DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

昭和十一年春数物年会講演原稿 NO. 1

軽粒子の理論に就て.

(

1) Neutrino と Antineutrino, Electron と Anti-positron
Positron と Anti-electron の equivalency.

Positron の理論は Dirac, Heisenberg (1934) 等の研究により、~~[illegible]~~ 正しい完全な理論に到る第一近似は行はれたかに見える. これらの場合に於て Density matrix 並びにその quantumelectrodynamical な modification が最も重要な意味をもって居る. しかも symmetrization を行ったもの

$$R_s = \frac{1}{2}\{\psi^*(x'k')\psi(x''k'') - \psi(x''k'')\psi^*(x'k')$$

が用ゐられて居る. positron theory に於ては infinity ~~term~~ を取除くには R_s から夫々 S なる singular part を差引いた

$$r = R_s - S$$

が physical な意味を有すると考へる必要がある.
之れは先 R_s ~~なるものは極めて~~ の symmetrization は anschaulich に極めて適当な意味を有することを示さう.
~~[illegible]~~ electron と positron とは別の particle と考へ、それらの quantized wave function を夫々

$$\left.\begin{matrix}\psi_-(x'k') \\ \psi_+^*(x',k')\end{matrix}\right\} \text{並びに} \left.\begin{matrix}\psi_+(x'k') \\ \psi_+^*(x'k')\end{matrix}\right\}$$

~~とする~~

とすると. ψ_- と ψ_+^* ; ψ_+^* と ψ_- とは夫々同一の wave equation を満足せねばならぬ

neutrino の場合は $\mu=0$ とおいて．

$$\left\{\frac{E}{c}+\alpha^{*}\mathfrak{p}\right\}\psi_0=0 .$$

α's 全部 real に β を imag. にとってあれば．

$$\boxed{\begin{aligned}\psi_0^{*}&=\psi_0 & \psi_+&=\gamma\psi_-^{*}\\ & & \psi_-&=-\gamma\psi_+^{*}\end{aligned}}$$ とすればよい

$\gamma=$ [illegible] $dx\,dy\,dz$
$=\rho_1$

$$\frac{i\hbar\partial}{\partial t}+\alpha\mathfrak{p}+\frac{e}{c}$$

$$\left\{\frac{E+eV}{c}+\alpha\left(\mathfrak{p}+\frac{e}{c}A\right)+\beta mc\right\}\psi_-=0$$

$$\left\{\frac{E-eV}{c}+\alpha\left(\mathfrak{p}-\frac{e}{c}A\right)+\beta mc\right\}\psi_+=0$$

$$\left\{\frac{E}{c}+\alpha\mathfrak{p}+\beta mc\right\}\psi_0=0 .$$

$$\left\{\frac{E-eV}{c}+\alpha^{*}\left(\mathfrak{p}-\frac{e}{c}A\right)\pm\beta^{*}mc\right\}\psi_-^{*}=0$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_x^{*}&=\alpha_x\\ \alpha_y^{*}&=-\alpha_y\\ \alpha_z^{*}&=\alpha_z\\ \beta^{*}&=\beta .\end{aligned}\right\}\quad\left\{\frac{E-eV}{c}+\alpha\left(\mathfrak{p}-\frac{e}{c}A\right)\overset{\rho_3\sigma_y}{\underset{\beta mc}{}}\right\}\psi_-^{*}=0 ,$$

$$\cancel{\alpha_y=\begin{pmatrix} & & -i & \\ & & & i\\ & -i & & \\ i & & & \end{pmatrix}}\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\ i&0&0&-i\\ 0&0&i&0\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\rho_2\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\ i&0&0&0\\ 0&0&0&i\\ 0&0&-i&0\end{pmatrix}\qquad \gamma^2=1\qquad \gamma^{\dagger}=\gamma .$$

$$\| $$

$$i\beta\alpha_x\alpha_z=i\rho_3\cdot\rho_1\sigma_x\cdot\rho_1\sigma_z$$

$$\cancel{(\sigma_x+i\sigma_z)}\ \psi_0=\gamma\psi_0^{*}\qquad (1+\gamma)\psi_0=(1+\gamma)\psi_0^{*}$$

$$\gamma\psi_0=\psi_0^{*}\qquad \psi_0^{*}=\gamma^{*}\psi_0^{*}$$
$$=-\gamma\psi_0$$

