Neutrino 理論に就て。　　　　Feb. 24, 1936.

Broglie, Wentzel, Jordan, Kronig 等の理論に従って、~~neutrino~~ electromagnetic field は neutrino field から compose されたものとして describe することが出来る。この場合、one dimensional problem に制限して考へると、一つの energy の neutrino state には Rechtsspin のものと Linksspin のものと二つあり、それらの amplitude は

$$a_k a_l + a_l a_k = \delta_{-k,l}$$
$$c_k c_l + c_l c_k = \delta_{-k,l}$$
$$a_k c_l + c_l a_k = 0$$

なる Vertauschungsrelation を満足するとした。
之は、$a_{-k} = a_k^\dagger$　$c_{-k} = c_k^\dagger$ なる Festsetzung から出てくる結果である。この Festsetzung の意味は、「energy E_k なる Rechtsspin をもった neutrino を一つ増すことと、energy $-E_k$ なる Rechtsspin をもった neutrino を一つへらすこととは ~~同一なる~~ physical に同一な operation である」ことを意味してる。考へるとこの仮定は意義でなく、むしろ「energy E_k なる Rechtsspin をもった neutrino を一つ増すことと、energy $-E_k$ なる ~~Rechts~~ Linksspin をもった neutrino を一つへらすこととは physical に同一である」即ち「neutrino と antineutrino とは equivalent である」という仮定をする方が適当である。即ち、

$$c_{-k} = a_k^\dagger \qquad a_{-k} = c_k^\dagger$$

とおくべきで、すると

$$c_k a_l + a_l c_k = \delta_{-k,l}.$$
$$a_k a_l + a_l a_k = c_k c_l + c_l c_k = 0$$

となる。

すると、radiation field の amplitudes を表はす operator は

$$\sqrt{|k|}\, b_k = i \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^\dagger a_{k+l} = i$$

or $\cancel{= \sum c_{-l}\, a^\dagger_{-k+l}}$

$$= i \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{-l}\, a_{k+l}$$

$$= i \sum c_{-l}\, c^\dagger_{-k-l} = i \sum c^\dagger_{-k+l}\, c_l$$

$$b_{-k} = b_{-k}^\dagger$$

次に Kronig の β に相当するものは $+\frac{1}{2}(a_0^\dagger a_0 + c_0 c_0^\dagger)$

$$\beta = i \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^\dagger a_l = i \sum_{l=0}^{\infty} a_l^\dagger a_l + i \sum_{l=1}^{\infty} c_l c_l^\dagger$$

であり、これは neutrino (rechtsspinig なもの) の Gesamtzahl に比例する。

$$= i \sum_{l=-\infty}^{\infty} \cancel{a_l} c_l c_l^\dagger = \mathrm{const}\,\infty - i \sum_{l=-\infty} c_l^\dagger c_l$$

$$\text{or } \beta'' = i \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^\dagger a_l - c_l^\dagger c_l)$$

故に

$$\beta' = i \sum_{l=\infty}^{\infty} (a_l^\dagger a_l \cancel{+} - c_l^\dagger c_l)$$

ととってもよい。~~即ち~~ R.S. の neutrino と L.S. neutrino の number の差である。

neutrino の ~~Vertauschungsrelation~~

Field の total energy は

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} k (L_k + N_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k (a_k^\dagger a_k + c_k^\dagger c_k)$$

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} k M_k = -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} k\, c_l\, a_{k-l}\, c_m\, a_{k-m}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum k (c_l\, \delta_{m-k-l}\, a_{k-m} - c_l c_m\, a_{-k-l}\, a_{k-m})$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l} \cancel{c_l}\, a_{-l}\; k \sum_{m} c_{-k+m}\, a_{k-m} \qquad \cancel{c_{k+m}\, c_{-k-m}}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} k\, c_l$$

$$E = W + \frac{1}{2}\left(B^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$=$$

$k>0$:
Kronig.

$$\sqrt{|k|}\, b_k = i\sum_{l>k} a_l c_{k-l} + i\sum_{0<l<k} a_l c_{k-l} + i\sum_{l<0} a_l c_{k-l} \qquad + a_0 c_k + a_k c_0$$

