YHAL E20 030 P04

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 1

現在のβ-崩壊の理論によれば 原子番数 Z の原子核は Z-1 の Isobar との proper energy の差が $-mc^2+\mu c^2$ より大きいとき orbital electrons の一つを absorb して その Isobar に transform することが出来る. 吾々は前論文[1]に於て この過程の確率を Fermi の理論から計算した. この Note の目的は 最近 Konopinski 及 Uhlenbeck により propose された modified theory に従って 計算しなほした結果を報告する事である. Notation はすべて前論文と同一である.

此理論に従ふならば light particle に作用する perturbing field は (3) の代りに 次の expression で置きかへねばならない.

$$\frac{g'}{mc^2}\tau'\beta\left(E\,U_0(\vec{r})-c\vec{p}\,\vec{U}(\vec{r})\right)\exp(-2\pi i\nu t)\,\psi \qquad (3')$$

こゝに E 及 $\vec{p}$ は次の operator である

$$E=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p}=-i\hbar\,\mathrm{grad}$$

この際にも transformation の前后に於ける nuclear spin の絶対値及方向が変らない場合を考へるならば U_0 は r のみの函数となり $\vec{U}$ は 次の形になる[2]

$$\vec{U}=\frac{\vec{r}}{r}U'(r)$$

従て perturbed wave equation として (7) の代りに 次の式をうる

$$\left\{\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}+e'A_0+\varepsilon p_r c+\frac{i\varepsilon\rho_3 j hc}{2\pi r}+\rho_3 m'c^2 + \frac{g'}{mc^2}\tau'\beta\left(EU_0-c\left(p_r-\frac{i\hbar}{r}\right)U'\right)\cdot\exp.(-2\pi i\nu t)\right\}\psi=0 \qquad (7')$$

(1)
(2) Appendix 参照.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室所蔵 湯川秀樹史料(中間子論関係)
E20 030 P04

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

(17)の代りには

$$P_{j,u} = \frac{4\pi^2 g'^2}{h}\left|\int_0^\infty\left\{\left(\varphi^{(1)*}_{E',j,u}\psi^{(1)}_{E,j,u} - \varphi^{(2)*}_{E',j,u}\psi^{(2)}_{E,j,u}\right)U_0\frac{E'}{mc^2}\right.\right.$$
$$\left.\left. + i\left(\frac{d\varphi^{(1)*}_{E',j,u}}{dr}\psi^{(1)}_{E,j,u} - \frac{d\varphi^{(2)*}_{E',j,u}}{dr}\psi^{(2)}_{E,j,u}\right)U'\frac{h}{mc}\right\}r^2 dr\right|^2 \qquad (17')$$

をうる．所が[1]

$$\frac{d\varphi^{(1)}_{E',-1,u}}{dr} \simeq N_0\cdot 2\cdot\sqrt{\varepsilon'-\varkappa}\cdot\frac{k'}{3}$$

$$\frac{d\varphi^{(2)}_{E',-1,u}}{dr} \simeq 0$$

$$\frac{d\varphi^{(1)}_{E',+1,u}}{dr} \simeq 0$$

$$\frac{d\varphi^{(2)}_{E',+1,u}}{dr} \simeq N_0\cdot 2\cdot\sqrt{\varepsilon'+\varkappa}\cdot\frac{k'}{3}$$

こゝに $\qquad k' = \frac{mc}{h}\sqrt{\varepsilon'^2-\varkappa^2}$

従て(27)及(32)の代りに

$$P_+ = \frac{256\pi^4 m^5 c^4 g'^2}{h^7\{\Gamma(2\gamma+1)\}^2}\left(\frac{4\pi mc a_N}{h}\right)^{2(\gamma-1)}\int_1^{\Delta\omega-\varkappa}\left\{\frac{1+\gamma}{2}(\Delta\omega-\varepsilon_+)^2\left|\int U_0 d\vec{r}\right|^2\right.$$
$$\left. + \frac{1-\gamma}{2}\{(\Delta\omega-\varepsilon_+)^2-\varkappa^2\}\frac{\varepsilon_+(\Delta\omega-\varepsilon_+)+\gamma\varkappa}{\varepsilon_+(\Delta\omega-\varepsilon_+)-\gamma\varkappa}\left|\int\frac{U'}{3}d\vec{r}\right|^2\right\}F(\varepsilon_+,\varkappa)\,d\varepsilon_+$$
$$(27')$$

