○ ~~Spiegelungsinvarianz~~ の問題,
k≠l の場合.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 1

Tが $u_i v^{\dot i}$ が 交換する これは
A の ~~operator を diagonalize~~ する
operator の一つがこれであることから
わかる.

# Dirac の Generalized Wave Equation に就て.

## §1. Introduction

Dirac の最近の勞作によると 相對論的 Schrödinger 方程式を linearize する方法は幾通りも在って, その仕方に應じて種々な大さの Spin をもつ粒子の波動方程式が得られる.

彼に從て粒子に固有な互に commute する二つの Angular Momentum $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ を考へる. それ等の大さを夫々 $k, l\ (=0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \cdots)$ とするとその成分は夫々 $(2k+1)$行$(2k+1)$列 並びに $(2l+1)$行$(2l+1)$列の行列である. この行列から

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_z - k = -u^1 v_1 & \alpha_x - i\alpha_y = -u^1 v_2 \\ \alpha_x + i\alpha_y = -u^2 v_1 & -\alpha_z - k = -u^2 v_2 \\ \multicolumn{2}{c}{v_1 u^1 + v_2 u^2 = 2k+1} \\ \beta_z - l = -u_{\dot 1} v^{\dot 1} & \beta_x - i\beta_y = -u_{\dot 1} v^{\dot 2} \\ \beta_x + i\beta_y = -u_{\dot 2} v^{\dot 1} & -\beta_z - l = -u_{\dot 2} v^{\dot 2} \\ \multicolumn{2}{c}{v^{\dot 1} u_{\dot 1} + v^{\dot 2} u_{\dot 2} = 2l+1} \end{array}\right\} \quad (1)$$

の関係で導かれる $(2k+1)$行$(2k)$列の行列 $u^\mu$, $(2k)$行$(2k+1)$列の行列 $v_\mu$, $(2l+1)$行$(2l)$列の行列 $u_{\dot\mu}$, 及び $(2l)$行$(2l+1)$列の行列 $v^{\dot\mu}$ を用ひて新波動方程式は次の形に書かれる

$(2k+1)2l + 4k(2l+1)$

$$p^{\dot\mu\nu} v_\nu \psi_A = m' v^{\dot\mu} \psi_B$$
$$p_{\dot\mu\nu} v^{\dot\mu} \psi_B = m'' v_\nu \psi_A$$

$p^{\dot 1 1} = p_t - p_z$, $p^{\dot 2 1} = -(p_x - ip_y)$, $p^{\dot 1 2} = -(p_x + ip_y)$, $p^{\dot 2 2} = p_t + p_z$

$\psi_A, \psi_B$ は波動函数の二つの成分で, その各々は更に夫々 $(2k+1)\times 2l$ 個並びに $(2l+1)\times 2k$ 個の成分をもつ. $p^{\dot\mu\nu}$ 等は Vierervektor $(p_t, \vec{p})$ より造られる Spinor の成分である. $m', m''$ は $m$ を粒子の質量とすると

$$2\cdot(2k\cancel{+1})\cdot 2l + 2(2l\cancel{+1})2k = 16kl$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

$\psi_\nu \to 2k\,2l \times 2$
$\psi^\mu \to 2k\cdot 2l \cdot \times 2$

DATE
NO. 2

$$\mu^2 = \frac{m^2}{kl} \qquad \mu = \frac{m}{\sqrt{kl}}$$

$$\left.\begin{aligned} m'm'' &= m^2 \\ \frac{m'}{k} &= \frac{m''}{l} \geq \mu \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Hermit 型 といふ條件からくる.

の関係をもつ粒子に固有な常数である.

(2) を普通の形でかくと

$$\left.\begin{aligned} P_t\psi_A + k^{-1}\vec\alpha\vec P\psi_A - \tfrac12 m'k^{-1}(u'v' + u^2v^2)\psi_B &= 0 \\ P_t\psi_B - l^{-1}\vec\beta\vec P\psi_B - \tfrac12 m''k^{-1}(u_1v_1 + u_2v_2)\psi_A &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

なる波動方程式と其他に多くの supplementary condition が得られる.