~~Modified~~ Modified

$$= i\sum_{l>k} a_l a_{k-l} + i\sum_{0<l<k} a_l a_{k-l} + i\sum_{l<0} c_l c_{k-l}$$

$$= i\sum_{l\geq 0} a_l a_{k-l} + i\sum_{l\leq 0} c_l c_{k-l} \qquad + \cancel{a_0 a}$$

$k<0$;
Kronig

$$\sqrt{|k|}\, b_k = i\sum_{0>l>k} a_l c_{k-l} + i\sum_{l>0} a_l c_{k-l} + i\sum_{k>l} a_l c_{k-l}$$

Modified

$$= i\sum_{0>l>k} c_l a_{k-l} + i\sum_{l>0} a_l a_{k-l} + i\sum_{k>l} a_l c_{k-l}$$

$k<0$

$$= i\sum_{l<0} c_l a_{k-l} + i\sum_{l>0} a_l a_{k-l}$$

$$\sqrt{|k|}\, b_k = i\sum_{l>0} a_l a_{-k-l} + i\sum_{l<0} c_l c_{-k-l}$$

故に、$a_k a_l$　$c_k c_l$ なる形の operator は Radiation Field をあらはす。即ち Neutrino-feld の Gesamtspin の変化をあらはす。

$a_k^* c_l$ の如き type の Operator は Neutrino-feld の Gesamtspin が変化しないことを意味する。之れは Radiation に関係のない部分である。

$$B = i\sum_{l=0}^{\infty} a_l a_l + i\sum_{l=0}^{\infty} c_l c_l$$

$$= i\sum_{l=0}^{\infty} a_l c_l^{\dagger} + i\sum_{l=0}^{\infty} a_l^{\dagger} c_l .$$

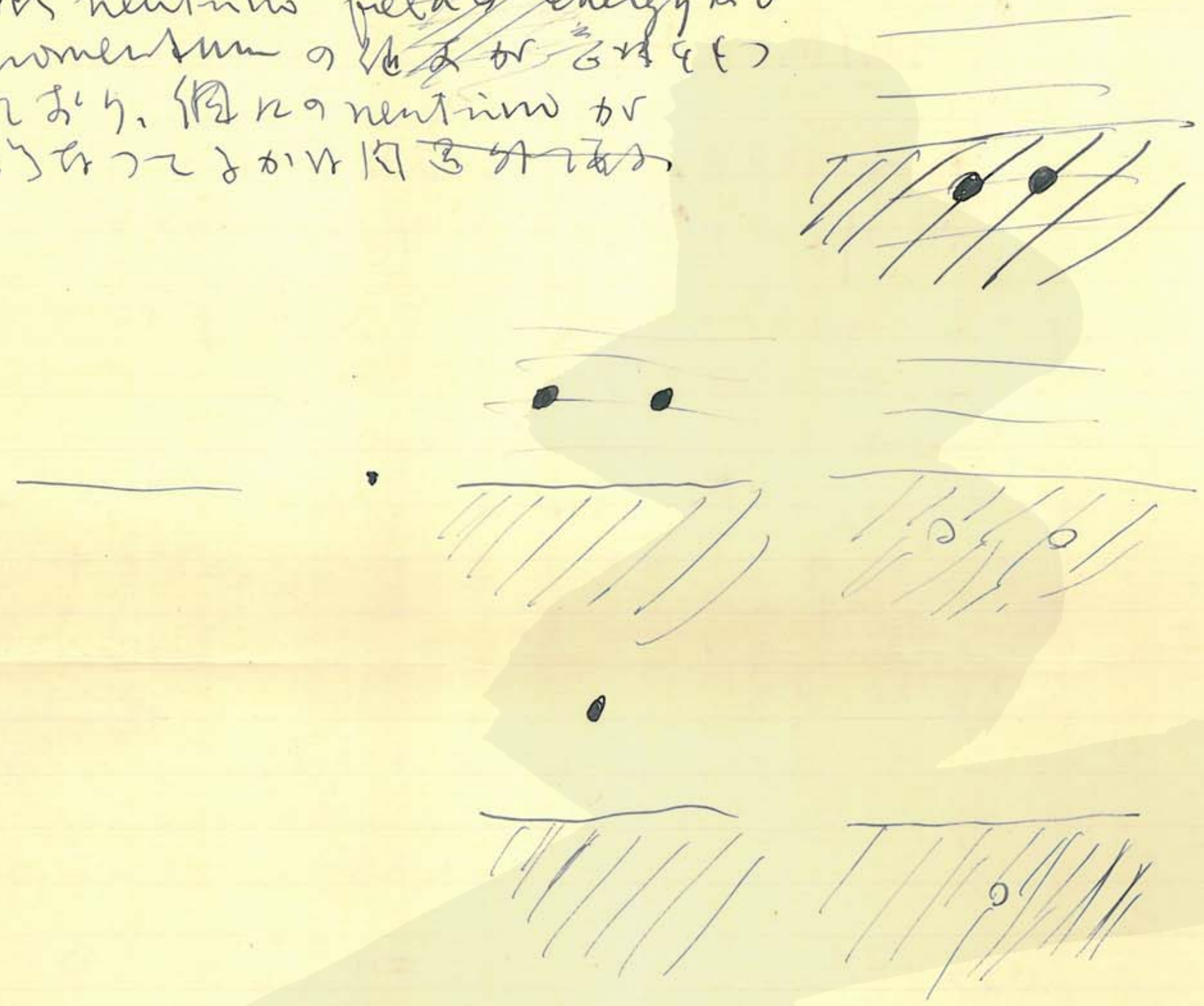
electron ~~と~~ state から neutrino state への transition ~~の interaction~~ によって neutrino の total number がかはる場合は ~~[illegible]~~ どうなるか;