(1) Appendix 2

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室所蔵 湯川秀樹史料(中間子論関係)
E20 030 P04

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 3

$$P_K = (\alpha Z)^{2\gamma+1} \frac{256\pi^5 m^5 (4 g)^2}{\hbar^7 \Gamma(2\gamma+1)} \left(\frac{4\pi m c a_N}{\hbar}\right)^{2(\gamma-1)} \Big\{ \frac{1+\gamma}{2} (\Delta\omega+\gamma)^2 \cdot \Big|\int U_0 d\vec{r}\Big|^2$$

$$+ \frac{1-\gamma}{2} \{(\Delta\omega+\gamma)^2 - \varkappa^2\} \frac{\Delta\omega+\gamma-\varkappa}{\Delta\omega+\gamma+\varkappa} \Big|\int \frac{U'}{3} d\vec{r}\Big|^2 \Big\} (\Delta\omega+\gamma+\varkappa)\sqrt{(\Delta\omega+\gamma)^2-\varkappa^2} \qquad (32')$$

もし $\varkappa = 0$ とるならば

$$P_+ = \frac{256\pi^4 m^5 (4 g)^2}{\hbar^7 \{\Gamma(2\gamma+1)\}^2} \left(\frac{4\pi m c a_N}{\hbar}\right)^{2(\gamma-1)} \cdot \Big\{ \frac{1+\gamma}{2} \Big|\int U_0 d\vec{r}\Big|^2 + \frac{1-\gamma}{2} \Big|\int \frac{U'}{3} d\vec{r}\Big|^2 \Big\}$$

$$\times \int_1^{\Delta\omega} F(\varepsilon_+, 0) \cdot (\Delta\omega - \varepsilon_+)^2 \, d\varepsilon_+ \qquad (27'')$$

$$P_K = (\alpha Z)^{2\gamma+1} \frac{256\pi^5 m^5 (4 g)^2}{\hbar^7 \Gamma(2\gamma+1)} \left(\frac{4\pi m c a_N}{\hbar}\right)^{2(\gamma-1)} \cdot \Big\{ \frac{1+\gamma}{2} \Big|\int U_0 d\vec{r}\Big|^2 + \frac{1-\gamma}{2} \Big|\int \frac{U'}{3} d\vec{r}\Big|^2 \Big\}$$

$$\times (\Delta\omega+\gamma)^4 \qquad (32'')$$

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室所蔵 湯川秀樹史料(中間子論関係)
E20 030 P04

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 4.

Appendix

1) nuclear spin が変らない場合は (3′) の expression は light particle の total angular momentum

