DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 1

§1. β-Zerfall の理論 には 種々な試みがあるが 何れの理論 によっても 次の様な Process の起る確率を計算することが出来る. 原子核 (Z, M) は その Isobar $(Z-1, M)$ との mass の差 (energie の unit) ΔW が

$$\Delta W > -\sqrt{1-\alpha^2 Z^2}\, mc^2 + \mu c^2 \qquad (1)$$

の関係を充すならば 未だ β_+-Zerfall の起り得ない際でも (即ち $\Delta W < (m+\mu)c^2$), K electron を吸収して $(Z-1, M)$ へ轉移する. m は electron の mass, μ は neutrino の mass である. この process の per unit time に起る probability は次の式で与えられる

$$P_{K abs.} = \frac{4\pi^2}{h} \sum_{j',u'} \sum_{u=-1,0} \left| \int \tilde{\varphi}_{E', j', u'}(\vec{r})\, U(\vec{r})\, \psi_{K,u}(\vec{r})\, d\vec{r} \right|^2 \qquad (2)$$

$$E' = \sqrt{1-\alpha^2 Z^2}\, mc^2 + \Delta W \qquad (3)$$

ここに $U(\vec{r})$ は Fermi の理論[1] では

$$U(\vec{r}) = g_F\, u_n^*(\vec{r})\, v_m(\vec{r}) \qquad (4)$$

で与えられる. v_m, u_n は 原子核内で transition を行ふ heavy particle が proton state にあった時及 neutron state にあった時の wave function である. g_F は Fermi の constant である. 又著者の中の一人[2] の理論によると $U(\vec{r})$ は

$$U(\vec{r}) = g'g \int \frac{e^{-\mu|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\, u_n^*(\vec{r}_1)\, v_m(\vec{r}_1)\, d\vec{r}_1 \qquad (5)$$

で与えられる. この expression は既に示された様に[3] $\frac{e^{-\mu|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$ が δ-function の

1) E. Fermi, ZS. f. Phys. **88**, 161, 1934
2) H. Yukawa, Proc. Physico-Math. Soc. of Japan, **17**, 48, 1935.
3) H. Yukawa, l. c.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 2

如く考へられる近似に於ては (4) と identical である．但しその際 $\frac{4\pi g' g}{\mu^2}$ を g_F でおきかへねばならない．

$\psi_{K,u}(\vec{r})$ は K-electron の wave function で，$\phi_{Ej'u'}(\vec{r})$ は neutrino に対する Dirac の式の spherical coordinate に於ける解である．$\phi_{Ej'u'}(\vec{r})$ の四つの成分は r の power に展開した第一項をとると次の通になる．

$$\left.\begin{aligned}\phi^{(1,2)}_{Ej'u'}(\vec{r}) &= -i f_{Ej'}\, r^{|j'|-1}\cdot w^{(1,2)}_{j'u'}(\theta,\phi)\\ \phi^{(3,4)}_{Ej'u'}(\vec{r}) &= g_{Ej'}\, r^{|j'|-1}\cdot w^{(3,4)}_{j'u'}(\theta,\phi)\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

f, g は $E>0$ に対しては

$$\left.\begin{aligned}f_{Ej'} &= \mp N_n\sqrt{2(j'+|j'|)(j'\varepsilon-|j'|\varkappa)}\\ g_{Ej'} &= N_n\sqrt{2(j'-|j'|)(j'\varepsilon-|j'|\varkappa)}\end{aligned}\right\}\quad \text{acc. as } j' \gtrless 0 \quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}N_n^2 &= \frac{1}{8\pi mc^2}\,\frac{1}{\{\Gamma(2|j'|+1)\}^2}\left(\frac{4\pi mc}{h}\right)^{2|j'|+1}\eta^{2|j'|-1}\\ \varkappa &= \frac{\mu}{m}\\ \varepsilon &= \frac{E}{mc^2}\\ \eta' &= \sqrt{\varepsilon^2-\varkappa^2}\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

§2. $U(\vec{r})$ が r のみの函数である様な場合を考へると

$$j'=-1,\quad u'=u$$

以外は考へなくてよいから

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

$$P_{K\,abs.} = \frac{4\pi^2}{h}\sum_{u=0,-1}\left|\int \hat{\varphi}_{E',-1,u}(\vec{r})\, \sqcup(\vec{r})\, \psi_{K,u}\, d\vec{r}\right|^2$$

こゝに $\varphi_{E',-1,u}$ 及 $\psi_{K,u}$ の実際の expression を入れると

$$P_{K.ab.} = (\alpha Z)^{2\gamma+1}\cdot\frac{\gamma+1}{2}\cdot\frac{256\pi^5 m^5 c^4}{h^7\,\Gamma(2\gamma+1)}\left(\frac{4\pi mc}{h}\right)^{2(\gamma-1)}\cdot \eta'(\varepsilon'+\varkappa)\cdot\left\{\int r^{\gamma-1}\sqcup(r)\,d\vec{r}\right\}, \quad (10)$$

