41(+2)

§1. ——

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow$ (M, Ze) —— r —— (m, 0)

Nucleus —— neutron

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \longrightarrow$ (M′, (Z−1)e) —— r —— (m′, e)

Proton

$$M \simeq M', \quad m \simeq m', \quad M + m = M' + m' - D$$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ノ state ト $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ノ state トデ 同ジ r ヲ用ヒルコトハ 非常ニ特別ナ case ヲ取扱フコトニナルガ; 簡單ノタメニ コノ場合ノミヲ考ヘル

Hamiltonian ハ

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2M}|\vec{p}_M|^2 + \frac{1}{2m}|\vec{p}_m|^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2M'}|\vec{p}_{M'}|^2 + \frac{1}{2m'}|\vec{p}_{m'}|^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_{11}(r) & J_{12}(r) \\ J_{21}(r) & J_{22}(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{--- --- ---} \quad (1,1)$$

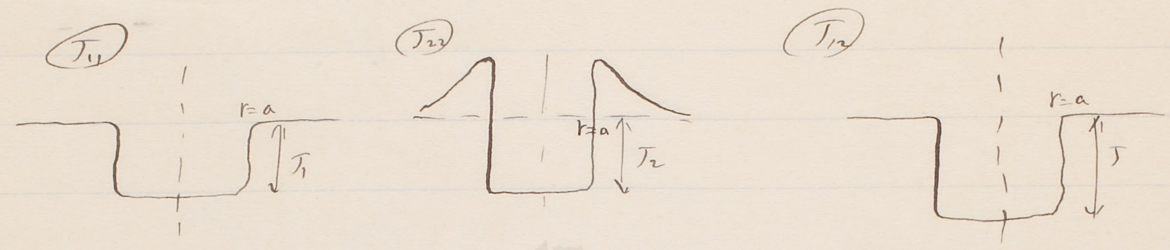
J_{11} = neutron-neutron interaction ト neutron-proton ノ ordinary interaction トガ主ナルモノ

J_{22} = proton-proton interaction, proton-neutron ordinary interaction ガ加ハツタモノ

$J_{12} = J_{21}$ = neutron-proton ノ exchange force ニ由來スル

Nucleus ノ stability ノ議論カラ Nucleus ノ内デハ neutron-proton ノ interaction ハ (コレガ ~~exchange~~ exchange type デアツテモ, ordinary type デアツテモ) neutron-neutron, proton-proton interaction ヨリ大キイコトハ明ラカデアル.

J_{11}, J_{22}, J_{12} ノ model トシテ ~~●~~ 次ノ様ナモノヲトル.



J_1, J_2, J ハ 一番強イ neutron-proton interaction ガ exchange type デアルカ ordinary type デアルカニヨリ 大小ガ ~~●~~ キマル

(i) Exchange type ナラバ

$$J > \begin{matrix} J_1 \\ J_2 \end{matrix}$$

(ii) Ordinary type ナラバ

$$J < \begin{matrix} J_1 \\ J_2 \end{matrix}$$

M, m, M′, m′ ノ coordinate ヲ夫々 $\vec{\xi}_M, \vec{\xi}_m, \vec{\xi}_{M'}, \vec{\xi}_{m'}$ デ表ハ~~ス~~ス.

Wave function ハ spin ヲ考ヘレバ

$$u' = \begin{pmatrix} u_1'(\vec{\xi}_M, \vec{\xi}_m, \sigma_M, \sigma_m) \\ u_2'(\vec{\xi}_{M'}, \vec{\xi}_{m'}, \sigma_{M'}, \sigma_{m'}) \end{pmatrix}$$

トナルガ Exchange type ノ force ガ Majorana ノ場合ナラバ spin ハ Hamiltonian ニ入ッテ来ナイカラ

$$u' = \begin{pmatrix} u_1'(\vec{\xi}_M\ \vec{\xi}_m) \\ u_2'(\vec{\xi}_{M'}\ \vec{\xi}_{m'}) \end{pmatrix}$$

ト考ヘテヨイ

Wave equation ヲ重心ノモノト relative coordinate ニ関スルモノトニ分ケル.

$$\frac{M\vec{\xi}_M + m\vec{\xi}_m}{M+m} = \frac{M'\vec{\xi}_{M'} + m'\vec{\xi}_{m'}}{M'+m'} = \vec{X}$$

$$\vec{\xi}_m - \vec{\xi}_M = \vec{\xi}_{m'} - \vec{\xi}_{M'} = \vec{x}$$

トオキ.

$$u' = u''(XYZ)\begin{pmatrix} u_1(xyz) \\ u_2(xyz) \end{pmatrix}$$

$$E' = E'' + E$$

トオケバ

$$\left(\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_x + E - J_{11}\right)u_1 - J_{12}u_2 = 0$$
$$\left(\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_x + (E-D) - J_{22}\right)u_2 - J_{21}u_1 = 0 \qquad (1,6)$$

(1,6) ニオイテ

$$u_1 = \frac{f(r)}{r}Y_{lm}(\theta\varphi) = \frac{f(r)}{r}\sqrt{\frac{l-m!}{l+m!}\frac{2l+1}{4\pi}}\,P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$
$$u_2 = \frac{g(r)}{r}Y_{lm} \qquad (1,7)$$

トオキ. $J_{11}, J_{12}, J_{21}, J_{22}$ ハソレゾレノ定数デアレバ $f(r), g(r)$ ヲキメルニハ

<u>$r>a$</u>

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + E_0\right)f_l = 0$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + E_0 - D_0 - \frac{K_0}{r}\right)g_l = 0 \qquad (1,9)$$

<u>$r<a$</u>

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + E_0 + J_{10}\right)f_l + J_0 g_l = 0$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + E_0 - D_0 + J_{20}\right)g_l + \tilde{J}_0 f_l = 0 \qquad (1,10)$$

λ_1

$$\{(E_0 + J_{10}) + \lambda_1 \cancel{\tilde{J}_0 f_l\, J_{20})}\}$$
$$+\{J_0 + \lambda_1(E_0 - D_0 + J_{20})\}g_l$$

ここ.

$$F_0 = \frac{2\mu}{h^2} E, \quad D_0 = \frac{2\mu}{h^2} D, \text{ etc}$$

$$\mathfrak{E}_0 = \frac{2\mu}{h^2} (2-1) e^2$$

$\mu = \frac{Mm}{M+m} \approx m = 1{,}6 \cdot 10^{-24}$ デアルカラ. $\frac{2\mu}{h^2} = 3{,}10^{30}$.