$$\vec{M} = \vec{m} + \frac{h}{4\pi}\vec{\sigma}$$

と commute せねばならない. そのためには

$$E\sqcup_0(\vec{r}) - c\vec{p}\,\vec{\sqcup}(\vec{r})$$

が $\vec{m}$ と commute すればよい. 即ち

$$[E\sqcup_0 - c\vec{p}\,\vec{\sqcup},\ \vec{m}] = 0 \qquad (1)$$

この両辺と r の poisson bracket をつくると

$$[\vec{r}\,\vec{\sqcup},\ \vec{m}] = 0 \qquad (2)$$

をうる. 更に (1) の両辺と x, y, z の poisson bracket をつくると

$$[x, [E\sqcup_0 - c\vec{p}\,\vec{\sqcup}, m_x]] = -[E\sqcup_0 - c\vec{p}\,\vec{\sqcup}, [m_x, x]] - [m_x, [x, E\sqcup_0 - c\vec{p}\,\vec{\sqcup}]]$$
$$= c[m_x, \sqcup_x[x, p_x]] = c[m_x, \sqcup_x]$$
$$[y, [E\sqcup_0 - c\vec{p}\,\vec{\sqcup}, m_x]] = -[E\sqcup_0 - c\vec{p}\,\vec{\sqcup}, [m_x, y]] - [m_x, [y, E\sqcup_0 - c\vec{p}\,\vec{\sqcup}]]$$
$$= c\sqcup_z[p_z, z] + c[m_x, \sqcup_y[y, p_y]] = -c\sqcup_z + c[m_x, \sqcup_y]$$
$$[z, [E\sqcup_0 - c\vec{p}\,\vec{\sqcup}, m_x]] = -[E\sqcup_0 - c\vec{p}\,\vec{\sqcup}, [m_x, z]] - [m_x, [z, E\sqcup_0 - c\vec{p}\,\vec{\sqcup}]]$$
$$= -c\sqcup_y[p_y, y] + c[m_x, \sqcup_z[z, p_z]] = c\sqcup_y + c[m_x, \sqcup_z]$$

etc.

より

$$\left.\begin{aligned} &[m_x, \sqcup_x] = 0 \\ &[m_x, \sqcup_y] = \sqcup_z \\ &[m_x, \sqcup_z] = -\sqcup_y \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

をうる.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室所蔵 湯川秀樹史料(中間子論関係)
E20 030 P04

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

従て前論文の場合と同様に $\vec{U}(\vec{r})$ は

$$\vec{U}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r} U'(r) \tag{4}$$

の形でなければならない事が分る．そうすれば $U_0(\vec{r})$ は又 r のみの函數でなければならない．

2) 前論文に於ては $\varphi^{(1)}$ 及 $\varphi^{(2)}$ は $\psi^{(1)}$ 及 $\psi^{(2)}$ から $Z \to 0$ として求めたが その時 $\psi^{(1)}$ 及 $\psi^{(2)}$ を r に展開した才一項のみしか使はなかったので $j = \pm 1$ の場合 $\varphi^{(1)}$ 及 $\varphi^{(2)}$ の何れか一方は zero になってしまった．今後は $\varphi^{(1)}$ 及 $\varphi^{(2)}$ の r に関する微分が問題になるから $\varphi^{(1)}$ 及 $\varphi^{(2)}$ のもっと詳しい形が必要である．以下この形が容易に得られる事を示す．

$\varphi^{(1)}$ 及 $\varphi^{(2)}$ の満足する微分方程式は

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1-j}{r}\right)\varphi^{(1)}_{E,j,u} + \frac{\varepsilon - \varkappa}{\Lambda}\varphi^{(2)}_{E,j,u} &= 0 \\ -\left(\frac{d}{dr} + \frac{1+j}{r}\right)\varphi^{(2)}_{E,j,u} + \frac{\varepsilon + \varkappa}{\Lambda}\varphi^{(1)}_{E,j,u} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5} \qquad \Lambda = \frac{h}{2\pi mc}$$

これから

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} + \left(k^2 - \frac{j(j-1)}{r^2}\right)\right]\varphi^{(1)}_{E,j,u} &= 0 \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} + \left(k^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right)\right]\varphi^{(2)}_{E,j,u} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$k = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \varkappa^2}}{\Lambda}$$

をうるから

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 6

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{(1)}_{E,j,u} &= L_{E,j}\frac{J_{|j-\frac12|}(kr)}{\sqrt{kr}} \\ \varphi^{(2)}_{E,j,u} &= M_{E,j}\frac{J_{|j+\frac12|}(kr)}{\sqrt{kr}} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$L_{E,j}$ 及 $M_{E,j}$ は r には無関係な constant で (5) の方程式のために互に独立ではない。即ち

$$\varphi^{(2)}_{E,j,u} = -\frac{\Lambda}{\varepsilon-x}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1-j}{r}\right)\varphi^{(1)}_{E,j,u} \qquad (j>0)$$

$$\varphi^{(1)}_{E,j,u} = \frac{\Lambda}{\varepsilon+x}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1-|j|}{r}\right)\varphi^{(2)}_{E,j,u} \qquad (j<0)$$

