DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO.

RaC′核の strahlungslose Übergang による

Paarerzeugung の確率

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 1

§. Einleitung

Alichanow 及 Kosodaew[1] は Ra(B+C) の sourse より 出て来る Positron の Energieverteilung を調べた. 其結果は Jaeger 及 Hulme[2] の計算により nuclear γ-rays の internal conversion による pair-creation として 略説明が 付く事が 分った. 併し 此 Verteilungskurve の大きな山は 此様な Prozeß としては 説明 出来なくて Alichanow 自身は natural β-rays の internal conversion と 解釈 しようとしてゐる.

吾々は 此の山が RaC′核の "strahlungslose Übergang" による pair-creation に負ふものとして 説明 出来ないか どうかを 調べるため 以下の計算を 行なった. 原子核に関する 特別な仮定 から脱れるために 此様な Prozeß の absolute な probability を問題にしないで 同じ Übergang による K-Elektron Emission の 確率との ratio を 求めた.

1) ZS. f. Phys. 90 3/4, ,1934
2) Proc. Roy. Soc. 148, 108, 1935.
3)

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 2

§

RaC′核の strahlungsloce Übergang (S-S Übergang) による Paarerzeugung 及 K-Elektron Emission の確率の比を求める.

第一の確率は

$$P_{paar} = \int p(E)\,dE' = \frac{2\pi}{\hbar}\int \sum_{j',u'}\sum_{j,u}\left|\int \hat{u}_{E',j',u'}(\vec{r})\{eA_0(\vec{r}) + e\vec{\alpha}\vec{A}(\vec{r})\}\,u_{E,j,u}(\vec{r})\,d\vec{r}\right|^2 dE'$$

ここに　　$E' > 0,\ E < 0,\quad E' = E + h\nu$

$h\nu$ は Übergang の前后に於ける原子核の Energie の差である.

第二の確率は

$$P_K = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{j'',u''}\sum_{u^0=0,-1}\left|\int \hat{u}_{E'',j'',u''}(\vec{r})\{eA_0(\vec{r}) + e\vec{\alpha}\vec{A}(\vec{r})\}\,u_{n=1,j=-1,u_0}(\vec{r})\,d\vec{r}\right|^2$$

ここに　　$E'' = E_{n=1} + h\nu = \sqrt{1-\alpha^2 Z^2} + h\nu$

$u_{E,j,u}$ は Coulomb-Feld に於ける Dirac の式の解で連續スペクトルに属するもの,
$u_{n,j,u}$ は diskrete Eigenwert に属するものである.
$A_0(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ は核の一般の Übergang に対しては

$$A_0(\vec{r}) = Qe\int \frac{e^{iq|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\,\phi_a(\vec{r}_1)\,\phi_g^*(\vec{r}_1)\,d\vec{r}_1$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{Qe\hbar}{4\pi mc}\frac{1}{i}\int \frac{e^{iq|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\{\phi_g^*(\vec{r}_1)\,\mathrm{grad}_1\,\phi_a(\vec{r}_1) - \phi_a(\vec{r}_1)\,\mathrm{grad}_1\,\phi_g^*(\vec{r}_1)\}\,d\vec{r}_1$$

で与えられる. $\phi_g(\vec{r}_1)$ 及 $\phi_a(\vec{r}_1)$ は Übergang にあづかる nuclear particle の ~~excited~~ ground state 及 excited state に於ける wave function で Q はその Charge である.
S-S Übergang の際は $A_0(\vec{r})$ は θ, ϕ に無関係になり $\vec{A}(\vec{r})$ は適当に Eich をかへて零に出来るから以后 $eA_0(\vec{r}) + e\vec{\alpha}\vec{A}(\vec{r})$ の代りに $V(r)$ とかく.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 3

§

$u_{E,j,u}(\vec r)$ 及 $u_{n,j,u}(\vec r)$ は Dirac の式

$$\left(E + \frac{e^2 Z}{r} + c\vec\alpha\vec p + \beta\mu\right)u = 0 \qquad \mu = mc^2$$

の解で その四つの成分は Hulme[1]に従て次の様にかける

$$u^{(1)}_{E\,or\,n,j,u}(\vec r) = -i\,F_{E\,or\,n,j}(r)\cdot w^{(1)}_{j,u}(\theta,\phi) .$$
$$u^{(2)}_{E\,or\,n,j,u}(\vec r) = -i\,F_{E\,or\,n,j}(r)\cdot w^{(2)}_{j,u}(\theta,\phi)$$
$$u^{(3)}_{E\,or\,n,j,u}(\vec r) = G_{E\,or\,n,j}(r)\cdot w^{(3)}_{j,u}(\theta,\phi)$$
$$u^{(4)}_{E\,or\,n,j,u}(\vec r) = G_{E\,or\,n,j}(r)\cdot w^{(4)}_{j,u}(\theta,\phi)$$