それ spin と momentum の間の関係をあらはす, 両者が independent でない

$$16kl - (2k+1)2l - 2k(2l+1) = 8kl - 2(k+l)$$

$$\left.\begin{aligned} P_t &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \\ \vec P &= -i\hbar\,\mathrm{grad} - e\vec A \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

であるから Hamiltonian は

$$H = \begin{bmatrix} -k^{-1}\vec\alpha\vec P + eA_0, & \tfrac12 m'k^{-1}(u'v' + u^2v^2) \\ \tfrac12 m''l^{-1}(u_1v_1 + u_2v_2), & l^{-1}\vec\beta\vec P + eA_0 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

で与えられる.

§2. Density. Current

新理論に於ける Density 及 Current の Expression を求める.

(4) の各式に $\psi_A^*$, $\psi_B^*$ をそれぞれ左乘し (4) と conjugate complex な式に $-\psi_A$, $-\psi_B$ を右乘して全部加へ合すと

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi_A^*\psi_A + \psi_B^*\psi_B) - k^{-1}\mathrm{div}(\psi_A^*\vec\alpha\psi_A) - l^{-1}\mathrm{div}(\psi_B^*\vec\beta\psi_B) = 0$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 3

* これ [illegible] $\dot{x} = \frac{i}{\hbar}(xH - Hx)$ を計算すると $= \begin{pmatrix} -k^{-1}\vec{\alpha} & \\ & l^{-1}\vec{\beta} \end{pmatrix}$ を得る. なお $\vec{i}$ と $\dot{x}$ とは共に operator であるはずなら [illegible] であろう.

を得る. 従て

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \psi_A^* \psi_A + \psi_B^* \psi_B \\ \vec{i} &= -k^{-1} \psi_A^* \vec{\alpha} \psi_A + l^{-1} \psi_B^* \vec{\beta} \psi_B \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

とおくと 連續の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{i} = 0$$

が充されるから $\rho$, $\vec{i}$ を Density 及 Current と解釋してよい.*

## §.3. 磁氣能率

(2)から $\psi_A$, $\psi_B$ を消去した式をつくると

$$\left.\begin{aligned} P_{\dot{\mu}\nu} P^{\dot{\mu}\lambda} v_\lambda \psi_A &= m^2 v_\nu \psi_A \\ p^{\dot{\mu}\nu} P_{\dot{\lambda}\nu} v^{\dot{\lambda}} \psi_B &= m^2 v^{\dot{\mu}} \psi_B \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Spinor Analysis の計算により

$$P_{\dot{\mu}\nu} P^{\dot{\mu}\lambda} v_\lambda = \frac{1}{2} P^{\dot{\mu}\lambda} P_{\dot{\mu}\lambda} v_\nu + \frac{1}{2}(P^{\dot{\mu}}{}_\lambda P_{\dot{\mu}\nu} - P_{\dot{\mu}\nu} P^{\dot{\mu}}{}_\lambda) v^\lambda$$

$$p^{\dot{\mu}\nu} P_{\dot{\lambda}\nu} v^{\dot{\lambda}} = \frac{1}{2} p^{\dot{\lambda}\nu} P_{\dot{\lambda}\nu} v^{\dot{\mu}} + \frac{1}{2}(p^{\dot{\mu}}{}_\nu p^{\dot{\lambda}\nu} - p^{\dot{\lambda}\nu} p^{\dot{\mu}}{}_\nu) v_{\dot{\lambda}}$$

所が

$$\frac{1}{2} p^{\dot{\mu}\lambda} p_{\dot{\mu}\lambda} = P_t^2 - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2$$

$$\frac{1}{2}(p^{\dot{\mu}}{}_\lambda P_{\dot{\mu}\nu} - P_{\dot{\mu}\nu} P^{\dot{\mu}}{}_\lambda) = -i\frac{\hbar e}{2} g_{\lambda\nu}$$

$$\frac{1}{2}(p^{\dot{\mu}}{}_\nu p^{\dot{\lambda}\nu} - p^{\dot{\lambda}\nu} p^{\dot{\mu}}{}_\nu) = i\frac{\hbar e}{2} g^{\dot{\mu}\dot{\lambda}}$$