E, D, J, J_1, J_2 ヲ皆 MV 單位デ表ハセバ

$$\boxed{\begin{array}{l} F_0 = 5{,}10^{24} E, \quad D_0 = 5{,}10^{24} D, \text{ etc} \\ \mathfrak{E}_0 = 0{,}7 \cdot 10^{12} (2-1) \end{array}}$$

§2 ——

(A) $r>a$ ノ解

(1.9) ノ第一式ノ解ハ Bessel function デ表ハサレル

$$f_\ell = \sqrt{kr}\, J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr) \qquad (2,1)$$

$$k=\sqrt{E_0}$$

J ノ代リニ Y, $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ ヲ用ヒテモ勿論解デアル.

(1.9) ノ第二式ハ W.K.B solution ヲ用ヒテ表ハス.

一般ニ

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + F(r)\, f(r) = 0. \qquad (2,2)$$

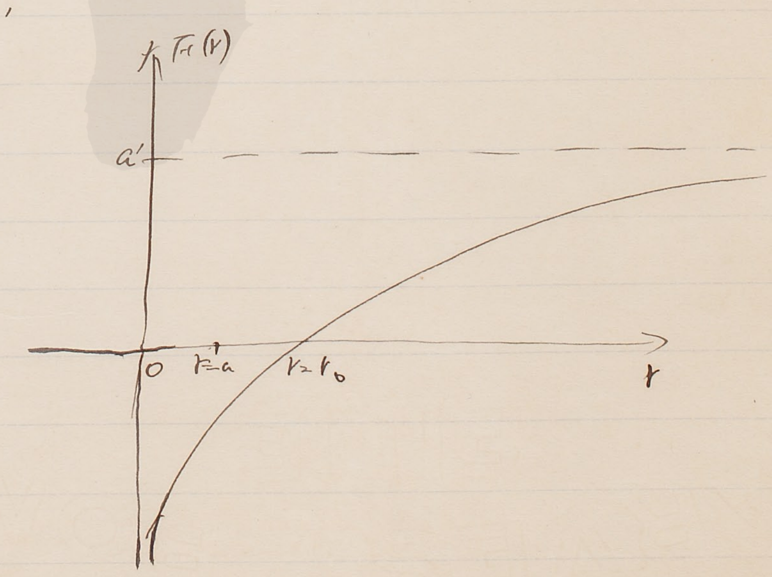
$$F(r) = a' - \frac{b}{r} - \frac{c}{r^2}$$

a', b, c pos.

之ヲ ~~[illegible]~~ $F(r)=0$ ノ根ノ中ノ正ノモノ

ヲ r_0 トスレバ

$$r_0 = \frac{b}{2a'} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a'}\right)^2 + \frac{c}{a'}} \qquad !!$$



$f(r)$ ハ r_0 ノ近傍ト, $r \gg r_0$ ノ

範囲ト, $r \ll r_0$ ノ範囲トデ別ノ

form ノ solution ヲ用ヒネバナラヌ.

$$
\begin{cases}
f = \left(F_1(r)\right)^{-\frac{1}{4}} \left\{ \begin{array}{l} e^{i\int_{r_0}^{r}\sqrt{F_1(r)}\,dr} \\ e^{-i\int_{r_0}^{r}\sqrt{}\,dr} \end{array} \right. & \underline{\underline{(r \gg r_0)}} \quad (2,3\ {}^{a}_{b}) \\
f = \sqrt{\frac{\pi}{3}}(r-r_0)^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{l} e^{i\frac{5}{12}\pi} H^{(1)}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2\alpha}{3}(r-r_0)^{\frac{3}{2}}\right) \\ e^{-i\frac{5}{12}\pi} H^{(2)}_{\frac{1}{3}}(\ ''\ ) \end{array} \right. & \underline{(r \geq r_0)} \quad (2,4\ {}^{a}_{b}) \\
f = \sqrt{\frac{\pi}{3}}(r_0-r)^{\frac{1}{3}} \left\{ \begin{array}{l} e^{-i\frac{\pi}{12}} H^{(1)}_{\frac{1}{3}}\left(-i\frac{2\alpha}{3}(r_0-r)^{\frac{3}{2}}\right) + e^{-i\frac{5}{12}\pi} H^{(2)}_{\frac{1}{3}}(\ ''\ ) \\ e^{i\frac{5}{12}\pi} H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(\ ''\ ) \end{array} \right. & \underline{\underline{(r \leq r_0)}} \quad (2,5\ {}^{a}_{b}) \\
f = \left(-F_1(r)\right)^{-\frac{1}{4}} \left\{ \begin{array}{l} e^{\int_{r}^{r_0}\sqrt{-F_1}\,dr - i\frac{\pi}{4}}(1+\cdots) + e^{-\int_{r}^{r_0}\sqrt{-F_1}\,dr + i\frac{\pi}{4}}(1+\cdots) \\ e^{\int_{r}^{r_0}\sqrt{-F_1}\,dr + i\frac{\pi}{4}}(1+\cdots) \end{array} \right. & \underline{\underline{(r \ll r_0)}} \quad (2,6\ {}^{a}_{b})
\end{cases}
$$

(ココニ $\alpha^2 = F_1'(r_0)$)

以上ガ二ツノ ~~lin~~ linear independent solution ヲ全部分デ別々ノ approximation solution トシテ書キ表ハシタモノデアル。
rガアマリ小サクナイト $F_1(r)$ ノ変化ガハゲシクナイカラ (2,6) ハアテハマラナクナルガ 我々ノ場合ニハ (2,6) デ間ニ合フ

