ , daß die vier Größen  $\gamma_{0i}$  sich invarianztheoretisch wie die elektromagnetischen Potentiale verhalten. In der Tat sind diese nur so weit bestimmt, daß die Größe  $q_i dx^i$  bis auf ein vollständiges Differential einer beliebigen Funktion von  $x^1, x^2, x^3, x^4$  festgelegt ist. Sowohl die Festsetzungen

$\gamma_{0i} = \beta \varphi_i$  wie  $\gamma_{00} = 1$  sind als mit unserer Transformationsgruppe verträglich\*. Da wir identisch schreiben können

$$ds^2 = \sum \gamma_{ik} dx^i dx^k = \frac{1}{\gamma_{00}} \left( \sum \gamma_{0k} dx^k \right)^2 + \left( \gamma_{ik} - \frac{\gamma_{0i} \gamma_{0k}}{\gamma_{00}} \right) dx^i dx^k,$$

so sehen wir auch auf Grund der Invarianz von  $\gamma_{00}$  und  $\sum \gamma_{0k} dx^k$ , daß

\* wie man sieht, verlangt die im vorigen Paragraphen besprochene einfache Deutung der Bewegungsgleichungen, daß  $\gamma_{00}$  konstant ist. In §4 werden wir einem Argument für das positive Zeichen von  $\gamma_{00}$  begegnen d.h. für die Raumartigkeit der fünften Dimension. Die Annahme  $\gamma_{00} = 1$  bedeutet dann nur, daß wir den Maßstab für  $x^0$  in entsprechender Weise wie für die übrigen Dimensionen wählen. Auf die Frage der Konstanz von  $\gamma_{00}$  werden wir noch in §4 zurückkehren.

$\left( \gamma_{ik} - \frac{\gamma_{0i} \gamma_{0k}}{\gamma_{00}} \right) dx^i dx^k$  eine Invariante bildet, was wiederum seine in (14) ausgedrückte Identifizierung mit dem Quadrat des einsten Linienelements rechtfertigt.

Betrachten wir noch einmal den Vektor  $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$ . Setzen wir

$$s_i = \sigma^i \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (21)$$

und drücken wir die kovarianten Komponenten  $s_1, s_2, s_3, s_4$  des Vierervektors mit Hilfe der kovarianten Komponenten  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  des Fünfvektors aus. Man hat

$$s_i = g_{ik} s^k = g_{ik} \sum \gamma^{kr} \sigma_r = \sigma_i - \beta \varphi_i \sigma^0, \quad (22)$$

eine Formel, von der (12) ein Spezialfall ist. Setzen wir ferner bei einem symmetrischen Tensor

$$\Theta^{ik} = \gamma^{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

und berechnen wir ebenso die Komponenten  $\mathbb{P}_{ik}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{ik} &= g_{ip} g_{kv} \Theta^{pv} = g_{ip} g_{kv} \sum \gamma^{pr} \gamma^{vs} \Theta_{rs} \\ &= \Theta_{ik} - \beta (\varphi_i \Theta_{0k} + \varphi_k \Theta_{0i}) + \beta^2 \varphi_i \varphi_k \Theta_{00}. \end{aligned} \quad (23)$$

Von dieser Formel ist wieder der aus (14) folgende Ausdruck für die  $g_{ik}$  ein Spezialfall.

Schließlich wollen wir die Determinante  $\gamma = |\gamma_{ik}|$  der Größen  $\gamma_{ik}$  berechnen. Wir haben

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} &= \begin{vmatrix} 1 + \beta^2 \varphi_k \varphi^k & -\beta \varphi^1 & -\beta \varphi^2 & -\beta \varphi^3 & -\beta \varphi^4 \\ -\beta \varphi^1 & g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ -\beta \varphi^2 & g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ -\beta \varphi^3 & g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ -\beta \varphi^4 & g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} \\ &= (1 + \beta^2 \varphi_k \varphi^k) g^{-1} - \beta^2 \varphi^i \varphi^k g_{ik} g^{-1} = g^{-1}, \end{aligned}$$

wo  $g$  die Determinante der  $g_{ik}$  bezeichnet. Wir bekommen also einfach

$$\gamma = g \quad (24)$$

§3. Das allgemeine Erhaltungsprinzip. Wir fangen damit an, einen einfachen mathematischen Hilfssatz abzuleiten. Durch eine infinitesimale Koordinatentransformation mögen die Koordinaten  $x^0, x^1, x^2, x^3, x^4$  in  $\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4$  verwandelt werden, wobei

$$\bar{x}^i = x^i + \varepsilon \xi^i(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4) \quad (i=0, 1, 2, 3, 4) \quad (25)$$