$$\boxed{\cancel{\psi_0^{*}=i\gamma\psi_0}}$$

$$\left\{\begin{aligned}\psi_+&=\gamma\psi_-^{*}\\ \psi_+^{*}&=\psi_-\gamma=\gamma^{*}\psi_-\\ \gamma\psi_+&=\psi_-^{*}\end{aligned}\right.$$

$$-\gamma\psi^{*}=\gamma^{*}\psi_+^{*}=\psi_-$$

$$\psi_+^*\alpha_x\psi_+ - \psi_-^*\alpha_x\psi_-$$
$$= \psi_-\gamma\alpha_x\gamma\psi_-^* - \psi_-^*\gamma\alpha_x\gamma\psi_-$$
$$= \psi_-\alpha_x\psi_-^* - \psi_-^*\alpha_x\psi_- = \alpha_x(\psi_-\psi_-^* - \psi_-^*\psi_-)$$
$$\psi_+^*\alpha_y\psi_+ - \psi_-^*\alpha_x\psi_- =$$

$$\boxed{\psi^* = \gamma\psi}$$

$$\psi_+^* = \psi_-^*\gamma$$

而して ψ_-, ψ_+ は夫々 electron 及び positron を一個減ずる operator を意味し, ψ_-^*, ψ_+^* は夫々一個増加する operator を意味する.

而して ~~negative ener~~ electron 及び positron の一つの穴 ~~[illegible]~~ は夫々 positron 及び electron の ~~性質~~ (正負 energy, momentum, spin 等の符號の) と全く同様に振舞ふ。[illegible] この事は. 数式的には

$$\cancel{P}\psi_- = \overset{\rho_3\sigma_y}{\psi_+^*} = \gamma\psi_+^* \quad 及び \quad \psi_+ = \overset{\rho_3\sigma_y}{\psi_-^*} = \gamma\psi_-^*$$

なる関係によつていひあらはすことが出来る. ψ_- 及 ψ_+^*; ψ_+ 及 ψ_-^* は同形の wave equation を満足する故, ある瞬間に上の関係が満足されれば永久にこの関係は成立する. これは el. と anti-positron, posit. と anti-el の equivalency を意味する.

さて例へば, charge density は

~~$e(\psi_+^*\psi_+ -$~~

$$e\left\{\sum_{k'}\{\psi_+^*(x'k')\psi_+(x'k') - \psi_-^*(x'k')\psi_-(x'k')\}\right.$$

で與へられるが, 上の假定を採用すると

$$\frac{e}{2}\left\{\sum_{k'}\{\psi_-^*(x'k')\psi_-^*(x'k') - \psi_-^*(x'k')\psi_-(x'k')\}\right.$$
$$= \frac{e}{2}\sum_{k}\{\psi_+^*(x'k')\psi_+(x'k') - \psi_+(x'k')\psi_+^*(x'k')\}$$

となる. 但し. $\frac{1}{2}$ なる factor は electron と anti-positron の

$$\begin{pmatrix} \psi(11) & \psi(12) & \psi(13) & \psi(14) \\ (21) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -ix-i \\ ix\,i \\ i\,x\,i \\ -ix-i \end{array} \begin{pmatrix} (22) & (21) & (24) & (23) \\ (12) & (11) & (14) & (13) \\ (42) & (41) & (44) & (43) \\ (32) & (31) & (34) & (33) \end{pmatrix} \quad x \sim 1$$

P_{21}, P_{43}.

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} O = = \frac{e}{c} A_x\, O.$$

$O =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x$$

$$\psi_-^*(x''k'')\boxed{\gamma(k''k)\gamma(k'k''')}\psi_-^*(x'k'')$$

$$\parallel$$

$$=$$

の発散を避け得られたのである.

すると. charge density の matrix は

$$\frac{e}{2}\{\psi_+^*(x'k')\psi_+(x''k'')-\psi_-^*(x'k')\psi_-(x''k'')\}$$

$$=\frac{e}{2}\{\psi_-(x''k'')\psi_-^*(x''k'')-\psi_-^*(x'k')\psi_-(x''k'')\}$$

$O_x : P_{21}, P_{43}$

となる. しかし. ~~これは~~ この代りに

$$\frac{e}{2}\{\psi_+^*(x''k'')\psi_+(x'k')-\psi_-^*(x'k')\psi_-(x''k'')\}$$

$$=\frac{e}{2}\{\psi_-(x''k'')\psi_-^*(x'k')-\psi_-^*(x'k')\psi_-(x''k'')\}$$

とおいても差支ないであろう. 之は Heisenberg の R_s の $-e$ 倍に他ならぬ.