<u>$\alpha' < 0$</u> ノ場合ニハ $F_1(r)$ ハ ~~always~~ 常ニ負デアルカラ solution ハ簡単ニナツテ 凡テノ r ニツイテ成立スルモノヲ得ル。

$$f = \left(-F_1(r)\right)^{-\frac{1}{4}} e^{-\int^{r}\sqrt{-F_1}\,dr} \qquad (2,7)$$

以上ノ解ヲ利用シテ (1,9) ノ第二式ノ解ヲ求メルコトガ出来ル。

[B]. $\underline{r<a}$ ノ解

(1,10) ノ解ヲ求メルニハ

$$-\frac{D_0+J_{10}-J_{20}}{2J_0} \pm \sqrt{\left(\frac{D_0+J_{10}-J_{20}}{2J_0}\right)^2+1} = \begin{cases}\lambda_1 > 0\\ \lambda_2 < 0\end{cases}$$

ナル如キ λ ヲトリ

$h_1 = f_l + \lambda_1 g_l,\quad h_2 = f_l + \lambda_2 g_l$ トオケバ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2h_1}{dr^2} + \left(k_1^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)h_1 = 0\\ &\frac{d^2h_2}{dr^2} + \left(-k_2^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)h_2 = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (2,8)$$

$$k_1^2 = E_0 + J_{10} + \lambda_1 J_0 = \sqrt{1+\varepsilon^2}\,J_0 - \frac{D_0-J_{10}-J_{20}}{2} + E_0$$

$$k_2^2 = -(E_0+J_{10}+\lambda_2 J_0) = \sqrt{1+\varepsilon^2}\,J_0 + \frac{D_0-J_{10}-J_{20}}{2} - E_0$$

$$\varepsilon = \frac{D_0+J_{10}-J_{20}}{2J_0}$$

(2,8) ノ解ハ Bessel function デ表ハサレル

$$\left.\begin{aligned} &h_1 = \sqrt{k_1 r}\,J_{l+\frac{1}{2}}(k_1 r)\\ &\cancel{h_2 = \sqrt{k_2 r}\,J_{l+\frac{1}{2}}(k_2 r)}\\ &h_2 = \sqrt{ik_2 r}\,J_{l+\frac{1}{2}}(ik_2 r)\end{aligned}\right\} \qquad (2,9)$$

之カラ f_l g_l ガ求マル.

§3.

$l=0$ ノ場合ニハ boundary condition ヲ満足スル解ハ
$0{,}7\,Z^{\frac{2}{3}} > E-D > 0 \quad (E, D \text{ in MeV})$ ナラバ[(1)]

$$f_0 = \begin{cases} \frac{\sqrt{4\pi}}{k}\sin kr + C_0 e^{ikr} & r>a \quad (3{,}1a) \\ -A_2 a_1 \sin k_1 r + A_1 a_2 \sinh k_2 r & r<a \quad (3{,}1b) \end{cases}$$

$$g_0 = \begin{cases} Q_0\sqrt{k'}\,(-G(r))^{-\frac{1}{4}} e^{\psi(r) - i\frac{\pi}{4}} & (3{,}2a) \\ a_1 \sin k_1 r - a_2 \sinh k_2 r & (3{,}2b) \end{cases}$$

ト書ケル.

$$G(r) = k'^2 - \frac{K_0}{r}, \quad \psi(r) = \int_r^{r_1}\sqrt{-G}\,dr,$$

$$k'^2 = E_0 - D_0, \quad r_1 = \frac{K_0}{k'^2} \quad (G(r_1)=0).$$

---

(1) $0{,}7\,Z^{\frac{2}{3}} > E-D > 0$ ノ條件ハ $G(r)=0$ ナル点 r_1 ガ a ヨリモ大キクテ $r \approx a$ デハ (1,9) ノ第二式ノ解トシテ (2,6) ノ type ノモノヲ用ヒラレルト云フ條件デアル.

$l=0$ デハ $r_1 = \frac{K_0}{k_1^2}$ デアルカラ $r_1 \approx a$ ノ condition ヲ書ケバ

$$r_1 = \frac{K_0}{k_1^2} \approx 1{,}4\cdot 10^{-13}\,\frac{Z-1}{E-D} \approx a\cdot 10^{-12}$$