或る直觀

neutrino のある probab. は常に $\frac{\delta}{2}$ である。即ち neutrino の number といふものは意味がない。

~~[illegible]~~ energy, momentum 丈の意味の問題である.

即ち neutrino field の energy 及び momentum の値丈が意味をもつ ており、個々の neutrino が どうなつてゐるかは問題外である。



neutrino の ~~of~~ いろいろ field quantity ψ_0 と $\psi_0^\dagger$ とは同一物であるとおく. density

$$N_0 = \psi_0^\dagger \psi_0$$

は当然

$$N_0(N_0 - \delta) = 0$$

を満足しない.

$\because$

$$\psi_0^\dagger(x)\psi_0(x') + \psi_0(x')\psi_0^\dagger(x) = \delta(x x')$$

$$\therefore \psi_0(x)\psi_0(x') + \psi_0(x')\psi_0(x) = \delta(x, x')$$

$$N_0 = \frac{\delta}{2}. \quad \psi_0^2(x) = \frac{1}{2}\delta \qquad \cancel{\psi_0^\dagger(x)\psi_0(x')(\psi_0^\dagger + \psi_0)} =$$

$$\cancel{\psi_0 = \psi_0^\dagger} \qquad =$$

$$\cancel{a_m a_n} + a_n a_m = \delta_{mn}$$

$$\psi_0 = \sum_k a_k e^{ikx} \quad = \sum_{k\geq 0}(b_k \sin kx + c_k \cos kx)$$

$$\psi_0^\dagger = \sum_k a_k^\dagger e^{-ikx} \quad = \sum_{k\geq 0}(b_k^\dagger \sin kx + c_k^\dagger \cos kx)$$

$$b_k = b_k^\dagger \quad c_k = c_k^\dagger.$$

$$a_{-k} = a_k^\dagger$$

$$a_k^\dagger a_l + a_l a_k^\dagger = \delta_{kl}$$

$$a_{-k} a_{+l} + a_l a_{-k} = \delta_{kl}$$

$$a_l^2 = 0 \quad \text{for } l \neq 0.$$

$$a_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big/ \sqrt{l} \quad l>0 \qquad a_{-l} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Big/ \sqrt{l} \quad l > 0$$

$$a_l^\dagger a_l =$$

$$\psi_0^\dagger(x)\psi_0(x') = \sum a_k^\dagger a_l \; e^{-i(kx - lx')}$$

$$\psi_0^\dagger(x)\psi_0(x) = \sum_{k,l} a_k^\dagger a_l \; e^{-i(k-l)x} = \sum_{k,l} a_{-k} a_l e^{i(k+l)x}$$

$$= \sum_l \left(\sum_k a_k a_{l-k} e^{ilx} \right)$$

neutrino と radiation field との関係はしばらくおき、electron, positron, neutrino を一緒にして light particle の性質について考へて見る。