hier soll  $\varepsilon$  eine unendlich kleine Konstante bedeuten, während die  $\xi^i$  Funktionen der vier Koordinaten  $x^1, x^2, x^3, x^4$  seien, die am Rande eines gewissen geschlossenen Gebietes  $G$  des 5-dimens. Raumes eines verschwinden sollen. Wir vergleichen die Werte der Größen  $g_{ik}, \varphi_i$  vor und nach der Transformation in zwei Punkten, wo die alten und neuen Koordinaten die gleichen Werte haben. Eine solche Variation bezeichnen wir mit  $\delta^*$ . Bedeutet  $a$  irgend eine der zu variierenden Größen, so hat man also

$$\delta^* a = \bar{a}(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4) - a(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4) \quad (26)$$

wo  $\bar{a}$  die transformierte Größe  $a$  bedeutet.

Es seien nun  $\Theta^{ik}$  die Komponenten eines symmetrischen 5-dimens. Tensors, die  $x^0$  nicht enthalten sollen. Dann zeigt man leicht, daß

$$\sum \Theta^{ik} \delta \gamma_{ik} = \Theta^{ik} \delta g_{ik} + 2\beta \Theta^k \delta \varphi_k, \quad (27)$$

wo  $\delta$  irgend eine beliebige infinitesimale Variation der durch (14) gegebenen Größen  $\gamma_{ik}$  bedeutet. Sei nun  $\delta$  speziell die Variation  $\delta^*$ , so folgt nach (25) und (26) durch eine leichte Rechnung

$$\frac{1}{2} \int \dots \int \sqrt{-\gamma} dx^0 \dots dx^4 \sum \Theta^{ik} \delta^* \gamma_{ik} = \varepsilon \int \dots \int \sqrt{-\gamma} dx^0 \dots dx^4 \sum \text{Div}_i \Theta \cdot \xi^i, \quad (28)$$

wo die Integration über das erwähnte Gebiet  $G$  zu erstrecken ist, und wo

$$\text{Div}_i \Theta = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \sum \frac{\partial \sqrt{-\gamma} \Theta^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \sum \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x^i} \Theta^{rs} \quad (29)$$

Ebenso folgt, wenn wir den vierdimensionalen Tensor mit den Komponenten

$$T^{ik} = \Theta^{ik} \quad (i, k=1, 2, 3, 4) \text{ mit } T \text{ bezeichnen,}$$

$$\frac{1}{2} \int \dots \int \sqrt{-g} dx^0 \dots dx^4 T^{ik} \delta^* g_{ik} = \varepsilon \int \dots \int \sqrt{-g} dx^0 \dots dx^4 \text{Div}_i T \cdot \xi^i, \quad (30)$$

+ Vgl. Pauli, Relativ. Theo. (Leipzig-Berlin 1921), S. 617.

$$\text{wo} \quad \text{Div}_i T = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} T^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} T^{rs} \quad (31)$$

Ferner findet man leicht

$$\int \dots \int \sqrt{-\gamma} dx^0 \dots dx^4 \sum \Theta^i \delta^* \gamma_{0i} = \varepsilon \beta \int \dots \int \sqrt{-\gamma} dx^0 \dots dx^4 \left\{ \text{Fik} \Theta^i + \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\partial \sqrt{-\gamma} \Theta^i}{\partial x^i} \varphi_k \right\} \xi^k + \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\partial \sqrt{-\gamma} \Theta^i}{\partial x^i} \xi^i \quad (32)$$

$$\text{wo} \quad \text{Fik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} \quad (33)$$

die Komponenten des elektromagnetischen Feldtensors bezeichnen. Da nun die  $\xi^i$  innerhalb des Gebietes  $G$  ganz beliebig gewählt werden können, folgt aus (22), da  $\gamma = g$ , identisch

$$\text{Div}_0 \Theta \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \Theta^k}{\partial x^k}, \quad \text{Div}_i \Theta \equiv \text{Div}_i T - \beta \text{Fik} \Theta^k + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \Theta^k}{\partial x^k} \varphi_i \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (34)$$

Wir gehen nun dazu über, die Erhaltungssätze zu betrachten, wie sie in der Relat. theo. dargestellt werden. Es seien  $s^1, s^2, s^3, s^4$  die Komponenten des Viererstroms; dann kann der Satz von der Erhaltung der Elektrizität bekanntlich durch folgende Gleichung ausgedrückt werden

$$\frac{\partial \sqrt{-g} s^k}{\partial x^k} = 0 \quad (35)$$

Wenn ferner  $T^{ik}$  ( $i, k=1, 2, 3, 4$ ) die Komponenten des Energie-Impulstensors der Materie vorstellen (das El. mg. Feld nicht mit einbegriffen), so kann das Energie-Impuls Prinzip bekanntlich folgendermaßen ausgedrückt werden

$$\text{Div}_i T = \text{Fik} s^k \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (36)$$