$$(E, D \text{ in MV} \quad a \text{ in } 10^{-12}\,\text{cm}.)$$

$Z = ka^3$ ト assume シ, $Z=50$ デ $a=0{,}7$ デアルト見レバ $k=140$ トナルカラ 上ノ條件ハ

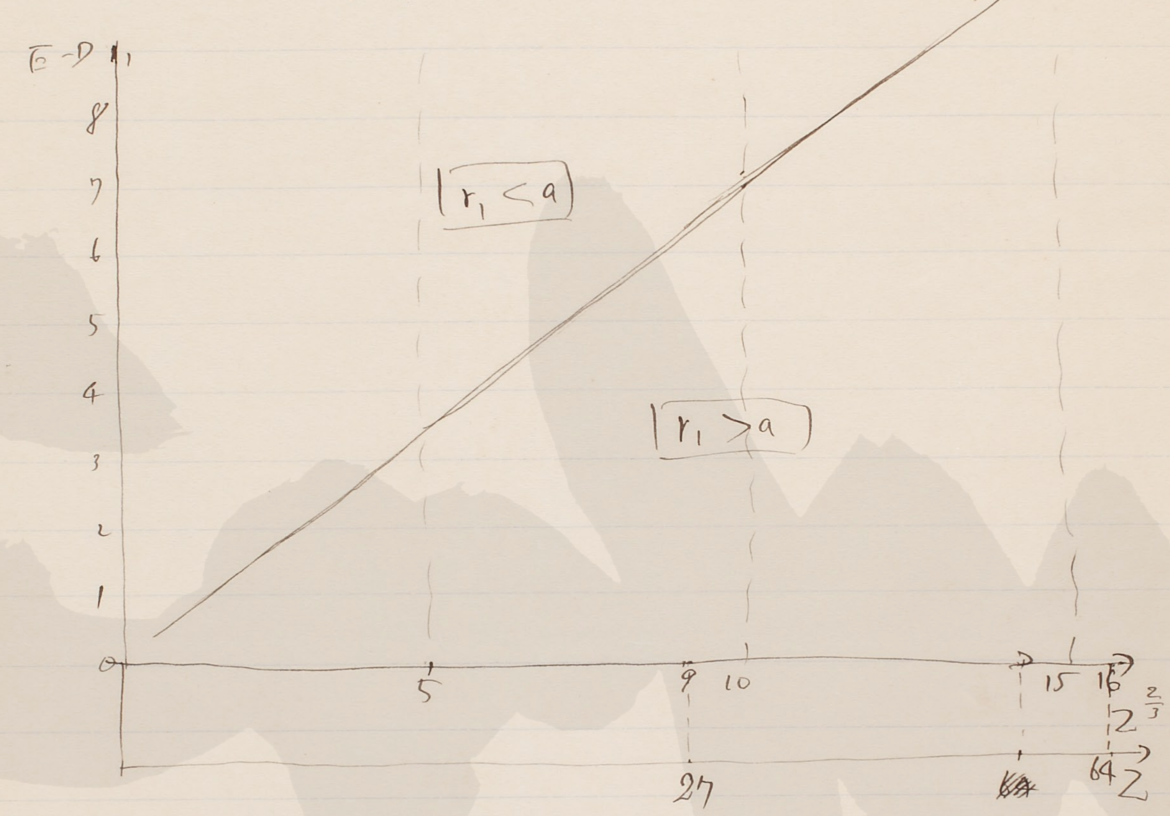
$a = \frac{25}{125}$

$\cancel{a = 1{,}4\,\frac{Z-1}{E-D}}$

$$E-D = 0{,}14\,\frac{Z}{a} = 0{,}14\,\frac{Z}{0{,}19\,Z^{\frac{1}{3}}} = 0{,}74\,Z^{\frac{2}{3}}.$$

故ニ $0{,}7\,Z^{\frac{2}{3}} \gg E-D > 0$ ナラバ (3,2a) ガ valid ナワケデアル

$0.7 Z^{\frac{2}{3}} = E-D$ ヲ graph ニ書クト



(3, 2a) ノ derivative ハ $r \simeq a$ デハ 大体

$$g_0' = -Q_0\sqrt{k'}\,(-G(r))^{\frac{1}{4}}\, e^{\psi(r) - i\frac{\pi}{4}} \qquad (3,4)$$

ニ完テヨイ。

(3, 1a) ト (3, 1i) トヲツナグト

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\lambda_2 A}\left(\frac{\sqrt{4\varepsilon}}{k} A_2 + B_2 C_0 e^{ika}\right) \\ a_2 &= \frac{1}{\lambda_1 A}\left(\frac{\sqrt{4\varepsilon}}{k} A_1 + B_1 C_0 e^{ika}\right) \end{aligned}\right\} (3,6)$$

ソウシ コニ

$$\left.\begin{aligned}
A &= k_1 \cos k_1 a \sinh k_2 a - k_2 \sin k_1 a \,\overset{\cosh}{\cancel{\sinh}}\, k_2 a \\
A_1 &= k_1 \sin k a \cos k_1 a - k \cos k a \sin k_1 a \\
A_2 &= k_2 \sin k a \cosh k_2 a - k \cos k a \sinh k_2 a \\
B_1 &= k_1 \cos k_1 a - i k \sin k_1 a \\
B_2 &= k_2 \cosh k_2 a - i k \sinh k_2 a
\end{aligned}\right\}$$

然ルニ (3, 2a) (3, 2i) ニヨツテ

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{\sqrt{k'}}{A} P_2 Q_0 e^{\psi(a) - i\frac{\pi}{4}} \\
a_2 &= -\frac{\sqrt{k'}}{A} P_1 Q_0 e^{\psi(a) - i\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}\right\} \quad (3.8)$$

ココニ

$$\begin{aligned}
P_1 &= G_0^{\frac{1}{4}} \sin k_1 a + k_1 G_0^{-\frac{1}{4}} \cos k_1 a \\
P_2 &= G_0^{\frac{1}{4}} \sinh k_2 a + k_2 G_0^{-\frac{1}{4}} \cosh k_2 a \\
G_0 &= -G(a) \approx 3.5 \cdot 10^{24} Z^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

(3, 6), (3, 8) カラ

$$C_0 = -\frac{\sqrt{4\pi}}{k} \frac{\lambda_1 P_1 A_2 - \lambda_2 P_2 A_1}{\lambda_1 P_1 B_2 - \lambda_2 P_2 B_1} e^{-ika}$$

$$Q_0 = \frac{\sqrt{4\pi}}{k} \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{B_1 A_2 - B_2 A_1}{\lambda_1 P_1 B_2 - \lambda_2 P_2 B_1} e^{-\psi(a) + i\frac{\pi}{4}}$$

更ニ

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= G_0^{\frac{1}{4}} \tan k_1 a + k_1 G_0^{-\frac{1}{4}} \\
\Gamma_2 &= G_0^{\frac{1}{4}} \tanh k_2 a + k_2 G_0^{-\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

トオケバ

$$C_0 = -\frac{\sqrt{4\pi}}{k} \frac{(\lambda_1 \Gamma_1 k_2 - \lambda_2 \Gamma_2 k_1) \sin k a - (\lambda_1 \Gamma_1 \tanh k_2 a - \lambda_2 \Gamma_2 \tan k_1 a) k \cos k a}{(\lambda_1 \Gamma_1 k_2 - \lambda_2 \Gamma_2 k_1) - i k (\lambda_1 \Gamma_1 \tanh k_2 a - \lambda_2 \Gamma_2 \tan k_1 a)} e^{-ika}$$

$$Q_0 = -\frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{k'}} \frac{k_1 \tanh k_2 a - k_2 \tan k_1 a}{(\lambda_1 \Gamma_1 k_2 - \lambda_2 \Gamma_2 k_1) - i k (\lambda_1 \Gamma_1 \tanh k_2 a - \lambda_2 \Gamma_2 \tan k_1 a)} e^{-ika} e^{-\psi(a) + i\frac{\pi}{4}}$$