次に R_s から差引くべき singular term は D. H によれば極めて複雑である. この困難を避けるには 先 Jordan (97, 535) に従って eichinvariant な ~~dich~~ Density matrix を introduce するのが良い. 即ち, ψ_- の代りに

$$\overline{\psi}_-(x')=\psi_-(x')e^{\frac{2\pi i e}{hc}\int_{x_0}^{x'}A_\mu dx_\mu}$$

をとり. 之から.

$$\overline{R}(x'x'')=\overline{\psi}_-^*(x'')\overline{\psi}_-(x')$$

を作る. 但し, $\int_{x_0}^{x'}$ の積分は直線に沿って行うものとす.

x_0 は fixed point

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........
NO..........

Schrödinger

すると

$$\bar{r}(x'x'') = \bar{R}(x'x'') - \bar{S}(x'x'')$$

$$\bar{S} = S_0 + \frac{a}{s^2} + b \log\left|\frac{s^2}{c}\right|$$

なる形になる。但し、a, b は $x_i = x_i' - x_i''$ 及び field quantities E, H 並びにその $\xi_i = \frac{x_i'+x_i''}{2}$ に関する derivative の函数である。

但し $s^2 = \sum_{i=1}^{3}(x_i' - x_i'')^2 - (x_4' - x_4'')^2$

$$C = 4\left(\frac{\hbar}{\gamma mc}\right)^2. \qquad \gamma = 1.781\cdots \text{(Euler's const)}$$

S_0 は field がない時の $\bar{R}$ である。

しかし、この inhomogeneity term $\bar{S}$ の取方はある程度迄 arbitrary であり、~~従~~ それ近似的な意味しかもたない。

~~Dirac の式 inhomogeneity があるといふことは、一方に於ては~~

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} + \alpha' c p' + \beta' mc^2\right)\bar{R}(x', k'; x'' k'') = 0.$$

or

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} + \alpha' c p' + \beta' mc^2\right)\bar{r}(x', k'; x'' k'') = -(\quad '' \quad)\bar{S}(x', k'; x'' k'')$$

かくすれば field の影響は左辺には直接入って来ないで右辺の inhomogeneity 中に含まれてしまふ。

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO.

physical に意味のある ~~dta~~ $x'=x''$ なる term をとれば $e^{\cdots}$ なる factor は chancel し、通常の ~~matr~~ density matrix を使ったのと同じになる.† (charge, current density) 分布の inhomogeneity の中に ~~spa~~ は、eichinvariant な量だけが入って来る。故に potential は [illegible] 直接には入って来ない事である。

† しかし、space 及び time に関する derivative が入って来てる様な場合には多分変更がある筈だ

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 1

iii) Eichinvarianz の問題.

量子力学では

i) Vertauschungsrelation

ii) Bewegungsgleichung

は q-Zahlrelation と見なされてゐるのに對して,

iii) Nebenbedingung

なるものが別に與へられてゐる.

この相違は, i) によつて或る時刻の variables の間の関係が與へられ, ii) によつて或る時刻と次の時刻の間 variables の間の関係が與へられる. 之等を滿足する variables の system 存在し得るなら, それらが一つの geschlossene な q-Zahl の system を形成するのに對し, iii) は更に ~~その中から~~ ~~が~~ それらの q-Zahl のとりうる eigenwert に制限を與へるもので, Nebenbedingung はとの q-Zahl とも Vertauschbar でないから, ~~それ~~ q-Zahl relation とは見なし得ない.

然し この区別は本質的ではない. ~~i) ii)~~ iii) を ~~滿足する様な~~ ~~(或制限された)~~ と Vertauschbar であるような q-Zahl のみを取出し, それらについて改めて

i), ii), iii)

を aufstellen すれば iii) は最早 Nebenbedingung ではない.

