Theory of the Light Particle 講演.

203 40 41

On Density Matrix in the Theory of the Positron

(April 9, 1936)

4月4日の年会では ~~positron の~~ negative energy の electron による infinite charge density を除く合理的な方法として、electron と positron の complete symmetry から出発し、electron と anti-positron, positron と anti-electron との equivalence を強調した。これによって potential のない時には finite number of electrons and positrons が存在する時の ~~charge density~~ density matrix が finite になる ~~ことを示し~~ 得った。 ~~potential 丈ある~~ field がない場合には Jordan の gauge invariant density matrix を採用することによって矢張り finite にしうる。

しからば、一般に field が存在する時にはどうなるか。

~~それには~~ この問題に対する答は Dirac によれば、

「新しく introduce した density matrix の（必要な条件を満たす） finite ~~solution を求めることに~~, consistent solution を求める」ことにある。consistent という意味は「field が与えられれば、それに相当する多くの可能な ~~無数~~ finite な density matrix が存在しうるが、その中の一つを取り出して、それから charge, current density を求め、~~それから~~ それによって生ずる field を元の field から引き去ると、丁度 vacuum 中の field ~~丈が~~ (chargeless, currentless) ~~sourceless~~ ~~丈~~ に ~~出来る~~ なる様に調節されてある」ことである。

以上の事柄は勿論 Dirac の approximation において言われることで、exact quantum electrodynamics においては density matrix の element 自身が又一つの operator で、~~その為~~ 這 element が必ずしも commutative とは限らず、その中の commutative なもの丈にある値を与えることが出来る。

であるから、この場合には V.R. の強弱が第一の問題になる

§ 1. Commutation Relations for the Density Matrix.

$$R(x', k'; x''k'') = \frac{1}{2}\{\psi_-^\dagger(x''k'')\psi_-(x'k') - \psi_+^\dagger(x''k'')\psi_+(x'k')\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\psi_-^\dagger(x''k'')\psi_-(x'k') - \psi_-(x''k'')\psi_-^\dagger(x'k')\}$$

$$R_{kl} = \frac{1}{2}\{\psi_l^\dagger\psi_k - \psi_l\psi_k^\dagger\}$$

$$R_{kl}^2 = \frac{1}{4}\{\psi_l^\dagger\psi_k - \psi_l\psi_k^\dagger\}\{\psi_l^\dagger\psi_k - \psi_l\psi_k^\dagger\}$$

$$= \frac{1}{4}\{\psi_l^\dagger\psi_k\psi_l^\dagger\psi_k - \psi_l^\dagger\psi_k\psi_l\psi_k^\dagger$$

$$- \psi_l\psi_k^\dagger\psi_l^\dagger\psi_k + \psi_l\psi_k^\dagger\psi_l\psi_k^\dagger\}$$

$$= \frac{1}{4}\{\psi_l^\dagger\psi_k\delta_{kl} + \psi_l^\dagger\psi_l\cdot\psi_k\psi_k^\dagger$$

$$+ \psi_l\psi_l^\dagger\psi_k^\dagger\psi_k + \psi_l\psi_k^\dagger\delta_{kl}\}$$

$$R_{ll}^2 = \frac{1}{4}$$

$$R_{kl}R_{lk} = \frac{1}{4}\{\psi_l^\dagger\psi_k - \psi_l\psi_k^\dagger\}\{\psi_k^\dagger\psi_l - \psi_k\psi_l^\dagger\}$$

$$= \frac{1}{4}\{\psi_l^\dagger\psi_k\psi_k^\dagger\psi_l + \psi_l\psi_k^\dagger\psi_k\psi_l^\dagger\}$$

$$= \frac{1}{4}\{\psi_l^\dagger\psi_k\psi_k^\dagger\psi_l$$

$$R(x'k'; x''k'')$$

$$\psi_-(x'k') = \sum a_\nu \psi_\nu(x'k')$$

$$\psi_{-\nu} = \psi_\nu^*$$

$$\psi_-^\dagger(x''k'') = \sum a_\nu^\dagger \psi_\nu^*(x''k'') = \sum a_{-\nu}^\dagger \psi_\nu(x''k'')$$

$$\frac{1}{2}\{\psi_-^\dagger(x''k'')\psi_-(x'k') - \psi_-(x''k'')\psi_-^\dagger(x'k')\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum\{a_\mu^\dagger a_\nu \psi_\mu^*(x''k'')\psi_{-\nu}(x'k') - a_{-\mu} a_\nu^\dagger \psi_{-\mu}(x''k'')\psi_\nu^*(x'k')\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum\{a_\mu^\dagger a_{-\nu} - a_{-\mu} a_\nu^\dagger\}\psi_\mu^*(x''k'')\psi_{-\nu}(x'k')$$