之ヲ用ヒテ コヽデ proton-emission ノ cross section ヲ 計算シテ見ヨウ.

$$\Phi_{d\sigma} = |Q_0|^2 \frac{k'}{k} = \frac{4\pi}{k}\frac{(k_1\tan k_2 a - k_2\tan k_1 a)^2}{(\lambda_1\Gamma_1 k_2 - \lambda_2\Gamma_2 k_1)^2 + k^2(\lambda_1\Gamma_1\tan k_2 a - \lambda_2\Gamma_2\tan k_1 a)^2}\, e^{-2\psi(a)} \quad \text{---} (3,11)$$

コヽニ

$$\psi(a) = \frac{K_0}{k'}\cos^{-1}k'\sqrt{\frac{a}{K_0}} - \sqrt{K_0 a - k'^2 a^2} \approx \frac{\pi}{2}\frac{K_0}{k'} - 2\sqrt{K_0 a}$$

故ニ

$$\Phi_{d\sigma} = 4\pi\Lambda_1 \frac{e^{-2\psi(a)}}{k} = 4\pi\Lambda_1 \frac{e^{-\pi\frac{K_0}{\sqrt{E_0-D_0}}+4\sqrt{K_0 a}}}{\sqrt{E_0}}$$

$$\Lambda_1 = \frac{(k_1\tan k_2 a - k_2\tan k_1 a)^2}{(\lambda_1\Gamma_1 k_2 - \lambda_2\Gamma_2 k_1)^2 + k^2(\lambda_1\Gamma_1\tan k_2 a - \lambda_2\Gamma_2\tan k_1 a)^2},$$

①. Λ_1, Λ_2 ハ energy ニハ全ク independent デ. $k_1 k_2, \Gamma_1 \Gamma_2$ ヲ E ノ変化ニ對シテ, アマリ急激ニハ変化シナイト考ヘラレルカラ energy ニ強ク depend スルモノハ

$$\frac{e^{-\pi\frac{K_0}{\sqrt{E_0-D_0}}}}{\sqrt{E_0}}$$

ノ ~~term~~ factor デアル.

$$e^x = 10^{(\log_{10}e)x} = 10^{\frac{x}{2.3}}$$

$$\pi\frac{K_0}{k'} \approx \frac{2}{\sqrt{E-D}}, \quad 4\sqrt{K_0 a} \approx 4\sqrt{0.14}Z^{\frac{2}{3}} = 1.5Z^{\frac{2}{3}}$$

(E, D ハ MV)

デアルカラ

$$\frac{e^{-\pi\frac{K_0}{k'}+4\sqrt{K_0 a}}}{k} = \frac{10^{-0.45\frac{2}{\sqrt{E-D}}+0.65Z^{\frac{2}{3}}}}{2.2\cdot 10^{12}\sqrt{E}}$$

$E = 0.01 \times 10^{-6}$
$\sqrt{E} = 10^{-4}$.

Λ_1 ノ order ヲ計算スル為. $G_0^{\frac{1}{4}} \approx 10^6$ デアルカラ Γ_1, Γ_2 ヲ大体 $10^6 - 10^7$ ノ order ト見テヨイカラ resonance ヲ考ヘナイト.

$$\Lambda_1 \approx 10^{-13} \sim 10^{-14}$$

故ニ

$$\Phi_{dis} = 12 \cdot 10^{-14} \frac{10^{-0.45\frac{2}{\sqrt{E-D}} + 0.65 Z^{\frac{2}{3}}}}{2.2 \cdot 10^{12}\sqrt{E}}$$

$$= 10^{-24} \sim 10^{-25} \times \frac{10^{-0.45\frac{2}{\sqrt{E-D}} + 0.65 Z^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt{E}} \qquad (3,13)$$

普通ノ element デハ $D > 0$ デアルカラ E ガ D ニ近ヅケバ cross section ハ非常ニ小サクナル、~~$E < 0$ ニナ~~ $E - D < 0$ ニナレバ disintegration ハモハヤオキナイノデアル.

② Λ_1 ノ特ニ大キクナツタトキガ resonance デアル. ソノタメニハ ~~[illegible]~~ Λ_1 ノ分母ノ二ツノ term ガ共ニ小サクナケレバナラヌ.

$$\lambda_1\Gamma_1 k_2 - \lambda_2\Gamma_2 k_1 = \varepsilon_1$$

$$\lambda_1\Gamma_1 \tanh k_2 a - \lambda_2\Gamma_2 \tan k_1 a = \varepsilon_2$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 小.

コレカラ

$$\lambda_1\Gamma_1 = \frac{\tan k_1 a \cdot \varepsilon_1 - k_1 \varepsilon_2}{k_2 \tan k_1 a - k_1 \tanh k_2 a}$$

$$\lambda_2\Gamma_2 = \frac{\tanh k_2 a \cdot \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2}{〃}$$

ソウスレバ $\lambda_1\Gamma_1, \lambda_2\Gamma_2$ ガ普通ノ大キサデ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ガ小サイナラバ $k_2 \tan k_1 a - k_1 \tanh k_2 a$ モ $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ ト同ジ order ノ small quantity デナケレバナラヌ. コレハ Λ_1 ノ分子ガ分母ト同ジ order ノ small quantity デナケレバナラヌコトヲ示ス.

13

故ニ resonance ハアリ得ナイ

特ニ incident neutron ノ energy ガ小サイトキハ

$$\sigma_1 = \left(\frac{k_1 \tanh k_2 a - k_2 \tan k_1 a}{\lambda_1 \Gamma_1 k_2 - \lambda_2 \Gamma_2 k_1} \right)^2$$

トナルカラ

$$\lambda_1 \Gamma_1 k_2 - \lambda_2 \Gamma_2 k_1 = 0. \qquad (3,15)$$

$$(k_1 \tanh k_2 a - k_2 \tan k_1 a \neq 0)$$

ノトキニ σ_1 ハ大キクナル.