先づ最初にこの三つの状態を區別的に考へ、それの state を表はす wave function ~~Zustand~~ は夫々 wave equation

$$\left(\cancel{p_0 + \frac{e'V}{c}} + \alpha\left(p + \frac{e'}{c}A\right) + \beta mc\right)\begin{matrix}\psi_- = 0\\ \psi_0\\ \psi_+\end{matrix}$$

$$\left(\frac{p_0 + eV}{c}\right) \qquad e' = 1,\ 0,\ -1$$

を満足するとする。ψ_-, ψ_0, ψ_+ を operator と考へると、それの adjungiert な operator $\psi_-^\dagger, \psi_0^\dagger, \psi_+^\dagger$ は夫々 ψ_+, ψ_0, ψ_- と同じ equation を満足する。

故に若し特別に $\psi_-^\dagger = \psi_+,\ \psi_0^\dagger = \psi_0,\ \psi_+^\dagger = \psi_-$ であったならば、いつまでもこの関係は保存されるであらう。この関係は physically には ~~negative~~ anti-electron, anti-neutrino, anti-positron が夫々 positron, neutrino, electron に equivalent なることを示す。

さてそこで $\psi = \frac{1}{2}(\psi_- + \psi_0 + \psi_+)$ なる operator を考へると

$$\psi^\dagger = \frac{1}{2}(\psi_-^\dagger + \psi_0^\dagger + \psi_+^\dagger) = \cancel{\psi} = \frac{1}{2}(\gamma\psi_+ + \gamma\psi_0 - \gamma\psi_-) \ ?$$

となる。~~故に light particle に関する field quantity ψ は Hermitic になる。~~

さて問題はこの ~~様な~~ ~~electron と~~ electron - neutrino - positron の間の transition を可能とした時に electron の stability である。

electric charge, current density は夫々

$$\frac{e}{2}(-\psi_-^\dagger\psi_- + \psi_+^\dagger\psi_+) \qquad \frac{ec}{2}(-\psi_-^\dagger\alpha\psi_- + \psi_+^\dagger\alpha\psi_+)$$

で與へられる筈である。之は electron, positron の transition を表はす operator である。~~Poten~~ 之に對して、

$$\frac{1}{2}(\psi_+^\dagger\psi_0 - \psi_0^\dagger\psi_-) \quad \text{etc}$$

之は photon 放射で得ない筈である

(anti-neutrino)- (anti-electron) (anti-positron) (anti-neutrino)

は neutrino を ~~electron~~ 及 positron に, electron を anti-neutrino に ~~変~~ かへる如き operator である. 之は +e なる charge をもった quantum の吸収又は −e なる charge をもった quantum の発生と等しい.

次に

$$\frac{1}{2}(\psi_-^\dagger \psi_0 + \psi_0^\dagger \psi_+) \qquad etc$$

なる operator は ~~neu~~ neutrino を ~~posi~~ electron に, positron を neutrino にかへる如き operator を意味し. 之は −e なる charge をもった quantum の吸収又は +e なる charge をもつ quantum の発生と等しいと考へられる.

(positron と electron の間の transition に相当する

$$\psi_-^\dagger \psi_+ - \psi_+^\dagger \psi_- = \cancel{\psi_+^2 - \psi_-^2}\ \cancel{etc}$$

なる operator は 0 になる.

$$\psi_-^\dagger \alpha \psi_+ - \psi_+^\dagger \alpha \psi_- = \psi_+ \gamma\alpha \psi_+ - \psi_- \gamma\alpha \psi_-$$

$$= \cancel{\psi_{+i}\gamma\alpha_{ik}\psi_{+k} - \psi_{-i}\alpha_{ik}\psi_{-k}}$$

$$= 0.$$

$\gamma\alpha_x = \rho_2\sigma_3$
$\gamma\alpha_y = i\rho_2$
$\gamma\alpha_z = -\rho_2\sigma_1$

neutrino と anti-neutrino の間の transition はどうなるか. de Broglie 等の理論では. これが ~~neu~~ radiation field と equivalent であると考へる.)