$N_\nu = 0$ for $\nu > 0$ 　 $\mu,\nu > 0$, $\mu > \nu$: $\{a_\mu^\dagger a_{-\nu} - a_{-\mu} a_\nu^\dagger\}\Psi\begin{pmatrix} N_\mu & N_{-\nu} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{2\mu-1}(-1)^{2\nu+1}\Psi\begin{pmatrix} N_\mu & N_{-\nu} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Psi\begin{pmatrix} N_\mu & N_{-\nu} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$N_\nu = 1$ for $\nu < 0$,

$$\Psi\begin{pmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & ; N_{-1} & N_{-2} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$\Psi(1 \quad \cdots \quad) = 0$$

$$\Psi(\quad \cdots \quad 0 \quad \cdots \quad) = 0.$$

$1, -1, 2, -2, \ldots$

$$\{a_\mu^\dagger a_{-\nu} - a_{-\mu} a_\nu^\dagger\}\Psi\begin{pmatrix} \cdots & N_\mu & \cdots & N_{-\nu} & \cdots \\ & 1 & & 0 & \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{2\mu-1}(-1)^{2\nu+1}\Psi\begin{pmatrix} \cdots & N_\mu & \cdots & N_{-\nu} & \cdots \\ & 0 & & 1 & \end{pmatrix}$$

$$R(x'k'; x''k'') = 0$$

time は除いておく

$$\psi_\nu(x'k') = \psi_\nu^{(0)}(x'k') + \psi_\nu^{(1)}(x'k')$$

$$\left\{\frac{W_\nu + eV}{c} + \vec{\alpha}\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) + \beta mc\right\}\psi_\nu = 0.$$

$$\left\{\frac{W_\nu^{(0)}}{c} + \vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc\right\}\psi_\nu^{(0)} = 0, \quad \left\{\frac{W_{-\nu}^{(0)}}{c} + \vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc\right\}\psi_{-\nu}^{*(0)} = 0$$

$$\left\{\frac{W_\nu}{c} + \vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc\right\}\psi_\nu^{(1)} = -\left\{\frac{W_\nu^{(1)}}{c} + \frac{e}{c}(V + \vec{\alpha}\vec{A})\right\}\psi_\nu^{(0)}$$

$$-\left\{\frac{-W_\nu^{(0)}}{c} + \vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc\right\}\psi_\nu^{*(1)} = -\left\{\frac{W_\nu^{(1)}}{c} + \frac{e}{c}(V + \vec{\alpha}\vec{A})\right\}\psi_\nu^{*(0)}$$

$W_{-\nu}^{(0)} = -W_\nu^{(0)}$ $\quad \psi_\nu^{(0)} = \psi_{-\nu}^{(0)*} \quad \psi_\nu^{(1)} = -\psi_{-\nu}^{(1)*}$

$W_\nu^{(1)} = -W_\nu^{(1)}$

$$\psi_- = \sum a_\nu\left(\psi_\nu^{(0)} + \psi_\nu^{(1)}\right)$$

$$\psi_-^\dagger = \sum a_{-\nu}^\dagger\left(\psi_{-\nu}^{(0)*} + \psi_{-\nu}^{(1)*}\right) = \sum a_{-\nu}^\dagger\left(\psi_\nu^{(0)} - \psi_\nu^{(1)}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left\{\psi_-^\dagger(x''k'')\psi_-(x'k') - \psi_-(x''k'')\psi_-^\dagger(x'k')\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum\left\{a_\mu^\dagger\left(\psi_{-\mu}^{(0)}(x'') + \psi_{-\mu}^{(1)}(x'')\right)a_\nu\left(\psi_\nu^{(0)}(x') + \psi_\nu^{(1)}(x')\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - a_{-\mu}\left(\psi_{-\mu}^{(0)}(x') + \psi_{-\mu}^{(1)}(x')\right)a_{-\nu}^\dagger\left(\psi_\nu^{(0)}(x') - \psi_\nu^{(1)}(x')\right)\right\}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum\left(a_\mu^\dagger a_\nu - a_{-\mu}a_{-\nu}^\dagger\right)\psi_{-\mu}^{(0)}(x')\psi_\nu^{(0)}(x')$$