(3,15) ヲ書キ直スト

$$\lambda_1 \frac{\tan k_1 a}{k_1} - \lambda_2 \frac{\tanh k_2 a}{k_2} = -(\lambda_1 - \lambda_2) G_0^{-\frac{1}{2}} \qquad (3,15')$$

シカシ コノ resonance ハ 一ツノ element ニツイテ energy ヲカヘテ行ッタトキニ cross section ノ非常ニ大キクナル様ナ, アル energy ガ存在スルト云フノデハナク 色々ノ element ノ中デ特ニ cross section ノ大キイ element ガ存在スルト云フコトヲ示スモノデアル

Disintegration cross section ノ式

$$f(Z) = 10^{-0.45\frac{Z}{\sqrt{E-D}} + 0.65 Z^{\frac{1}{3}}}$$

ノ factor ヲ考ヘル.

$$\log_{10} f(Z) = -0.45\frac{Z}{\sqrt{E-D}} + 0.65 Z^{\frac{2}{3}}$$

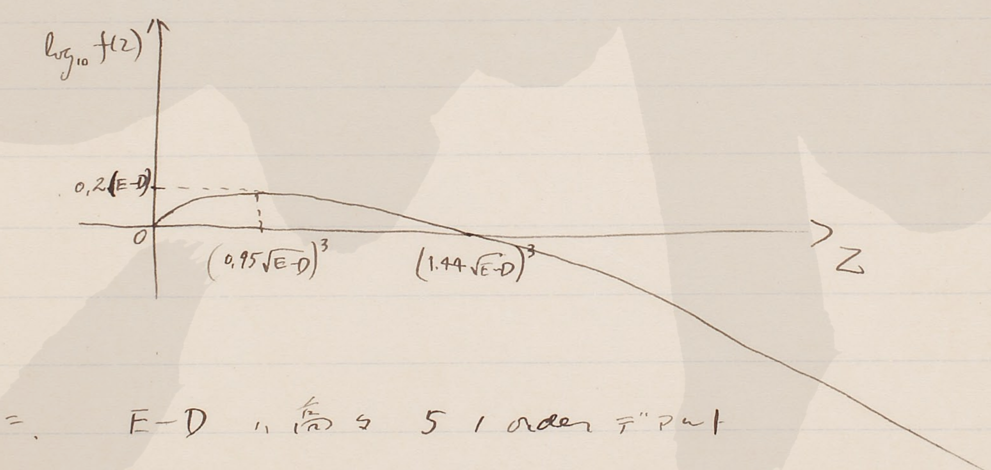
$$\frac{d}{dZ}\left(\log_{10} f(Z)\right) = -0.45\frac{1}{\sqrt{E-D}} + 0.43 Z^{-\frac{1}{3}}$$

故ニ $f(Z)$ ノ max. ハ

$$Z = \left(0.95\sqrt{E-D}\right)^3$$

ノ所デオコリ　ソノ値ハ

$$\left[f(Z)\right]_{max} = 10^{0.2(E-D)}$$



故ニ、$E-D$ ハ高々 5 ノ order デアルト スレバ $f(Z)$ ハ 10 以上ニハナラナイ.

Z ガ $3.0(\sqrt{E-D})^3$ 以上ニナルト $f(Z)$ ハ 1 ヨリズット小サクナル.

$\sqrt{E-D}=1$	ナラバ	$Z=20$ 位デスデニ	$f(Z)=10^{-4}\sim10^{-5}$
$\sqrt{E-D}=2$	ナラバ	$Z=24$ デ	$f(Z)=1.$
		$Z=50$ デ	$=10^{-3}$

Φ_{dis} ガ実験ノ結果ト同ジ order デアルタメニハ $E-D$ ハ数 MV ト考ヘネバナ~~ラ~~ラナイ.

Scattering ノ Cross section ハ (3,10) カラ

$$\Phi_{scatt} = |C_0|^2 = \frac{4\pi}{k^2}\frac{\left[(\lambda_1\Gamma_1 k_2 - \lambda_2\Gamma_2 k_1)\sin k a - (\lambda_1\Gamma_1 \tanh k_2 a - \lambda_2\Gamma_2 \tan k_1 a)\, k \cos k a\right]^2}{(\lambda_1\Gamma_1 k_2 - \lambda_2\Gamma_2 k_1)^2 + k^2(\lambda_1\Gamma_1 \tanh k_2 a - \lambda_2\Gamma_2 \tan k_1 a)^2}$$

--- (3,16)

之ハ 分母ガ zero ニナルトキハ 分子モ zero ニナツテ resonance ノオキナイコトハ明カデアラウ.

以上ノ結果ハ $k_2 = \sqrt{-(E_0 + J_{10} + \lambda_2 J_0)} = i\sqrt{E_0 + J_{10} + \lambda_2 J_0} = ik_2'$ (k_2' real) トナル場合ニモ ソノマヽアテハマル.

$$f(Z) = 10^{-0.45\frac{2}{\sqrt{E-D}} + 0.65 Z^{\frac{1}{3}}}$$

$Z=50$, $\quad Z^{\frac{1}{3}} \approx 3.7$

$$f(50) = 10^{-\frac{22.5}{\sqrt{E-D}} + 9}$$

$E-D$	1	2	3	4
$f(Z)$ $Z=50$	$10^{-13.5}$	10^{-7}	10^{-4}	$10^{-2.5}$

$Z=64$ $\quad Z^{\frac{1}{3}} = 4$

$$f(64) = 10^{-\frac{29}{\sqrt{E-D}} + 10}$$

$E-D$	1	2	3	4
$f(64)$	10^{-19}	$10^{-10.5}$	10^{-7}	$10^{-4.5}$

slow neutron デハ

$$\frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{40}10^{-6}}} = 6\cdot 10^{3}$$

~~故~~ 仮ニ resonance ノ時ニ cross section ガ 10^6 倍位ニナルトスルト

$Z=50$ ノ近クデノ max. cross section ハ

$$\Phi_{max} = 10^{-24\sim 25}\cdot 10^{6}\cdot 6\cdot 10^{3}\cdot 10^{-\frac{22.5}{\sqrt{E-D}}+9}$$

$$\approx 10^{-24}\cdot 10^{-\frac{22.5}{\sqrt{E-D}}+9}\cdot 10^{9}$$

$$\approx \begin{cases} E-D\approx 1 & 10^{-28} \\ E-D\approx 2 & 10^{-22} \\ E-D\approx 3 & 10^{-19} \end{cases}$$

§4.