Nach dem vorigen Paragraphen können wir aber einen 5-dim symmetrischen Tensor durch folgende Gleichungen definieren

$$\Theta^{ik} = T^{ik}, \quad \Theta^k = \frac{1}{\beta} s^k \quad (i, k=1, 2, 3, 4) \quad (37)$$

wobei es auf den Wert von  $\Theta_{00}$  nicht ankommt. Es folgt dann aus (34)

$$\text{Div}_0 \Theta = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} s^k}{\partial x^k}, \quad \text{Div}_i \Theta = \text{Div}_i T - \text{Fik} s^k + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} s^k}{\partial x^k} \varphi_i \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (38)$$

Die fünf Erhaltungssätze können folglich in die 5 dim. Divergenzbeziehung

$$\Delta \text{div}_i \Theta = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (39)$$

zusammengefaßt werden, deren erste Gleichung die Erhaltung der Elektrizität ausspricht, während die vier übrigen das Energie-Impulsprinzip ausdrücken. Diese Gleichung bildet das 5-dim Analogon zu dem Energie-Impulsprinzip der gewöhnlichen Relativ. theo. bei Abwesenheit elektromagnetischer Felder.

Als Erläuterung dieser Beziehungen betrachten wir zuerst den Beitrag zum Energie-Impulstensor, den nach der gewöhnlichen Relat. mechanik ein Einzelteilchen von der Masse  $m$  liefert. Dieser ist  $m u^i u^k$ , wo  $u^i$  die Komponenten der Vierergeschwindigkeit darstellen. Hat das Teilchen eine Ladung  $e$ , so liefert es weiter einen Beitrag  $\frac{e}{c} u^i$  zu dem Viererstrom. Einem solchen Teilchen können wir nun nach (37) einen 5 dim Tensor, wir wollen ihn mit  $D^{ik}$  bezeichnen, zuordnen, indem wir setzen

$$D^{ik} = m u^i u^k, \quad D_0^k = \frac{e}{c} u^k. \quad (40)$$

Bezeichnen wir nun die Fünfergeschwindigkeit mit  $v^0, v^1, v^2, v^3, v^4$ , wo (vgl. S. 194)

$$v^i = u^i \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad v_0 = \frac{pe}{m} = \frac{e}{m\beta c}, \quad (41)$$

so können wir anstatt (40) schreiben

$$D^{ik} = m v^i v^k, \quad D_0^k = m v_0 v^k \quad (42)$$

woraus die 5-dim Tensorform unmittelbar hervorgeht.

Leiten wir demnächst das sogenannte wellenmechanische Energie-Impulsprinzip ab. Zu diesem Zwecke betrachten wir die folgende Invariante

$$M = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \sum \gamma^{ik} \frac{\partial U}{\partial x^i} \frac{\partial U}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \lambda U^2 \quad (43)$$

wobei die Plancksche Konstante,  $m$  wieder die Masse des Teilchens, von dessen Wellengleichung die Rede ist, bedeuten, während

$$\lambda = m^2 c^2 - \frac{e^2}{3^2 m^2 c^2} \quad (44)$$

und  $U$  eine invariante Funktion von  $x^0, x^1, x^2, x^3, x^4$  sein soll. Wir

bilden die Variation  $\delta(\sqrt{-g}M)$ , indem wir die Größen  $\gamma^{ik}$  und  $U$  variieren, und integrieren diese Größe über ein bestimmtes 5-dim Gebiet, an dessen Rand die Variationen verschwinden mögen. Es folgt nach einer einfachen Rechnung

$$\int \dots \int \delta(\sqrt{-g}M) dx^0 \dots dx^4 = \int \dots \int \sqrt{-g} dx^0 \dots dx^4 \left\{ \sum \Theta_{ik} \delta \gamma^{ik} + \left(-\frac{h^2}{4\pi^2 m} \square U + \lambda U\right) \delta U \right\} \quad (45)$$

wo  $\Theta_{ik} = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial U}{\partial x^i} \frac{\partial U}{\partial x^k} - \frac{1}{2} M \gamma_{ik}$  ( $i, k=0, 1, 2, 3, 4$ ) (46) während  $\square$  die fünfdimensionale Verallgemeinerung des Laplaceschen Operators  $\Delta$  bedeutet, also

$$\square U = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{-g} \gamma^{ik} \frac{\partial U}{\partial x^k} \right) \quad (47)$$