$$+ \frac{1}{2}\sum\left(a_\mu^\dagger a_\nu + a_{-\mu}a_{-\nu}^\dagger\right)\left(\psi_{-\mu}^{(0)}(x'')\psi_\nu^{(1)}(x') - \psi_{-\mu}^{(1)}(x')\psi_\nu^{(0)}(x')\right)$$

$\mu \neq \nu$ の項を除くと

$$= \frac{1}{2}\sum\left(N_\nu + N_{-\nu} - 1\right)\psi_\nu^{*(0)}(x'')\psi_\nu^{(0)}(x')$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\substack{\nu>0 \\ \nu<0}}\left(N_\nu - N_{-\nu} + 1\right)\left(\psi_\nu^{(0)*}(x'')\psi_\nu^{(1)}(x') - \psi_\nu^{(1)*}(x'')\psi_\nu^{(0)}(x')\right)$$

positive energy state が A であつたり neg. energy state は A で満されてをれば、

$$= \sum_{\nu<0} \left\{ \psi_\nu^{(0)*}(x'') \psi_\nu^{(1)}(x') - \psi_\nu^{(1)*}(x'') \psi_\nu^{(0)}(x') \right\}$$

$$= \sum_{\nu<0} \left[\psi_\nu^{(0)*}(x'') \psi_\nu^{(1)}(x') \right] + \sum_{\nu>0} \psi_{+\nu}^{(1)}(x'') \psi_{+\nu}^{(0)*}(x') \Big]$$

$x'=x''$, $k'=k''$, $-\hbar^2$

$$\sum_{\nu \lessgtr 0} \psi_\nu^{(0)*}(x'') \psi_\nu^{(1)}(x')$$

4 3 2 15
| | | |
12 11 10 9

$$\left\{-\left(\frac{W_\nu^{(0)}}{c}\right)^2 + p^2 + m^2c^2\right\} \psi_\nu^{(1)}(x') = -\left(\frac{W_\nu}{c} + \vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc\right)\left\{\frac{W_\nu^{(1)}}{c} + \frac{e}{c}(V + \vec{\alpha}\vec{A})\right\} \psi_\nu^{(0)}$$

$$\psi_\nu^{(1)}(x') = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2} \iiint \frac{d\vec{r}'' e^{-k|r'-r''|}}{|r'-r''|} \left[\left(\frac{W_\nu^{(0)}}{c} + \vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc\right)\left\{\frac{W_\nu^{(1)}}{c} + \frac{e}{c}(V + \vec{\alpha}\vec{A})\right\} \psi_\nu^{(0)}\right]_{(x'')}$$

$$\psi_\nu^{(1)}(x'k') = -\frac{2\pi m}{\hbar^2} \iiint \frac{d\vec{r}'' e^{-k|r'-r''|}}{|r'-r''|} \left\{\frac{W_\nu^{(0)}}{c}\delta_{k'k'''} + \vec{\alpha}_{k'k'''} + \beta_{k'k'''} mc\right\}$$

$$\left\{\frac{W_\nu^{(1)}}{c}\delta_{k'''k''} + \frac{e}{c}(V\delta_{k'''k''} + \vec{\alpha}_{k'''k''}\vec{A})\right\}$$

$$\psi_\nu^{(0)}(x''k'')$$

20
41

$x'=x''$, $k'=k''$)

$$\sum_{\nu \lessgtr 0} \psi_\nu^{(0)*}(x') \psi_\nu^{(1)}(x')$$

$$= \sum \psi_\nu^{(0)*}(x') \left(-\frac{2\pi m}{\hbar^2}\right) \iiint \frac{d\vec{r}'' e^{-k(r'-r'')}}{|r'-r''|} \} \quad \{\} \quad \} \psi_\nu^{(0)}(x'k')$$

$$= \left(-\frac{2\pi m}{\hbar^2}\right) \iiint \frac{d\vec{r}'' e^{-k|r'-r''|}}{|r'-r''|} \{\cdot\}\{\ \} \ \delta(x'x'')$$