今マデハ $0{,}74Z^{\frac{2}{3}} > E-D > 0$ ノ場合デアッタ

之レハ実際ニ起ルノハ多ク $\underline{E-D<0}$ ノ場合デアル.

コノトキハ §3 ノ計算ニオイテ (3,2a) ノ代リニ

$$g_{0a} = Q_0\sqrt{k''}\,(-G(r))^{-\frac{1}{4}}\,e^{-\int_a^r\sqrt{-G}\,dr} \qquad (4,2a)$$

ヲ用ヒレバヨイ. $\left(k''=\sqrt{D_0-E_0}\right)$

計算ハ全ク前ト parallel ニ行フコトガ出来ル.

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{\lambda_2 A}\left(\dfrac{\sqrt{4\pi}}{k}A_2 + B_2C_0e^{ika}\right) \\[2mm] a_2 = \dfrac{1}{\lambda_1 A}\left(\dfrac{\sqrt{4\pi}}{k}A_1 + B_1C_0e^{ika}\right) \end{cases} \qquad (4,3)$$

$$\begin{cases} a_1 = -\dfrac{\sqrt{k''}P_2Q_0}{A} \\[2mm] a_2 = -\dfrac{\sqrt{k''}P_1Q_0}{A} \end{cases} \qquad (4,4)$$

コノ二組ノ a_1, a_2 カラ

$$C_0 = -\frac{\sqrt{4\pi}}{k}\,\frac{(\lambda_1\Gamma_1k_2-\lambda_2\Gamma_2k_1)\sin ka-(\lambda_1\Gamma_1\tanh k_2a-\lambda_2\Gamma_2\tan k_1a)k\cos ka}{(\lambda_1\Gamma_1k_2-\lambda_2\Gamma_2k_1)-ik(\lambda_1\Gamma_1\tanh k_2a-\lambda_2\Gamma_2\tan k_1a)}\,e^{-ika}$$

$$Q_0 = -\frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{k''}}\,\frac{k_1\tanh k_2a-k_2\tan k_1a}{(\lambda_1\Gamma_1k_2-\lambda_2\Gamma_2k_1)-ik(\lambda_1\Gamma_1\tanh k_2a-\lambda_2\Gamma_2\tan k_1a)}\,e^{-ika}$$

$$\cdots\cdots \quad (4,5)$$

コノ C_0 ハ §3 ト全ク同ジデ Q_0 ノ方ハ $e^{-\psi(a)+i\frac{\pi}{4}}$ ノ factor ガトレル.
Q_0 ハコノ場合ニハ直接物理的意味ヲモタナイ. $|C_0|^2$ ハ scattering ノ cross section デ, 之ハ (3,16) ト同ジデアル.

Slow neutron デハ

$$\Phi_{scatt} = 4\pi a^2 \left(1 - \frac{\lambda_1\Gamma_1 \tanh k_2 a - \lambda_2\Gamma_2 \tan k_1 a}{\lambda_1\Gamma_1 k_2 a - \lambda_2\Gamma_2 k_1 a} \right)^2 \qquad (4.9)$$

ソレハ

$$\lambda_1\Gamma_1 k_2 - \lambda_2\Gamma_2 k_1 = 0$$

$$\text{or} \quad \frac{\lambda_1 \tan k_1 a}{k_1} - \frac{\lambda_2 \tanh k_2 a}{k_2} = -(\lambda_1 - \lambda_2)\, G_0^{-\frac{1}{2}} \qquad (4.8)$$

デ resonance デアル.

モシ $J_0 = 0$ ナラバ (4.9) ハ Bethe ノ式ニ移行スル ハズデアル

$D + T_1 - T_2 \gtrless 0$ ニ従ッテ, $J_0 \to 0$ デ

$$\varepsilon \to \pm\infty$$

$$\lambda_1 \to {}^{0}_{\infty} \qquad \lambda_2 \to {}^{-\infty}_{0}$$

$$k_1 \to {}^{\sqrt{E_0 + T_{10}}}_{\sqrt{E_0 - D_0 + 2T_{10} + T_{20}}}, \quad k_2 \to {}^{\sqrt{-(E_0 - D_0 + T_{20})}}_{\sqrt{-(E_0 + T_{10})}}$$

E_0 ト T_{10} ~~ニ~~ ニ比シテ小サイト考ヘテ省略スレバ, 結局

$$\Phi_{scatt} = 4\pi \left(a - \frac{\tan k_1 a}{k_1} \right)^2 \qquad k_1 = \sqrt{J_0}$$

トナル. コレハ Bethe ノ式ト一致スル.