例へば Quantenelektrodynamik に於て $\mathfrak{E}$ と ~~$\mathfrak{H}$~~ A_0 の Vertauschungsrelation, それらに對する Field Equation (Time を含む) は i) ii) で $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 4\pi\rho$ なる関係は

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t'} + \alpha'\mathfrak{p}' + \beta' mc\right)\overline{R'} = f(\mathbb{E},\mathbb{H})\cdot\overline{S'}$$

iii) である。(然し) 二つの間には Eichinvariant Grösse とは vertauschbar である故、はじめから Eichinv. Grösse のみを考へれば i) ii) iii) に於て q-Zahl Relation になる。

此の事は Jordan (   ) によつて強調されてゐる。

然るに ~~$\psi^*(x'k')\psi(x'k')$~~ $\psi^*(x'k')\psi(x'k'')$ の如き量は E.I. であるが、$\psi^*(x'k')\psi(x''k'')$ はさうでない。

そこで eichinvariant にするには

$$\bar{\Psi}(x'k') = \psi(x'k')\, e^{\frac{2\pi i e}{hc}\int_{x_0}^{x'} A_\mu dx_\mu}$$

の如きものをと~~る必要があ~~り、

$$\bar{R}(x'_k x''_{k''}) = \bar{\Psi}^*(x''k'')\,\bar{\Psi}(x''k'')$$

の如きものをとる必要がある。

すると

$$\sum_{k'}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} + \alpha'_{kk'} c\, p' + \beta_{kk'} mc^2\right)\bar{R}(x'_{k'} x''_{k''}) = 0 \qquad (*)$$

$$\left(+\int\cdot\cdot\bar{E}+\int\cdot H\right)$$

となる。

この $\bar{R}$ は従来の R とちがう量ではない関係である。

所で (*) の如き wave equation を満足する故 x', x'' に関する plane wave (の和) に expand 出来る。

$\bar{R}$ の代りに ~~x', x'' に関する~~ $\bar{R}'(x'k'x''k'') = \frac{1}{2}\{\bar{\Psi}^*(x''k'')\bar{\Psi}(x'k')$

$- \bar{\Psi}(x'k')\,\bar{\Psi}^*(x''k'')\}$

をとると ~~pos. energy~~ 有限個の electron と positron とがある時は $\overline{R'}$ ~~が 有限になる 様に~~ 後は light cone 上で singular になる. それから Dirac の求めた singular term を除くといったものを $\overline{S'}$

$$\overline{r'} = \overline{R'} - \overline{S'}$$

とすると,

$$(\quad)\ \overline{r'} = (\quad)\ \overline{S'}$$

explicit に

となるが, この ~~新~~ 式には field の方はどこにも入って来ない,

~~之からして~~ $\overline{R}$ この様にして求めた $\overline{r'}$ 及び 綜合 $\overline{r}$ ~~を定める~~

$$\overline{r} = \overline{\Psi}^*(x''k'')\,\overline{\Psi}(x'k')$$

なる形と assume し, 従って

$$r = e^{''}\,\overline{\Psi}^*(x''k'')\,\Psi(x'k')\,e^{''}$$

を作れば, 之が求める singularity のない Density Matrix だと假定してゐる.

之が, Dirac, Heisenberg の理論から出てくる singularitätsfreie Dichtematrix と如何なる関係にあるかを考察する,

~~之は~~

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO.

iii)

上記の如き Jordan の Eichinvariante Quantelung の方法を iii) の如き ~~第一の場~~ formulation に適用すると.

Jordan の $\overset{\text{Fermi}}{\underset{\text{Bose}}{\mp}}$

$$R^{(0)}(r,r')\left(R^{(0)}(r''r''')\mp\delta(r''r''')\right)$$

$$\pm R^{(0)}(r,r''')\left(R^{(0)}(r''r')\mp\delta(r'r'')\right)=0$$

の代りに Fermi の場合は

$$\left\{R'(r,r')+\frac{1}{2}\delta(r,r')\right\}\left\{R'(r'',r''')-\frac{1}{2}\delta(r'',r''')\right\}$$

$$+\left\{R'(r,r''')+\frac{1}{2}\delta(r,r''')\right\}\left\{R'(r''r')-\frac{1}{2}\delta(r''r')\right\}$$

$$=0$$

なる関係が成立する.

但し、
$$R'(r,r')=\frac{1}{2}\left(\psi^+(r)\psi(r')-\psi(r')\psi^+(r)\right)$$

之は勿論

$$\psi^+(r)\psi(r')+\psi(r')\psi^+(r)=\delta(r,r')$$

なる関係から出発したものである.

neutrino の場合 ψ^+ 及 $\psi(r)$ なる関係の為めに