これは potential が [illegible] $\frac{1}{\ }$ の order の ∞ になる。

故に field によって induce される charge density (非対角要素) の 1st app. の計算をやると infinity になる。

しかし、之ははじめから diagonal term をとったからで、non-diagonal term をとると、

$$\sum_{\nu<0} \psi_\nu^{(0)*}(x'')\psi_\nu^{(1)}(x') + \sum_{\nu>0} \psi_\nu^{(1)}(x'')\psi_\nu^{(0)*}(x')$$

これは electromagnetic field の定まった函数である。Dirac, Heisenberg によれば この中から singular な部分を取除いたものが true induced charge (density matrix) になると考へられる。

$$\psi_{k''}\alpha_{k''k''} = \alpha_{k'k''}\psi_{k''}$$

この問題を違った方面から考へられるに、density matrix

$$R(x'k';x''k'') = \frac{1}{2}\left(\psi^\dagger(x''k'')\psi(x'k') - \psi(x''k'')\psi^\dagger(x'k')\right)$$

の満足する式を求めてみる。

$$\left\{\frac{W}{c} + \vec{\alpha}\vec{p} + \rho mc\right\}R = -\frac{1}{2}\left\{\psi^\dagger(x''k'')\,\frac{e}{c}(V' + \vec{\alpha}\vec{A}')\,\psi(x'k')\right.$$

$$\left. + \psi(x''k'')\,\frac{e}{c}(V' + \vec{\alpha}\vec{A}')\,\psi^\dagger(x'k')\right\} = -\frac{1}{2}\left\{\ \right.$$

$$\left\{\frac{W}{c} + \vec{\alpha}\vec{p} + \rho mc\right\}R\left\{\quad\right\} = +\frac{1}{2}\left\{\psi^\dagger(x''k'')\,\frac{e}{c}(V'' + \vec{\alpha}\vec{A}'')\,\frac{e}{c}(V' + \vec{\alpha}\vec{A}')\,\psi(x'k')\right.$$

$$\left. - \psi(x''k'')\,\frac{e}{c}(V'' + \vec{\alpha}\vec{A}'')\,\frac{e}{c}(V' + \vec{\alpha}\vec{A}')\,\psi^\dagger(x'k')\right\}$$

$$= \frac{e}{c}(V'' + \vec{\alpha}\vec{A}'')\ R\ \frac{e}{c}(V + \vec{\alpha}\vec{A})$$

potential がないならば この式は R=0 なる solution をもっている。

しかし

$$\left\{\frac{W+eV}{c}+\vec{\alpha}\left(\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A}\right)+\beta mc\right\}\Psi_-=0$$

$$\left\{\frac{W}{c}+\vec{\alpha}\vec{p}+\beta mc\right\}C\Psi_- = C\left[\left\{\frac{W}{c}+\vec{\alpha}\vec{p}+\beta mc\right\}\Psi_-\right]$$

$$+\left[\left\{\frac{W}{c}+\vec{\alpha}\vec{p}+\beta mc\right\}C\right]\Psi_-=0$$

if $\quad \left\{\frac{W-eV}{c}+\vec{\alpha}\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)+\beta mc\right\}C=0.$

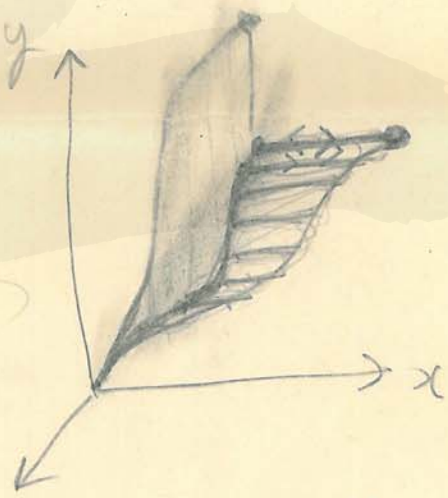
$$WC = eVC \quad \vec{p}\,C=\frac{e}{c}\vec{A}\,C$$

$$C(x)=\exp\frac{ie}{\hbar c}\int_{x_0}^{x}\{\vec{A}\,d\vec{s}-Vc\,dt\}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{ie}{\hbar c}\int\{A_x dx+A_y dy+A_z dz-\frac{\partial}{\partial x}Vc\,dt\}$$