Lassen wir nun speziell unsere Variation die durch (45) ausgedrückte infinitesimale Änderung bedeuten. Dann haben wir nach (28)

$$\frac{1}{2} \int \dots \int \sqrt{-g} dx^0 \dots dx^4 \sum \Theta_{ik} \delta^* \gamma^{ik} = -\varepsilon \int \dots \int \sqrt{-g} dx^0 dx^4 \sum \Delta \text{div}_i \Theta \cdot \bar{z}^i \quad (28a)$$

und ferner, da

$$\square(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4) = U(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4), \quad \delta^* U = -\varepsilon \sum \frac{\partial U}{\partial x^i} \bar{z}^i \quad (48)$$

so daß die rechte Seite von (45) die Form annimmt

$$-2\varepsilon \int \dots \int \sqrt{-g} dx^0 \dots dx^4 \sum \bar{z}^i \left\{ \Delta \text{div}_i \Theta + \frac{1}{2} \left(-\frac{h^2}{4\pi^2 m} \square U + \lambda U\right) \frac{\partial U}{\partial x^i} \right\}.$$

Da aber  $\int \dots \int \sqrt{-g} M dx^0 \dots dx^4$  eine Invariante ist, so muß die Größe auf der linken Seite von (45) für beliebige  $\bar{z}^i$ , die am Rande des Gebiets verschwinden, gleich Null sein\*. Es folgten also die Identitäten

$$\Delta \text{div}_i \Theta + \frac{1}{2} \left(-\frac{h^2}{4\pi^2 m} \square U + \lambda U\right) \frac{\partial U}{\partial x^i} = 0 \quad (49)$$

In der fünfdimensionalen Schreibweise lautet aber die Wellengleichung für das elektrische Teilchen\*\*

\* Vgl. Pauli.

\*\* Diese Form der Wellengl. hat zuerst de Broglie, l.c. vorgeschlagen.

Wegen (54) ist sie der früher vom Verfasser (37 895) und von Fock (39 226) gegebenen Form äquivalent. Die von de Broglie geäußerte entgegengesetzte Ansicht beruht auf einer Verwechslung der auf S. 901 der Arbeit des Verfassers definierten Größen  $\gamma_{ik}$  mit den metrischen Größen  $\gamma^{ik}$ . Doch sei betont, daß sich nur die Form (50) der

$$-\frac{\hbar^2}{4\pi^2 m} \square U + \lambda U = 0, \quad (50)$$

so daß folgt

$$\text{Div}_i \Theta = 0 \quad (51)$$

Diese Beziehungen drücken, wie wir zeigen wollen, das allgemeine wellenmech. Erhaltungsprinzip aus. Wie aus (49) hervorgeht, ist dieses Prinzip nicht nur eine Folge der Wellengleichung (50), sondern die Wellengl. folgt umgekehrt aus (51), so daß beide völlig äquivalent sind.

Wir setzen wieder  $\Theta^{ik} = T^{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3, 4$ ) und berechnen mit Hilfe von (23) die Komponenten  $T_{ik}$ . Es ergibt sich nach einer leichten Rechnung

$$T_{ik} = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \left( \frac{\partial U}{\partial x^i} - \beta \varphi_i \frac{\partial U}{\partial x^0} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial x^k} - \beta \varphi_k \frac{\partial U}{\partial x^0} \right) - \frac{1}{2} M g_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \quad (52)$$

Setzen wir ferner  $\Theta_0^k = \frac{1}{2} S^k$ , so folgt nach (22)

$$S_i = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial U}{\partial x^0} \left( \frac{\partial U}{\partial x^i} - \beta \varphi_i \frac{\partial U}{\partial x^0} \right) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (53)$$

Um zu der vierdimensionalen Form der Wellengleichung zu gelangen, müssen wir nun setzen

$$U = \varphi e^{\frac{2\pi i}{\hbar} p_0 x^0} + \psi e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} p_0 x^0}, \quad (54)$$

wo  $\varphi$  und  $\psi$  zwei konjugiert komplexe nur von  $x^1, x^2, x^3, x^4$  abhängige Funktionen bezeichnen. Durch Einführung dieses Ausdruckes in (52) und (53) zerfallen die Größen  $T_{ik}$  und  $S_i$  in drei Teile, einen von  $x^0$  unabhängigen und zwei mit  $e^{\frac{2\pi i}{\hbar} p_0 x^0}$  bzw.  $e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} p_0 x^0}$  proportionale Teile, die offensichtlich jeder für sich die Erhaltungsgl. (51) befriedigen müssen.