但し $g_{\lambda\nu}$, $g_{\dot{\mu}\dot{\nu}}$ は電磁場 $\vec{E}$, $\vec{H}$ より次の関係で導かれた Spinor である

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 4

$$\left.\begin{array}{l} g_{11}=2(k_y'-ik_x'),\ g_{22}=2(k_y'+ik_x'),\ g_{12}=g_{21}=2ik_z' \\ g_{\dot 1\dot 1}=2(k_y+ik_x),\ g_{\dot 2\dot 2}=2(k_y-ik_x),\ g_{\dot 1\dot 2}=g_{\dot 2\dot 1}=-2ik_z \\ \vec{k}=\vec{H}-i\vec{E},\qquad \vec{k}'=\vec{H}+i\vec{E} \end{array}\right\} \quad (9)$$

これ等の関係により (8) は次の様に書直される

$$(P_t^2-P_x^2-P_y^2-P_z^2)\,v_\nu\psi_A+i\frac{\hbar e}{2}g^\lambda{}_\nu v_\lambda\psi_A=m^2v_\nu\psi_A$$
$$(P_t^2-P_x^2-P_y^2-P_z^2)\,v^{\dot\mu}\psi_B-i\frac{\hbar e}{2}g^{\dot\mu}{}_{\dot\lambda}v^{\dot\lambda}\psi_B=m^2v^{\dot\mu}\psi_B$$

これ等に夫々 $u^\nu$, $u_{\dot\mu}$ を左乗して (2) 及 (9) の関係を考慮すれば

$$\left.\begin{array}{l}(P_t^2-P_x^2-P_y^2-P_z^2)\psi_A+e\hbar\,k^{-1}(\vec{\alpha}\vec{H}+i\vec{\alpha}\vec{E})\psi_A-m^2\psi_A=0 \\ (P_t^2-P_x^2-P_y^2-P_z^2)\psi_B+e\hbar\,l^{-1}(\vec{\beta}\vec{H}-i\vec{\beta}\vec{E})\psi_B-m^2\psi_B=0\end{array}\right\}(10)$$

(10) から relativistic correction を neglect して non-relativistic な Hamiltonian を出せば
普通の Schrödinger の式にあらわれるものの他に

$$-\frac{\hbar e}{2m}\begin{pmatrix}k^{-1}\vec{\alpha}\vec{H} & 0\\ 0 & l^{-1}\vec{\beta}\vec{H}\end{pmatrix}-i\frac{\hbar e}{2m}\begin{pmatrix}k^{-1}\vec{\alpha}\vec{E} & 0\\ 0 & -l^{-1}\vec{\beta}\vec{E}\end{pmatrix}$$

なる項が加はる。従て この粒子は

$$\frac{\hbar e}{2m}\begin{pmatrix}k^{-1}\vec{\alpha} & 0\\ 0 & l^{-1}\vec{\beta}\end{pmatrix} \quad (11)$$

なる磁気能率 と

$$i\frac{\hbar e}{2m}\begin{pmatrix}k^{-1}\vec{\alpha} & 0\\ 0 & -l^{-1}\vec{\beta}\end{pmatrix} \quad (12)$$

なる電気能率 をもつと解釈出来る.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 5

§4. Spin

最初考へた $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ と Spin との関係を判然とさすために静電中心場

$$A_0(\vec{r}) = A_0(r) \qquad \vec{A} = 0$$

に於て Angular Momentum の Integral を求める.