A_x+

$$\Box\lambda=0 \qquad \frac{\partial A}{\partial x}.$$



$$\frac{1}{c}\frac{\partial\lambda}{\partial t}=V,\ -\operatorname{grad}A=\vec{A}$$

$$\overline{\Psi}_-=e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{x_0}^{x}\{\vec{A}\,d\vec{s}-Vc\,dt\}}\psi_-(x,k)=\overline{\Psi}_+^*$$

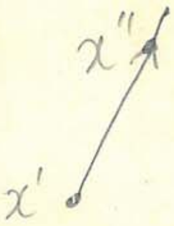
$$\overline{\Psi}_-^*=\psi_-^*(x,k)\,e^{-\frac{ie}{\hbar c}\int_{x_0}^{x}\{\cdots\}}=\overline{\Psi}_+$$

field がある時には　$\overline{\Psi}_-$ 等は 簡単な式を満足しない。
しかし 之等からつくった Density matrix $\overline{R}$ は Eich invariant
で、field のみを含む様 equation を満足する筈である。

$$(\mathcal{H}u)(1+\vec{\alpha}\vec{r})+(1-\vec{\alpha}\vec{r})(Gu)=\cdots$$

$\left\{ \frac{W+eV}{c} + \vec{\alpha}(\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A}) + \beta mc \right\}$

$\left\{ \frac{W-eV}{c} + \vec{\alpha}(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}) + \beta mc \right\} \psi_-^* = 0$



$\left(t\frac{\partial}{\partial t''} + x\frac{\partial}{\partial x''} + y\frac{\partial}{\partial y''} + z\frac{\partial}{\partial z''} \right) e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{x'}^{x''}\{\vec{A}d\vec{s} - Vc\,dt\}}$

$= \frac{ie}{\hbar c}\{\vec{x}\vec{A}(x'') - tV(x'')c\}$

$\boxed{x = x'' - x'}$

$\xi = \frac{x''+x'}{2}$

$\mp\left(t\frac{\partial}{\partial x'} + \cdots\right) e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{x'}^{x''}\{\cdots\}}$

$= \frac{ie}{\hbar c}\{\vec{x}\vec{A}(x') - tV(x')c\}$

$\frac{\partial}{\partial x''} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}$

$\frac{\partial}{\partial x'} = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}$

$\frac{\partial}{\partial x''} - \frac{\partial}{\partial x'} = 2\frac{\partial}{\partial x}$

$\left(t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} \cdots\right) e$

$= \frac{ie}{2\hbar c}\{\vec{x}\vec{A}(x'') - tcV(x'')$

$+ \vec{x}\vec{A}(x') - tcV(x')\}$

$\left\{ \frac{W'+eV'}{c} + \vec{\alpha}(\vec{p}' + \frac{e}{c}\vec{A}') + \beta mc \right\} \psi_-^*(x''k'') e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{x'}^{x''}(\vec{A}d\vec{s} - Vc\,dt)} \psi_-(x'k')$

$=$

$\beta_{k'k'''}(\vec{\alpha}_{k'''k''} u_{k'})$

$(ct - \vec{\alpha}\vec{r})\left\{\left(\frac{W'+eV'}{c} + \vec{\alpha}(\vec{p}' + \frac{e}{c}\vec{A}') + \beta mc\right)u\right\}$ $(\alpha_{k'''k''} u_{k'})\beta_{k'''k''}$

$= \{t(W'+eV') - \vec{r}(\vec{p}' + \frac{e}{c}\vec{A}')\}u + \cdots)(ct+$

$\left[u\left\{\frac{W'-eV'}{c} - \vec{\alpha}(\vec{p}' + \frac{e}{c}\vec{A}') - \beta mc\right\}\right](ct + \vec{\alpha}\vec{r})$