Für den Gebrauch der Größen  $T_{ik}$  und  $S_i$  in der 2. Theo. kommen jedoch nur die von  $x^0$  unabhängigen Teile in Betracht, die wir als Mittelwert über  $x^0$  mit  $\bar{T}_{ik}$  bzw.  $\bar{S}_i$  bezeichnen wollen. Es gilt sich wegen

Wellengleichung direkt an die in §1 (und S. 899 der früheren Arbeit) gegebene Darstellung der Beweggl. anschließt. Die Tatsache, daß sich der Grenzübergang zur klassischen Theorie mittels der älteren Form der Gleichung besonders einfach gestaltet, bietet — im Gegensatz zu meiner früheren Ansicht — jedoch kein Argument für diese Form der Gleichung dar, da die bezügliche Grenzbedeutung wegen der Unteilbarkeit der elektrischen Ladung kaum als sinngemäß anzusehen ist.

$$p_0 = \frac{E}{c} \quad \bar{T}_{ik} = \frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - e \varphi_i \varphi \right) \left( -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - e \varphi_k \psi \right) + \left( \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - e \varphi_k \psi \right) \left( -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - e \varphi_i \varphi \right) - \frac{1}{2} M g_{ik} \right\} \quad (55)$$

$$\text{wo } \bar{M} = \frac{1}{2m} g^{ik} \left( \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - e \varphi_i \varphi \right) \left( -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - e \varphi_k \psi \right) + m^2 \varphi \psi. \quad (56)$$

Weiter folgt

$$S_i = \frac{e}{2mc} \left\{ \frac{\hbar}{2\pi i} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right) - 2 \frac{e}{c} \varphi_i \varphi \psi \right\} \quad (57)$$

in Übereinstimmung mit zuerst von Schrödinger und Gordon gegebenen Ausdrücken für den Energie-Impulstensor und den Viererstrom. Auf Grund von (51) und (34) müssen die Ausdrücke (55) und (57) tatsächlich den Erhaltungssätzen genügen.

§4. Die Feldgleichungen. Wir wollen jetzt von unserem Gesichtspunkt aus die Feldgleichungen der Rel. Theo. betrachten. Es seien  $R_{ik}$  die Komponenten des verjüngten Krümmungstensors, also

$$R_{ik} \equiv \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{i\alpha}^\beta \Gamma_{k\beta}^\alpha - \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \quad (58)$$

$$\text{wo } \Gamma_{rs}^i \equiv \frac{1}{2} g^{ik} \left( \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k} \right) \quad (i, r, s = 1, 2, 3, 4) \quad (59)$$

die wohlbekannten Dreiindizesynbole bezeichnen. Es sei ferner

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R, \quad (60)$$

$$R \equiv g^{ik} R_{ik} \quad (61)$$

die Krümmungsinvariante bedeutet. Mit diesen Bezeichnungen lauten bekanntlich die Einsteinschen Feldgleichungen für das Gravitationsfeld

$$G_{ik} = -\kappa (T_{ik} + S_{ik}) \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \quad (62)$$

wo wir aus später ersichtlichen Gründen die kontravarianten Komponenten gewählt haben. Hier sind  $S^{ik}$  die kontravarianten Komponenten des Energie-Impulstensors des elektromagnetischen Feldes, dessen kovariante Komponenten lauten

$$S_{ik} \equiv F_{ri} F_{sk} g^{rs} - \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} g_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \quad (63)$$

während  $\kappa$  die Einsteinsche Verallgemeinerung der Maxwell'schen Gleichungen für das elektromagnetische Feld

o wo wir einen Augenblick  $s^i$  als Abkürzung des Ausdrucks  $\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} F^{ik}$  mit linken Seite von (64) gebraucht haben. Ferner hat man  
 $\text{Div}_i S \equiv -F_{ik} s^k \quad (i, k=1, 2, 3, 4) \quad (66) \dagger$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} F^{ik} = s^i \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (64)$$