	$j<0$	$j>0$
$w^{(1)}_{j,u}(\theta,\phi) =$	$\xi(j,u)\,P^u_{-j}$	$\xi(j,u)(j+u)\,P^u_{j-1}$
$w^{(2)}_{j,u}(\theta,\phi) =$	$\xi(j,u)\,P^{u+1}_{-j}$	$\xi(j,u)(j+u+1)\,P^u_{j-1}$
$w^{(3)}_{j,u}(\theta,\phi) =$	$\xi(j,u)(-j+u)\,P^u_{-j-1}$	$\xi(j,u)\,P^u_j$
$w^{(4)}_{j,u}(\theta,\phi) =$	$\xi(j,u)(+j+u+1)\,P^{u+1}_{-j-1}$	$\xi(j,u)\,P^{u+1}_j$

$$P^u_j(\theta,\phi) = \frac{(j-u)!}{2^j\cdot j!}\{\sin\theta\}^u\frac{d^{j+u}}{(d\cos\theta)^{j+u}}(\cos^2\theta-1)^j\cdot e^{iu\varphi}$$

$$\xi(j,u) = \frac{1}{2\sqrt\pi}\,\frac{1}{\sqrt{(|j|-u-1)!\,(|j|+u)!}}$$

$F(r)$, $G(r)$ は r の power に展開した第一項をとると 次の形になる.

$$F(r) = f\cdot r^{\gamma-1},\quad G(r) = g\cdot r^{\gamma-1} \qquad \gamma = \sqrt{j^2-\alpha^2 Z^2}$$

1) Proc. Roy. Soc.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

$E > 0$ に対しては　$(E > \mu)$

$$f_{E,j} = \pm N_B \sqrt{2(j+\gamma)(j\varepsilon - \gamma)} \qquad \text{複号は} \gtrless \quad j \gtrless 0 \qquad ^{1)}$$
$$g_{E,j} = -N_B \sqrt{2(j-\gamma)(j\varepsilon + \gamma)}$$

$E = -E_+ < 0$ に対しては　$(E_+ > \mu)$

$$f_{-E_+,j} = \mp \bar{g}_{E_+,-j} \qquad \text{複号は} \gtrless \quad j \gtrless 0$$
$$g_{-E_+,j} = \mp \bar{f}_{E_+,-j}$$

－のしるしは N_B の中の Z を $-Z$ にかへる事を意味する.

$$N_B = \sqrt{\frac{2\pi m}{h^2}}\,(2k)^{\gamma-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{\pi b}{2}}\, \frac{|\Gamma(\gamma+ib)|}{\Gamma(2\gamma+1)}$$
$$\varepsilon = \frac{E}{mc^2}$$
$$k = \frac{2\pi mc}{h}\sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1}$$
$$b = \alpha Z \frac{\frac{E}{mc^2}}{\sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1}}$$

K－Elektron に対しては

$$f_{n=1,j=-1} = N_0 \sqrt{1-\gamma}$$
$$g_{n=1,j=-1} = N_0 \cdot \sqrt{1+\gamma}$$

$$N_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\Gamma(2\gamma+1)}} \left(\frac{2}{a_0}\right)^{\gamma+\frac{1}{2}} \qquad a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2 Z}$$

1) Normierung in Energieskala

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 5

§ U に前節の結果を入れて $P(E')$, P_K をかき直すと

$$P(E') = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{j',u'} \sum_{j,u} \left\{ f_{E',j'} f_{E,j} A_{j',u';j,u} + g_{E',j'} g_{E,j} B_{j',u';j,u} \right\}^2 R^2$$

$$P_K = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{j'',u''} \sum_{u_0=0,-1} \left\{ f_{E'',j''} f_{n=1,-1} A_{j'',u'';-1,u_0} + g_{E'',j''} g_{n=1,-1} B_{j'',u'';-1,u_0} \right\}^2 R^2$$

ここに

$$R^2 = \int r^{2\gamma} V(r)\, dr$$

$$A_{j',u';j,u} = \int d\varphi \int \sin\theta\, d\theta \left(w_{j,u}^{(1)} w_{j',u'}^{*(1)} + w_{j,u}^{(2)} w_{j',u'}^{*(2)} \right)$$

$$B_{j',u';j,u} = \int d\varphi \int \sin\theta\, d\theta \left(w_{j,u}^{(3)} w_{j',u'}^{*(3)} + w_{j,u}^{(4)} w_{j',u'}^{*(4)} \right)$$

所が

$$A_{j',u';j,u} = B_{j',u';j,u} = \delta_{j',j}\, \delta_{u',u}$$

これから j, u の Auswahlregel として

$$\Delta j = 0, \quad \Delta u = 0$$

を得る.