所が

$$\left(\frac{d}{dx}+\frac{1-n}{x}\right)\frac{J_{n-\frac12}(x)}{\sqrt{x}} = -\frac{J_{n+\frac12}}{\sqrt{x}} \qquad (n>0)$$

の関係があるから

従て

$$\left.\begin{aligned} M_{E,j} &= \sqrt{\frac{\varepsilon+x}{\varepsilon-x}}\,L_{E,j} \quad (j>0) \\ L_{E,j} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon-x}{\varepsilon+x}}\,M_{E,j} \quad (j<0) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

一方 r の展開の初項に於ては $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ は次の式で与えられてゐた

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \varphi^{(1)}_{E,j,u} &\cong N_0 2j\sqrt{\varepsilon-x}\,r^{j-1} \\ \varphi^{(2)}_{E,j,u} &\cong 0 \end{aligned}\right\} j>0 \\ &\left.\begin{aligned} \varphi^{(1)}_{E,j,u} &\cong 0 \\ \varphi^{(2)}_{E,j,u} &\cong N_0 2j\sqrt{\varepsilon+x}\,r^{j+1} \end{aligned}\right\} j<0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

所が

$$\frac{J_{n-\frac12}(x)}{\sqrt{x}} \cong \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n+\frac12)\,2^{n-\frac12}} + \cdots$$

であるから (7) と (9) を比較し 更 (8) を考慮すると
$\underbrace{\qquad}_{\text{r に就き展開した式}}$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 7

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{(1)}_{E,j,u} &= N_0' \, 2j\sqrt{\varepsilon-x}\, \frac{J_{j-\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} \\ \varphi^{(2)}_{E,j,u} &= N_0' \, 2j\sqrt{\varepsilon+x}\, \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}\end{aligned}\right\} j>0$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{(1)}_{E,j,u} &= -N_0' \, 2j\sqrt{\varepsilon-x}\, \frac{J_{|j|+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} \\ \varphi^{(2)}_{E,j,u} &= N_0' \, 2j\sqrt{\varepsilon+x}\, \frac{J_{|j|-\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}\end{aligned}\right\} j<0$$

$$N_0' = N_0 \frac{2^{|j|-\frac{1}{2}}\,\Gamma(|j|+\frac{1}{2})}{k^{|j|-1}}$$

となる.

$j=\pm1$ の場合は

$$\varphi^{(1)}_{E,1,u} = N_0 2\sqrt{\varepsilon-x}\,\frac{\sin kr}{kr}$$
$$\varphi^{(2)}_{E,1,u} = N_0 2\sqrt{\varepsilon+x}\left(\frac{\sin kr}{k^2r^2} - \frac{\cos kr}{kr}\right)$$

$$\varphi^{(1)}_{E,-1,u} = N_0 2\sqrt{\varepsilon-x}\left(\frac{\sin kr}{k^2r^2} - \frac{\cos kr}{kr}\right)$$
$$\varphi^{(2)}_{E,-1,u} = -N_0 2\sqrt{\varepsilon+x}\,\frac{\sin kr}{kr}$$

これから

$$\frac{d\varphi^{(1)}_{E,1,u}}{dr} \simeq 0 \qquad \frac{d\varphi^{(1)}_{E,-1,u}}{dr} \simeq N_0\cdot 2\sqrt{\varepsilon-x}\,\frac{k}{3}$$

$$\frac{d\varphi^{(2)}_{E,1,u}}{dr} \simeq N_0 2\sqrt{\varepsilon+x}\,\frac{k}{3} \qquad \frac{d\varphi^{(2)}_{E,-1,u}}{dr} \simeq 0$$

となる.