Bekanntlich gilt nun identisch  $\text{Div}_i G \equiv 0$ ,  $\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} s^k \equiv 0 \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (65) \circ$

wo wir ~~einen Augenblick~~ <sup>wiederrum</sup>  $s^k$  als Abkürzung für  $\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} F^{ik}$  steht. Diese Identitäten führen auf Grund der Feldgleichungen (62) und (64) in wohl bekannter Weise zu den Erhaltungssätzen für elektrische Ladung, Energie und Impuls.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir den fünfdimensionalen Tensor  $P^{ik}$ , der das genaue Analogon zu dem vierdimensionalen Tensor  $G^{ik}$  ist. Er hängt nach (14) von den  $g_{ik}$ , den  $\varphi_i$  und deren ersten und zweiten Differentialquotienten nach  $x^1, x^2, x^3, x^4$  ab. Ferner erfüllt er die Identitäten

$$\text{Div}_i P \equiv 0 \quad (i=0, 1, 2, 3, 4) \quad (67)$$

wofür wir nach (34) auch schreiben können

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} P_0^k \equiv 0, \quad \text{Div}_i \bar{G} - \beta F_{ik} P_0^k \equiv 0 \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (68)$$

wo  $\bar{G}$  einen vierdimensionalen Tensor mit den Komponenten  $P^{ik}$  ( $i, k=1, 2, 3, 4$ ) bezeichnet. Nach § 2 müssen ja diese  $P^{ik}$  der Gruppe (A) gegenüber einen symmetrischen vierdimensionalen Tensor bilden.

Betrachten wir zuerst die Komponenten  $P_0^k$ , die nach § 2 der Gruppe (A) gegenüber einen Viervektor bilden, dessen Divergenz nach (68) identisch verschwindet. Aus den Größen  $g_{ik}$ ,  $\varphi_i$  selbst und ihren ersten Differentialquotienten läßt sich, wie man leicht sieht, keine Größe bilden, die (A) gegenüber sich wie ein Viervektor verhält. (Die  $\varphi_i$  bilden ja nur dann eine Viervektor, wenn  $x^0$  untransformiert bleibt.) Die einzigen unabhängigen Tensoren zweiten Ranges, die aus diesen Größen gebildet werden können, sind ferner  $g_{ik}$  und  $F_{ik}$ . Wenn wir noch die zweiten Differentialquotienten der  $g_{ik}$  und  $\varphi_i$  hinzunehmen, und zwar linear, so kommen bekommen wir als einzigen Viervektor  $\text{const} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} F^{ik}$  dessen Divergenz

wirklich identisch verschwindet. Von dieser Form muß also  $P_0^i$  sein. Den konstanten Faktor können wir bestimmen, indem wir  $\alpha, \beta$  in dem allgemeinen Ausdruck für  $P_0^i$  alle Größen  $g_{ik}$  und drei der Größen  $\varphi_i$  als konstant annehmen. Es folgt dann

$$P_0^i \equiv -\frac{1}{2} \beta \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} F^{ik} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (69)$$

Aus (68) und (66) folgt nun

$$\text{Div}_i \bar{G} \equiv \frac{1}{2} \beta^2 \text{Div}_i S \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (70)$$

Es muß also  $\bar{G}_{ik} - \frac{1}{2} \beta^2 S_{ik}$  ein Tensor mit identisch verschwindender Divergenz sein. Die einzigen unabhängigen aus den  $g_{ik}$ ,  $\varphi_i$  und deren ersten und zweiten Diff. quot. zu bildenden Größen, die sich (A) gegenüber wie symmetrische Tensoren zweiten Ranges verhalten und außerdem linear sind in den zweiten Diff. quot., sind aber neben den schon genannten ( $g_{ik}$ ,  $F_{ik}$ ) nur  $G_{ik}$ ,  $R_{g_{ik}}$ ,  $S_{ik}$  und  $F_{rs} F^{rs} g_{ik}$ . Verlangen wir noch daß die Divergenz des Tensors identisch verschwinden soll, so bleibt als einzige Möglichkeit übrig  $\text{const} G_{ik} + \text{const} g_{ik}$ . Da die  $G^{ik}$  übergehen, so muß also gelten

$$P^{ik} \equiv G^{ik} + \frac{1}{2} \beta^2 S^{ik} \quad (i, k=1, 2, 3, 4) \quad (71)$$

Wir wollen nun die Annahme machen, daß die noch unbestimmte Konstante  $\beta$  folgendermaßen mit der Einsteinschen Gravitationskonstante  $\kappa$  zusammenhängt\*

$$\beta = \sqrt{2\kappa} \quad (72)$$

Wir können dann zufolge (37) den Feldgleichungen der Relat. Theo. die folgende einfache Form geben

$$P^{ik} = -\kappa \Theta^{ik}, \quad T_0^k = -\kappa \Theta_0^k \quad (i, k=1, 2, 3, 4) \quad (73)$$

wo  $\Theta$  den 5-dim. Impulsenergie-Elektrizitätstensor bedeutet.