$= +\{(W'+eV') - \vec{r} \qquad \}u -$

$(ct-\vec{\alpha}\vec{r})\{\frac{W'+eV'}{c}\ldots\}u$

$= \{t(W'+eV') - \vec{r}(\vec{p}'+\frac{e}{c}\vec{A}')\}u$

$+$

$u\{\frac{W'+eV'}{c}$

$\rho_1\sigma_x x \rho_1 \sigma_y p_y'$

$= i\sigma_z x p_y'$

$e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{x'}^{x''}\{\vec{A}\,d\vec{s} - cV\,dt\}}$　　$x = x'' - x'$

$\{t(W'+eV') \pm \vec{r}(\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A}')\}$　　$=0$

$(ct-\vec{\alpha}\vec{r})\{\frac{W'+eV'}{c} + \vec{\alpha}(\vec{p}'+\frac{e}{c}\vec{A}') + \rho mc\}u$

$= \{t(W'+eV') - \vec{r}(\vec{p}'+\frac{e}{c}\vec{A}')\}$ $e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{x'}^{x''}(\vec{A}\,d\vec{s} - cV\,dt)} \cdot \psi(x')$

$+ ct(\vec{\alpha}(\vec{p}'+\frac{e}{c}\vec{A}') + \rho mc)$　e

$- i\rho_1\vec{\alpha}[\vec{r}\times(\vec{p}'+\frac{e}{c}\vec{A}')] - \vec{\alpha}\vec{r}\rho mc$　e

$(ct+\vec{\alpha}\vec{r})\{\frac{W'+eV'}{c} - \vec{\alpha}(\vec{p}'+\frac{e}{c}\vec{A}') - \rho mc\}u$

$= \{$　　$\}e$

$- ct$

$$\frac{1}{2}\{\psi_-^*(x''k'')\psi_-(x'k')e^{\frac{ei}{\hbar c}\int_{x''}^{x'}(\vec{A}d\vec{s}-Vc\,dt)}$$

$$-\psi_-(x''k'')\psi_-^*(x'k')e^{-\frac{ei}{\hbar c}\int_{x''}^{x'}(\vec{A}d\vec{s}-Vc\,dt)}\}$$

$$\psi_-(x'k')\psi_-^*(x''k'')$$

$$\cong \frac{1}{2}\sum_{\nu<0}\{\psi_\nu^{(0)*}(x''k'')\psi_\nu^{(0)}(x'k') - \psi_\nu^{(0)}(x''k'')\psi_\nu^{*(0)}(x'k')\}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{ei}{\hbar c}\int_{x''}^{x'}(\vec{A}d\vec{s}-Vc\,dt)\sum_{\nu<0}\{\psi_\nu^{(0)*}(x''k'')\psi_\nu^{(0)}(x'k')+\psi_\nu^{(0)}(x''k'')\psi_\nu^{*(0)}(x'k')\}$$

$$+\sum_{\nu<0}\psi_\nu^{(0)*}(x'')\psi_\nu^{(1)}(x') + \sum_{\nu>0}\psi_\nu^{(1)}(x'')\psi_\nu^{(0)*}(x')$$

~~$$\{\frac{W'+eV'}{c}+\vec{\alpha}(\vec{p}'+\frac{e}{c}\vec{A}')+\rho mc\}(ct-\vec{\alpha}\vec{r})$$~~

~~$$+(ct-\vec{\alpha}\vec{r})\{\frac{W'+eV'}{c}-\vec{\alpha}(\vec{p}'+\frac{e}{c}\vec{A}')-\rho mc\}(ct+\vec{\alpha}\vec{r})$$~~

$$=(ct-\vec{\alpha}\vec{r})\{\frac{W'+eV'}{c}+\vec{\alpha}(\vec{p}'+\frac{e}{c}\vec{A}')+\rho mc\}$$

$$+\{\frac{W'+eV'}{c}-\vec{\alpha}(\vec{p}'+\frac{e}{c}\vec{A}')-\rho mc\}(ct+\vec{\alpha}\vec{r})$$

$$=2(t(W'+eV')-\vec{r}(\vec{p}'+\frac{e}{c}\vec{A}')$$

$$+(W't-tW')-(p_x'x-xp_x')-(\quad)-(\quad)$$

$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $i\hbar$, $-i\hbar$, $4i\hbar$