Hamiltonian は (6) により

$$H = \begin{bmatrix} -k^{-1}\vec{\alpha}\vec{p} + eA_0 & \frac{1}{2}m'k^{-1}(u'v_i + u^2v_2) \\ \frac{1}{2}m''l^{-1}(u_1v_1 + u_2v_2) & l^{-1}\vec{\beta}\vec{p} + eA_0 \end{bmatrix}$$

で与えられる. 軌道角運動量 $\vec{m}$ は

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (\text{但し此處では } \vec{p} = -i\hbar\,\mathrm{grad})$$

で定義され $\vec{m}$ の時間的変化を

$$\dot{\vec{m}} = [\vec{m}, H]$$

で求めると右辺は消えない. 例へば

$$\dot{m}_z = \begin{bmatrix} k^{-1}(-\alpha_x p_y + \alpha_y p_x) & 0 \\ 0 & l^{-1}(\beta_x p_y - \beta_y p_x) \end{bmatrix}$$

$2l+1$

$(2k\times 2l$

今

$$\left.\begin{aligned} \alpha_x' &= -\frac{v_2u' + v_1u^2}{2} & \beta_x' &= -\frac{v'u_2 + v^2u_1}{2} \\ \alpha_y' &= \frac{v_2u' - v_1u^2}{2i} & \beta_y' &= \frac{v^2u_1 - v'u_2}{2i} \\ \alpha_z' &= \frac{v_2u^2 - v_1u'}{2} & \beta_z' &= \frac{v^2u_2 - v'u_1}{2} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

で定義される $\vec{\alpha}', \vec{\beta}'$ を導くと これらは Angular Momentum と同じ交換関係を満し

$$\left.\begin{aligned} \alpha_x'^2 + \alpha_y'^2 + \alpha_z'^2 &= (k - \tfrac{1}{2})(k + \tfrac{1}{2}) \\ \beta_x'^2 + \beta_y'^2 + \beta_z'^2 &= (l - \tfrac{1}{2})(l + \tfrac{1}{2}) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 6

の関係が導かれるから $\vec{\alpha}', \vec{\beta}'$ は大さ $k-\frac{1}{2}$, $l-\frac{1}{2}$ の Angular Momentum と考へられる.

此 $\vec{\alpha}', \vec{\beta}'$ を用ひて次の式により $\vec{s}$ なる Angular Momentum を定義する

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}' + \vec{\beta}' & 0 \\ 0 & \vec{\beta}' + \vec{\alpha}' \end{bmatrix} \qquad (15)$$

この $\vec{s}$ と $\vec{m}$ との和

$$\vec{M} = \vec{m} + \vec{s}$$

に就て

$$\dot{\vec{M}} = [\vec{M}, H]$$

を計算して見ると右辺は消えることが分り $\vec{M}$ は constant of motion である. 從て上に定義した $\vec{s}$ が粒子のスピンに相当する量と考へられる.

$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\alpha}', \vec{\beta}'$ はきまった大さ $k, l, k-\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}$ をもって居るが $\vec{s}$ の大さは state により異る. 角運動量の合成則により $\vec{s}$ の大さのとりうる値は

$$k+l-\tfrac{1}{2},\ k+l-\tfrac{3}{2},\ \cdots\cdots,\ \mathrm{Min.}\{|k-l+\tfrac{1}{2}|, |k-l-\tfrac{1}{2}|\}$$

である. $k=l=\frac{1}{2}$ の場合には

$$\vec{\alpha}'=0 \qquad \vec{\beta}'=0$$

となり

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha} & 0 \\ 0 & \vec{\beta} \end{bmatrix}$$

で $\vec{s}$ の大さは常に $\frac{1}{2}$ である.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. [7]

$$u^1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & \sqrt{3} & \\ 0 & & \cdots & 0 & \sqrt{2k} \end{pmatrix}$$

$$u^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2k} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \sqrt{2k-1} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & \sqrt{2} & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \sqrt{2k} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2k} & \cdots & & & 0 \\ & \sqrt{2k-1} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & \sqrt{2} & \\ 0 & \cdots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$k = \frac{1}{2}$.

$u^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_1 = (0 \; 1) \quad v_2 = (1 \; 0)$

$u^1 v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$u^2 v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v_1 u^1 = 1 \quad v_2 u^2 = 1$

$v_1 u^2 = 0 \quad v_2 u^1 = 0$

$\alpha'_x = \alpha'_y = \alpha'_z = 0.$