Da es nicht notwendig ist, die Größe  $\Theta_{00}$  festzulegen, können wir diesen Gleichungen eine noch symmetrischere Form geben, wenn man wir als Definition von  $\Theta_{00}$  noch die folgende Gleichung hinzufügen  
 \* Hätten wir die fünfte Dimension als zeitartig betrachtet, so hätte das Glied  $\frac{1}{2} \beta^2 S^{ik}$  das umgekehrte Zeichen bekommen, was als Argument für die Raumartigkeit der fünften Dimension zu betrachten ist.

$$\Gamma_{00} = -\kappa \Theta_{00} \quad (74)$$

Durch eine einfache Rechnung folgt hieraus

$$\Theta_{00} = \frac{1}{2} g_{ik} \Theta^{ik} + \frac{3}{4} F_{ik} F^{ik} \quad (75)$$

und wir können für die Feldgleichungen schreiben

$$\Gamma_{ik} = -\kappa \Theta_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (76)$$

welches außer (75) eben 14 Bestimmungsgleichungen für die  $g_{ik}$  und  $\varphi_i$  ergibt.

Eine andere Weise, dem Fehlen einer fünfzehnten Feldgleichung Rechnung zu tragen, ergibt sich, wenn wir die Variation des Integrals  $\int \dots \int \sqrt{-\gamma} P dx^0 \dots dx^4$  betrachten, das über ein geschlossenes fünfdimensionales Krümmungsinvariante bedeutet. Man hat nach bekannten Formeln, wenn die  $\gamma_{ik}$  variiert und am Rande des Gebiets festgehalten werden,

$$\delta \int \dots \int \sqrt{-\gamma} P dx^0 \dots dx^4 = - \int \dots \int \sqrt{-\gamma} dx^0 \dots dx^4 \sum \Gamma^{ik} \delta \gamma_{ik} \quad (77)$$

Geben wir nun von vornherein den  $\gamma_{ik}$  die Werte (74), so daß  $\gamma_{00}$  unvariiert bleibt, so folgt auf Grund von (27)

$$\delta \int \dots \int \sqrt{-\gamma} P dx^0 \dots dx^4 = - \int \dots \int \sqrt{-\gamma} dx^0 \dots dx^4 \{ \Gamma^{ik} \delta g_{ik} + 2\beta \Gamma^k_0 \delta \varphi_k \} \quad (78)$$

In derselben Weise folgt

$$\delta \int \dots \int \sqrt{-\gamma} dx^0 \dots dx^4 \sum \Theta^{ik} \delta \gamma_{ik} = - \int \dots \int \sqrt{-\gamma} dx^0 \dots dx^4 \{ \Theta^{ik} \delta g_{ik} + 2\beta \Theta^k_0 \delta \varphi_k \} \quad (79)$$

Wenn  $C$  den nicht zu variierenden Wert von  $\sum \gamma_{ik} \Theta^{ik}$  bedeutet, so wird der Ausdruck linker Hand in der letzten Gleichung offenbar gleich\*

$$\delta \int \dots \int \sqrt{-\gamma} dx^0 \dots dx^4 \{ \sum \gamma_{ik} \Theta^{ik} - C \}$$

wo die  $\gamma_{ik}$  zu variieren sind, so daß wir die Feldgleichungen (73) zu zusammenfassen können durch das Variationsprinzip

$$\delta \int \dots \int \sqrt{-\gamma} dx^0 \dots dx^4 \{ P + \kappa M \} = 0, \quad (80)$$

$$\{ P - \kappa (\sum \gamma_{ik} \Theta^{ik} - C) \}$$

In ähnlicher Weise können die aus den wellenmechanischen Ansätzen (46) für den Tensor  $\Theta^{ik}$  fließenden Feldgleichungen nach (75) durch \* In dem früher vom Verfasser, l.c., S. 898 gegebenen Ausdruck fehlt die Größe  $C$ .

das folgende Variationsprinzip dargestellt werden

$$\delta \int \dots \int \sqrt{-\gamma} dx^0 \dots dx^4 (P + \kappa M) = 0, \quad (81)$$

wo die Variation nach  $\Lambda$  noch zu der Wellengleichung (50) führt.

Ein anderer naheliegender Ausweg, um die volle fünfdimensionale Symmetrie der Feldgleichungen herbeizuführen, ist, die Annahme  $\gamma_{00} = 1$  fallen zu lassen. In der Tat möchte man versucht sein die fünfzehnte Größe  $\gamma_{00}$  in Verbindung zu bringen mit der die Materie charakterisierenden Wellenfunktion  $\Lambda$ , um so eine formale Vereinigung von Materie und Feld zu erreichen. Da ein Versuch in dieser Richtung keine sehr versprechenden Resultate ergeben hat, wollen wir uns hier damit begnügen die Ergebnisse der Rechnung kurz mitzuteilen.