こゝに $\gamma = \sqrt{1-\alpha^2 Z^2}$

$\sqcup(r)$ に Fermi の expression を入れ，Fermi と同一の近似をやると (10) は

$$P_{K\,ab.} = g_F^2\cdot(\alpha Z)^{2\gamma+1}\cdot\frac{\gamma+1}{2}\cdot\frac{256\pi^5 m^5 c^4}{h^7\,\Gamma(2\gamma+1)}\left(\frac{4\pi mc\rho}{h}\right)^{2(\gamma-1)}\eta'(\varepsilon'+\varkappa)\cdot\left|\int u_n^* v_m\, d\tau\right|^2, \quad (11)$$

こゝに ρ は nuclear radius で　たとえば Fermi によると　$\rho = 9\cdot 10^{-13}$ cm

更に Neutrino の mass を zero ととると　$\varkappa = 0$，$\eta' = \varepsilon'$ になるから

$$P_{K\,ab.} = g_F^2\cdot(\alpha Z)^{2\gamma+1}\cdot\frac{\gamma+1}{2}\cdot\frac{256\pi^5 m^5 c^4}{h^7\,\Gamma(2\gamma+1)}\left(\frac{4\pi mc\rho}{h}\right)^{2(\gamma-1)}\cdot(\Delta w+\gamma)^2\cdot\left|\int u_n^* v_m\, d\tau\right|^2 \quad (12)$$

$$\Delta w = \frac{\Delta W}{mc^2}$$

従て Lebensdauer τ は

$$\tau = \frac{1}{g_F^2(\alpha Z)^{2\gamma+1}}\cdot\frac{2}{\gamma+1}\cdot\frac{h^7\,\Gamma(2\gamma+1)}{256\pi^5 m^5 c^4}\cdot\cancel{\left(\frac{4\pi mc\rho}{h}\right)^{2\gamma}}\cdot\left(\frac{h}{4\pi mc\rho}\right)^{2(\gamma-1)}\cdot\frac{1}{(\Delta w+\gamma)^2\cdot\left|\int u_n^* v_m\, d\tau\right|^2} \quad (13)$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

§3. $\Delta W > mc^2 + \mu c^2$ になると 前節で述べた process による他，普通の $\beta +$-Zerfall によって 同一の nuclear transition が起り得る様になる．この probability は既に Wick[4] が Fermi の理論で計算した．その結果は

$$\left.\begin{aligned} P_{\beta+} &= g_F^2 \cdot \frac{256\pi^4 m^5 c^4}{\hbar^7 \{\Gamma(2\gamma+1)\}^2} \left(\frac{4\pi m c \rho}{\hbar}\right)^{2(\gamma-1)} \left|\int u_n^* v_m \, d\tau\right|^2 \cdot \int_1^{\Delta W} F(\varepsilon_+)\, d\varepsilon_+ \\ F(\varepsilon_+) &= \varepsilon_+ \eta_+^{2\gamma-1} e^{-\pi\alpha Z \frac{\varepsilon_+}{\eta_+}} \left|\Gamma\left(\gamma + i\alpha Z \frac{\varepsilon_+}{\eta_+}\right)\right|^2 (\Delta W - \varepsilon_+)^2 \\ \varepsilon_+ &= \frac{E_+}{mc^2} \qquad \eta_+ = \sqrt{\varepsilon_+^2 - 1} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

但し μ は既に zero とおかれてある．

Wick は Lebensdauer τ を $P_{\beta+}$ の逆数としたが 厳密には 同時に前節に述べた K-absorption の process が存在するから

$$\tau = \frac{1}{P_{\beta+} + P_{K\,ab.}} \qquad (15)$$

で与えられねばならない．従て $P_{\beta+}$ と $P_{K\,ab.}$ の ratio を 種々な ΔW 及 Z に就て調べて見る事は ~~興~~味がある．更に ratio をとって具合のよい事は nuclear structure に depend する部分の無くなる事である．この比を求めるには (12) と (14) の比をとれば容易に得られるが この比が (10) から (12) に至るに用いた assumption や approximation に independent なる事を示すために $P_{\beta+}$ に対しても (10) に相当する形の式を出して然る后比をとる事にする．

4) G. C. Wick, Rendiconti Lincei, 19, 319, 1934.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

§4. $P_{\beta+}$ は一般に次の式で計算される

$$P_{\beta+} = \frac{4\pi^2}{h}\sum_{j',u'}\sum_{j,u}\int_{mc^2}^{\Delta W-\mu c^2} dE_+ \left| \int \tilde{\varphi}_{E',j',u'}(\vec{r})\cdot U(\vec{r})\, \psi_{-E_+,j,u}(\vec{r})\, d\vec{r} \right|^2, \qquad (16)$$

$$E' + E_+ = \Delta W \qquad (17)$$

$E', E_+ > 0$ と考へてみる. $U(\vec{r})$, $\varphi_{E,j,u}$ は前と同一の意味をもち, $\psi_{-E_+,j,u}$ は electron に対する Dirac の式の解で $-E_+, j, u$ と云ふ state に属するものである. $\psi_{-E_+,j,u}$ の四つの成分は r の power で展開した第一項を示すと次の如くなる.