$$u\{t(W'+eV')-\vec{r}(\vec{p}'+\frac{e}{c}\vec{A}')\}u=0$$

$u\ v$

$$\{\frac{W'+eV'}{c}+\vec{\alpha}(\vec{p}'+\frac{e}{c}\vec{A}')+\rho mc\}v=0$$

$$((tW'-\vec{r}\vec{p}')u)v$$

$$(ct+\vec{\alpha}\vec{r})\{(\frac{W'}{c}+\vec{\alpha}\vec{p}')u\}v$$

$$\psi_-^*(x''k'')\psi(x'k')$$

$\psi'(x'k')\psi^*(xk) - \psi(xk)\psi^{*\prime}(x'k')$

$= \sum a_n \psi_n' a_m^* \psi_m^{*\prime\prime} - \sum a_n \psi_n'' a_m^* \psi_m^{*\prime}$

$= \sum a_n \psi_n' a_m^* \psi_m^{*\prime\prime} - \sum a_{-m} \psi_m^{*\prime\prime} a_{-n}^* \psi_n'$

$= \sum_{m,n} (a_n a_m^* - a_{-m} a_{-n}^*) \psi_m^{*\prime\prime} \psi_n'$.

$= \sum_{m,n>0} (a_n a_m^* - a_{-m} a_{-n}^*)(\psi_m^{*\prime\prime}\psi_n' - \psi_{-m}''\psi_{-n}^{*\prime})$

pure imaginary

$= \sum_{m>0} (N_{-m} - N_{+m})(\psi_m^{*\prime\prime}\psi_m' - \psi_m''\psi_m^{*\prime})$

$+ \sum_{m \neq n}$

$$\frac{1}{2}\Big\{\psi_-^*(x'k')\psi_-(xk) \ldots$$

$$-\left(\psi_-^*(x'k')\psi_-(xk) + \psi_-(x'k')\psi_-^*(xk)\right)\Big\}$$

$$\sum_{n<0} N_n\, \psi_n^*(x'k')\psi_n(xk) - \sum_{n<0} N_n\, \psi_n^*(x'k')\psi_n(x'k')$$

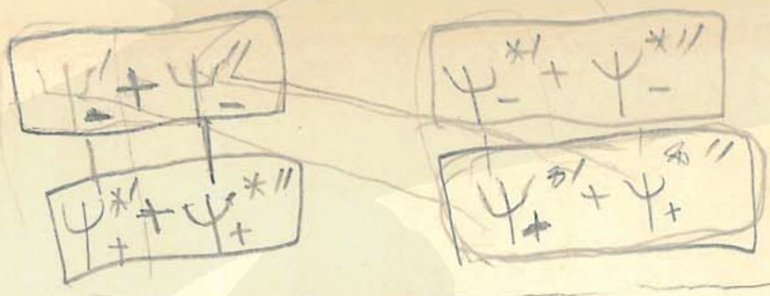
$$- \sum_{n>0} \psi_n^*(x'k')\psi_n(xk)$$

$$\sum_{n<0} N_n\, \psi_n^*(x'k')\psi_n(xk) + \sum_{n>0}(1-N_n)\, \psi_n^*(x'k')\psi_n^*(xk)$$

$$= \sum_{n<0} N_n\, \psi_n^*(x'k')\psi_n(xk) + \sum_{n>0} \psi_n(x'k')\psi_n^*(xk)$$

$$= 2\sum_{n<0} \psi_n^*(x'k')\psi_n(xk)$$

S



$(\psi_+' \pm \psi_+'')$ $\quad (\psi_-' - \psi_-'')$

$$\psi_-^*(x'k')\psi_-(xk) = \left[\psi_+^*(x'k')\left(\psi_+^*(xk) + A\right) + A\right)$$

$$\psi_- - \psi_+^* = A$$

$$\psi_+^* - \psi_+^* = B^*$$

$$\psi_-^*(x'k')\psi_-(xk) \mp \psi_+^*(x'k')\psi_+(xk)$$

$$\psi_+^*(x'k')\psi_+(xk) = \psi_-(x'k')\psi_-^*(xk) =$$