Anstatt der vorhin benutzten  $\gamma_{ik}$  führen wir andere Größen  $\bar{\gamma}_{ik}$  ein, die folgendermaßen mit den alten Größen zusammenhängen

$$\bar{\gamma}_{ik} = e^\Lambda \gamma_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (82)$$

wo  $\Lambda$  irgend eine Funktion von  $x^0, x^1, x^2, x^3, x^4$  bedeutet. Die zu den  $\bar{\gamma}_{ik}$  gehörigen Krümmungsinvariante sei mit  $\bar{P}$  bezeichnet. Dann ergibt sich

$$\bar{P} = e^{-\Lambda} \{ P + 4 \square \Lambda + 3 \sum \gamma^{ik} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k} \} \quad (83)$$

Die zugehörigen Größen  $\bar{\Gamma}^{ik}$  können wir aus der Variationsformel

$$\delta \int \dots \int \sqrt{-\bar{\gamma}} dx^0 \dots dx^4 \bar{P} = - \int \dots \int \sqrt{-\bar{\gamma}} dx^0 \dots dx^4 \sum \bar{\Gamma}^{ik} \delta \bar{\gamma}_{ik}$$

ableiten. Eine einfache Rechnung zeigt nun, daß

$$\delta \int \dots \int \sqrt{-\bar{\gamma}} dx^0 \dots dx^4 \bar{P} = \int \dots \int \sqrt{-\bar{\gamma}} dx^0 \dots dx^4 \{ \bar{\Gamma}^2 P - \frac{16}{3} \sum \gamma^{\mu\nu} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x^\nu} \}, \quad (84)$$

wo  $\bar{\Gamma} = e^{3/4 \Lambda} = (\bar{\gamma}_{00})^{3/4} \quad (85)$

Wenn wir diese Formel mit (81) vergleichen, so scheint im ersten Augenblick mit Rücksicht auf (43) eine Ähnlichkeit zu bestehen. Eine nähere Betrachtung zeigt jedoch, daß diese Ähnlichkeit illusorisch ist, was besonders durch den Zeichen-

unterschied zum Vorschein kommt.

Solange wir uns überhaupt an die klassischen Theorien halten, dürfte die obige Darstellung mit der Annahme  $\gamma_{00} = 1$ , die in sich geschlossen ist und zu den Gesetzen der gewöhnlichen Relat. Thev. führt, die befriedigendste sein. Eine allgemeinere Verwertung der fünfdimensionalen Feldgleichungen kann man wohl erst durch die Einführung der Quantentheorie erwarten, wobei auch die Annahme, dass die  $\gamma_{ik}$  von  $x^0$  unabhängig sind, durch eine ~~ist~~ rationellere zu ersetzen sein wird\*.

\* Die Existenz des elektrischen Elementarquantums legt in der Tat die Annahme nahe, dass die  $\gamma_{ik}$  - wenn wir von der Einführung der Q. Th. in die raum-zeitlichen Relationen vorläufig absehen - als Matrizen von der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha_{ik} & \beta_{ik} e^{\frac{2\pi i}{h} \gamma_0 x^0} \\ \beta_{ik}^* e^{-\frac{2\pi i}{h} \gamma_0 x^0} & \alpha_{ik}^* \end{pmatrix}$$

zu betrachten sind, wo  $\alpha_{ik}$  und  $\alpha_{ik}^*$ ,  $\beta_{ik}$  und  $\beta_{ik}^*$  konjugiert komplex sind, eine Form, die sowohl bei Additionen wie auch Multiplikationen nach den Matrizenrechnungsregeln erhalten bleibt. Es liegt hier ein ~~ist~~ Fall vor, der eine gewisse Ähnlichkeit aufzuweisen scheint mit der von Pauli und Jordan gegebenen Behandlung des rotierenden Elektrons. London (Naturwiss 15 5, 1927) hat auf die Möglichkeit hingewiesen,  $x^0$  als Drehwinkel des Elektrons um seine Achse zu betrachten. Doch dürfte dies kaum zutreffend sein, da nach der Definition von  $x^0$  die zu ihr konjugierte Größe die elektrische Ladung und nicht der Drehimpuls des Elektrons ist. Es scheint jedoch ein innere Zusammenhang zu bestehen zwischen der eben vorgeschlagenen Einführung der fünften Dimension und der von Jordan in antisymmetrischen Lösung der Koordinatenraumgleichung, worauf ich demnächst zurückkommen hoffe.