$$\left.\begin{aligned} \psi^{(1,2)}_{-E_+,j,u}(\vec{r}) &= -i f_{-E_+,j}\cdot r^{\gamma'-1}\cdot w^{(1,2)}_{j,u}(\theta,\phi) \\ \psi^{(3,4)}_{-E_+,j,u}(\vec{r}) &= g_{-E_+,j}\cdot r^{\gamma'-1}\cdot w^{(3,4)}_{j,u}(\theta,\phi) \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} f_{-E_+,j} &= N_+\sqrt{2(j+\gamma')(j\varepsilon_+ + \gamma')} \\ g_{-E_+,j} &= \pm N_+\sqrt{2(j-\gamma')(j\varepsilon_+ + \gamma')} \end{aligned}\quad \text{acc. as } j \gtrless 0 \right\} \qquad (19)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} N_+^2 &= \frac{1}{8\pi mc^2}\cdot\frac{1}{\{\Gamma(2\gamma'+1)\}^2}\left(\frac{4\pi mc}{h}\right)^{2\gamma'+1}\cdot \eta_+^{2\gamma'-1}\, e^{-\pi\alpha Z\frac{\varepsilon_+}{\eta_+}} \left|\Gamma\!\left(\gamma' + i\alpha Z\frac{\varepsilon_+}{\eta_+}\right)\right|^2 \\ \gamma' &= \sqrt{j^2-\alpha^2 Z^2} \\ \varepsilon_+ &= \frac{E_+}{mc^2}, \quad \eta_+ = \sqrt{\varepsilon_+^2 - 1} \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

以前と同じく $U(\vec{r})$ が r のみの函数の場合を考へると

$$j' = j, \quad u' = u$$

以外のものは あらわれない. 更に $|J|=1$ 以外のものの contribution は小さいと見て無視すれば (16) は

$$P_{\beta+} = \frac{4\pi^2}{\hbar} \sum_{j=\pm1} \sum_{u} \int_{mc^2}^{\Delta W - \mu c^2} dE_+ \left| \hat{\varphi}_{E,j,u'}(\vec{r})\, U(\vec{r})\, \psi_{-E_+ j, u}(\vec{r})\, d\vec{r} \right|^2, \quad (21)$$

(6) 及 (18) を (21) に入れると

$$P_{\beta+} = \frac{\gamma+1}{2} \frac{256\pi^4 m^5 c^4}{\hbar^7 \{\Gamma(2\gamma+1)\}^2} \left(\frac{4\pi mc}{\hbar}\right)^{2(\gamma-1)} \cdot \left\{ \int r^{\gamma-1} U(r)\, d\vec{r} \right\}^2 \cdot \int_1^{\Delta\omega - \varkappa} F(\varepsilon_+, \varkappa)\, d\varepsilon_+, \quad (22)$$

ここに $F(\varepsilon_+, \varkappa)$ は $\beta+$ の energy distribution を与えるもので

$$F(\varepsilon_+, \varkappa) = \eta_+^{2\gamma-1} e^{-\pi\alpha Z \frac{\varepsilon_+}{\eta_+}} \left| \Gamma\left(\gamma + i\alpha Z \frac{\varepsilon_+}{\eta_+}\right) \right|^2 \cdot \left\{ \varepsilon_+ (\Delta\omega - \varepsilon_+)^2 - \gamma \cdot \varkappa \cdot (\Delta\omega - \varepsilon_+) \right\}, \quad (23)$$

この式は $\varkappa = 0$ とすると (14) の $F(\varepsilon_+)$ と一致する

$$F(\varepsilon_+, 0) = F(\varepsilon_+) \quad (24)$$

(22) と (10) の ratio をとると

$$\sigma = \frac{P_{\beta+}}{P_{Kab.}} = \frac{\int_1^{\Delta\omega - \varkappa} F(\varepsilon_+, \varkappa)\, d\varepsilon_+}{\pi (\alpha Z)^{2\gamma+1} \Gamma(2\gamma+1) \cdot \{\Delta\omega + \gamma + \varkappa\} \sqrt{(\Delta\omega - \varepsilon_+)^2 - \varkappa^2}}, \quad (25)$$

$\varkappa = 0$ に対しては

$$\sigma = \frac{\int_1^{\Delta\omega} F(\varepsilon_+)\, d\varepsilon_+}{\pi (\alpha Z)^{2\gamma+1} \Gamma(2\gamma+1) \cdot (\Delta\omega + \gamma)^2} \quad (26)$$