従て

$$P(E') = \frac{4\pi}{\hbar} \sum_j \left\{ f_{E',j} f_{E,j} + g_{E',j} g_{E,j} \right\}^2 R^2 \equiv \frac{4\pi}{\hbar} \sum_j M_j^2 \cdot R^2$$

$$P_K = \frac{4\pi}{\hbar} \left\{ f_{E'',-1} f_{n=1,-1} + g_{E'',-1} g_{n=1,-1} \right\}^2 R^2 \equiv \frac{4\pi}{\hbar} L^2 \cdot R^2$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE ....
NO. 6

吾々の求める比 ρ は次の様にかける

$$\rho = \frac{P_{Paar}}{P_K} = \frac{\int \sum_j M_j^2 \, dE'}{L^2}$$

ここに

$$M_j^2 = (f_{E',j} f_{E,j} + g_{E',j} g_{E,j})^2 = (f_{E',j} \bar{g}_{E_+,-j} + g_{E',j} \bar{f}_{E_+,-j})^2$$

$$L^2 = (f_{E',j=-1} f_{n=1,-1} + g_{E',-1} g_{n=1,-1})^2$$

ρ の中の $\sum_j$ は $j=\pm1$ 以外の M_j は小さいと考へられるから無視すると

$$\rho = \frac{\int (M_{-1}^2 + M_1^2)\, dE'}{L^2}$$

$$M_{-1}^2 = 16 N_B'^2 N_{B+}^2 \gamma^2 (\varepsilon_+ + \gamma)(\varepsilon' - \gamma) \quad ^{1)}$$

$$M_1^2 = 16 N_B'^2 N_{B+}^2 \gamma^2 (\varepsilon_+ - \gamma)(\varepsilon' + \gamma)$$

$$M_1^2 + M_{-1}^2 = 32 N_B'^2 N_{B+}^2 \gamma^2 (\varepsilon_+ \varepsilon' - \gamma^2)$$

$$L^2 = 8 N_B'^2 N_0^2 (\varepsilon + \gamma)$$

N_B, N_0 はかき直すと

$$N_B^2 = \frac{1}{8\pi mc^2} \left(\frac{2}{\Lambda}\right)^{2\gamma+1} \eta^{2\gamma-1} \frac{e^{\pi b} |\Gamma(\gamma+ib)|^2}{\{\Gamma(2\gamma+1)\}^2}$$

$$N_0^2 = \frac{1}{2} (\alpha z)^{2\gamma+1} \left(\frac{2}{\Lambda}\right)^{2\gamma+1} \frac{1}{\Gamma(2\gamma+1)}$$

ここで　$\eta = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, $\Lambda = \frac{h}{2\pi mc}$

更に

$$\Phi(\varepsilon) = e^{\pi b} |\Gamma(\gamma + ib)|^2 \eta^{2\gamma-1} \quad \text{とかくと}$$

1) 此頁以后は $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 z^2}$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 7

$$\rho = \frac{\gamma^2}{\pi(\alpha Z)^{2\gamma+1}\Gamma(2\gamma+1)} \frac{\int \Phi(\varepsilon')\overline{\Phi}(\varepsilon_+)\cdot(\varepsilon_+\varepsilon'-\gamma^2)d\varepsilon'}{\Phi(\varepsilon)\cdot(\varepsilon+\gamma)}$$

今

$$F(\varepsilon') \equiv \Phi(\varepsilon')\overline{\Phi}(\varepsilon_+)\cdot(\varepsilon_+\varepsilon'-\gamma^2)$$

と書くと　この $F(\varepsilon')$ が　Paarerzeugung により出て来る Elektron の Energieverteilungskurve の形を与える.

§ 数値の計算

今問題となってゐる RaC′ の場合を考へる.

$Z = 84$

$h\nu = 14.26 \times 10^5$ [e.V.] $= 2.8\, mc^2$

$\alpha Z = 0.6$　　　$(\alpha = \frac{1}{137})$

$\gamma = 0.8$

$$\frac{\gamma^2}{\pi(\alpha Z)^{2\gamma+1}\Gamma(2\gamma+1)} = 0.5$$

$$\Phi(\varepsilon) = \eta^{0.6}\, e^{0.6\pi\frac{\varepsilon}{\eta}} \left|\Gamma(0.8 + 0.6i\tfrac{\varepsilon}{\eta})\right|^2 \cong 4.5 + 1.6\eta$$

$$\overline{\Phi}(\varepsilon) \cong (4.5+1.6\eta)\, e^{-1.2\pi\frac{\varepsilon}{\eta}}$$

$\varepsilon'' = 2.8 + 0.8 = 3.6$

$\eta'' = 3.5$

$\Phi(\varepsilon'')(\varepsilon''+\gamma) = 44.4$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 8

これ等の値を ρ, $F(\varepsilon')$ に入れて

$$\rho = 1.1\times10^{-2}\int F(\varepsilon')\,d\varepsilon'$$

$$F(\varepsilon') = (4.5+1.6\eta')(4.5+1.6\eta_+)(\varepsilon_+ + \varepsilon' - 0.6)\,e^{-1.2\pi\frac{\varepsilon_+}{\eta_+}}$$

$$\varepsilon' + \varepsilon_+ = 2.8$$

ε'	η'	ε_+	η_+
1.0	0	1.8	1.50
1.1	0.46	1.7	1.37
1.2	0.66	1.6	1.25
1.3	0.83	1.5	1.12
1.4	0.98	1.4	0.98
1.5	1.12	1.3	0.83
1.6	1.25	1.2	0.66
1.7	1.37	1.1	0.46
1.8	1.50	1.0	0