さて charge ±e なる quantum の proper mass はどの位であるか; ~~$\psi^\dagger\psi$~~ それは interaction の range によって定まる.
high speed electron は spontaneous に

$$\gamma\alpha_x = \rho_2\sigma_y\rho_1\sigma_x = -\rho_3\sigma_z$$

$$\gamma\alpha_y = \rho_2\sigma_y\rho_1\sigma_y = \rho_3$$

$$\gamma\alpha_z = \rho_2\sigma_y\rho_1\sigma_z = \rho_3\sigma_x$$

$$\psi_k^\dagger \psi_l + \psi_l \psi_k^\dagger = \delta_{kl} \qquad \cancel{\psi_k\psi_l+\psi_l\psi_k=0}$$

$$\{\psi_+^\dagger(k) + \psi_0^\dagger(k) + \psi_-^\dagger(k)\}$$
$$\times\{\psi_+(k) + \psi_0(k) + \psi_-(k)\}$$
$$+\{\psi_+(l) + \psi_0(l) + \psi_-(l)\}$$
$$\times\{\psi_+^\dagger(k) + \psi_0^\dagger(k) + \psi_-^\dagger(k)\} = \delta_{kl}$$

$$\{\psi_+(k) + \psi_0(k) + \psi_-(k)\}$$
$$\times\{\psi_+(k) + \psi_0(l) + \psi_-(l)\}$$
$$+\{\psi_+(l) + \psi_0(l) + \psi_-(l)\}$$
$$\times\{\psi_+(k) + \psi_0(k) + \psi_-(k)\} = 0.$$

$$\psi_+^\dagger(k) = \psi_-(k) \qquad \psi_-^\dagger(k) = \psi_+(k)$$
$$\psi_0^\dagger(k) = \psi_0(k).$$

$$\begin{array}{ccc} \psi_- & \psi_0 & \psi_+ \\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{array}$$

$$\psi_-\begin{pmatrix}0\\ \cdot\\ \cdot\end{pmatrix} = 0.$$
$$\psi_0\begin{pmatrix}\cdot\\0\\ \cdot\end{pmatrix} = 0$$
$$\psi_+\begin{pmatrix}\cdot\\ \cdot\\0\end{pmatrix} = 0$$
$$\psi_-^\dagger\begin{pmatrix}1\\ \cdot\\ \cdot\end{pmatrix} = 0$$
$$\psi_0^\dagger\begin{pmatrix}\cdot\\1\\ \cdot\end{pmatrix} = 0$$
$$\psi_+^\dagger\begin{pmatrix}\cdot\\ \cdot\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$\cancel{\ldots}\{\psi_-(k) + \psi_0(k) + \psi_+(k)\}$$
$$\times\{\psi_+^\dagger(l) + \psi_0(l) + \psi_-(l)\}$$
$$+\{\qquad\}$$
$$\times\{\qquad\} = \delta_{kl}$$

$$\psi_-(k)\psi_-^\dagger(l) + \psi_-^\dagger(l)\psi_-(k) = \delta_{kl}$$
$$\psi_-(k)\psi_0^\dagger(l) + \psi_0^\dagger(l)\psi_-(k) = 0$$
etc.

$$\psi_0 = \psi_0^\dagger. \qquad \psi_0\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \cdot\end{pmatrix} \neq 0.$$
$$\psi_0^2\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \cdot\end{pmatrix}$$

ψ_-

$\int \psi^\dagger H \psi$

$\int \psi_0 H_0 \psi_0$

$$\frac{1}{2}\int (\psi_-^\dagger H_- \psi_- + \psi_+^\dagger H_+ \psi_+) = \frac{1}{2}\int (\psi_-^\dagger H_- \psi_- \cancel{\pm} \psi_- (\tilde{H}_- \psi_-^\dagger) \}$$

$$= \frac{1}{2}\int (\psi_-^\dagger H_1 \psi_-) - \frac{1}{2}\int (\alpha \psi_- \psi_-^\dagger)$$

$$-(H_- \psi_-) \psi_-^\dagger)$$

$$-2i\hbar \dot{\psi}_0 = [\tfrac{1}{2}\int \psi_0 H_0 \psi_0 \cdot \psi_0']$$

$$= \int \psi_0 H_0 (\delta - \psi_0' \psi_0) - \psi_0 \int \psi_0 H_0 \psi_0$$

$$= \psi_0 H_0 \cancel{2}\int \psi_0 \psi_0' \cdot H_0 \psi_0 - \int \psi_0' \psi_0 H_0 \psi_0$$

$$= \psi_0 H_0 - \int (\delta - \psi_0' \psi_0) H_0 \psi_0 - \int \psi_0' \psi_0 H_0 \psi_0$$

$$= \psi_0 H_0 - H_0 \psi_0 = -2 H_0 \psi_0$$

$$\boxed{\psi_0^* = \gamma \psi_0}$$