モシ $J_0 \gg T_{10}, T_{20}, D_0, E_0$ ナラバ $\varepsilon \approx 0$ デアルカラ;

$$\lambda_1 \approx 1, \quad \lambda_2 \approx -1$$

$$k_1 \approx k_2 \approx \sqrt{J_0}$$

故ニ (4.9) ハ

$$\Phi_{scatt} = 4\pi a^2 \left(1 - \frac{\Gamma_1 \tanh k_1 a + \Gamma_2 \tan k_1 a}{(\Gamma_1 + \Gamma_2) k_1 a} \right)^2$$

$G_0^{\frac{1}{4}}$ ヲ $\sqrt{J_0}\,G_0^{-\frac{1}{4}}$ ニ対シテ省略スレバ

$$\Phi_{scatt} \approx 4\pi\left[a - \frac{1}{k_1}\frac{\tan k_1 a + \tanh k_2 a}{2}\right]^2, \quad k_1 = \sqrt{J_0}$$

トナル。コレハ $k_1 a = (n+\frac{1}{2})\pi$ デ resonance ヲ示ス。コノ点ハ Bethe ノトキト同ジデアル。

一般ニ、resonance ノオコルタメニハ nucleus ノ wave function ノ amplitude ガ大キクナラネバナラナイ。コノ條件ガ Bethe ノ場合ニハ

$$k_1 a = (n+\tfrac{1}{2})\pi$$

デ表ハサレタノデアルガ、我々ノ場合ニハ (4.8) デ表ハサレル様ナ複雑ナ relation デキメラレル。

モシ α-particle ノ emission ヲ考ヘニ入レテ計算シタトスレバ resonance ノ條件ハモット複雑ニナラウ。シカシヤハリ Nucleus 内ノ wave function ノ nucleus boundary ニ於ケル phase ~~等~~ $k_1 a$ ガドノ様ナ値ヲトルカヲキメル ~~condition~~ 條件デアラウ。シカシ k_1 ハ Bethe ノトキトハ違ッテ $J_0\ J_1\ J_2$ etc ノ他ニ更ニ nucleus ノ mass defects ~~等~~ ニ depend スルカラ、$k_1 a$ ハ element ト共ニ uniform ニ増加スルワケニハユカナイ。

故ニ resonance ハ Bethe ノ ~~理論~~ 計算ノ場合ヨリモモット余計ニ起リ得ルワケデアラウ。

$$(Z-1)e\vec{R}+e\vec{r}$$

$$-\left(e-\frac{m'Ze}{M'}\right)(\vec{r}-\vec{R})$$

$$=\frac{m'Ze}{M'}\vec{r}+\left((Z-1)+1-\frac{m'Z}{M'}\right)e\vec{R}$$

$$\frac{(Z-1)\cancel{(M'+m')}+}{M'}$$

$$Z-\frac{m'Z}{M'}=\frac{M'-\frac{m'M'}{M'+m'}}{M'}$$

$$=\frac{M'}{M'+m'}$$

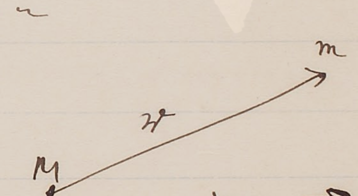
§5 Capture

Fast neutron ニ対シテハ cross section ノ小サイコトハ明カデアルカラ slow neutron ノ場合ノミヲ扱フ.

Capture ニ関係スル radiation トノ interaction トシテハ

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}\cdot\dot{q}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}\cdot\dot{q}_2 \end{pmatrix} \qquad (5.1)$$

ヲトル. q_1, q_2 ハ dipole moment デアル



$-2e\frac{m'}{m'+M'}$

$$\frac{Ze}{\cancel{M}}\vec{R} = \cancel{\quad}(\vec{r}-\vec{R})$$

$$+Ze\left(\frac{m'\vec{r}+M'\vec{R}}{m'+M'}\right)$$

$$(Z-1)e\vec{R}+e\vec{r}$$

Neutron-Nucleus デハ

$$q_1 = -\mu\frac{Ze}{M}r$$

Proton-Nucleus デハ

$$q_2 = -\mu\frac{Ze}{M}r + \mu\left(\frac{e}{m}+\frac{e}{M}\right)r$$

$$\mu = \frac{Mm}{M+m}$$

M ガ m ニ比ベテズット大キイトキハ, $\mu \approx m$,

又, $\frac{Z}{M} \approx \frac{1}{2m}$ デアルカラ

$$q_1 \approx -q_2 \approx -\frac{e}{2}r$$

$$= \left\{e - \frac{\cancel{m}\,\cancel{(Z-1)e}}{M'}\right\}(\vec{r}-\vec{R})$$

$$\frac{m'+M'}{m'm}\,\cancel{(Z-1)e}\,(Z-1)e\left(\frac{m'\vec{r}+M'\vec{R}}{m'+M'}\right)$$

Incident neutron ノ wave function ガ infinity デ e^{ikz} ニナル様ニトッテアリ, 且, bound state ノ wave function φ_n ガ普通ニ normalize サレテ居レバ, $\varphi_k \to \varphi_n$ ノ transition ニヨル cross section ハ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{4}{3}\left(\frac{\nu_{kn}}{c}\right)^3 \frac{1}{\hbar v}\left|q_{kn}\right|^2, \qquad \nu_{kn} = \frac{E_k - E_n}{\hbar} \\ &q_{kn} = \int \varphi_n^* q\, \varphi_k \, d\tau \end{aligned}\right\} \quad (5.9)$$

デ表ハサレル.

今ノ場合ニハ

$$q = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} z$$

$$e_1 = -\frac{\mu Z e}{M}, \quad e_2 = -\frac{\mu Z e}{M} + \mu\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) e$$

$$\varphi_k = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad (u_1 \to e^{ikz})$$

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

ト書ケルカラ

$$q_{kn} = \int (\bar{w}_1 \ \ \bar{w}_2) \begin{pmatrix} e_1 z & 0 \\ 0 & e_2 z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} d\tau$$

$$= e_1 \int \bar{w}_1 z\, u_1 \, d\tau + e_2 \int \bar{w}_2 z\, u_2 \, d\tau \qquad (5,10)$$

Transition ハ incident neutron ノ $l=0$ ノ part カラ $l=1$ ノ bound state ニ行クモノガ一番強イデアラウカラ ソレヲ計算スル.

マヅ q_{kn} ノ z-comp. ノミヲ調ベル.

$$I_1 = \int \bar{w}_1 z\, u_1 \, d\tau = \int \bar{w}_1 r\cos\theta\, u_1 \, d\tau.$$

コレハ, u_1 ガ $l=0, m=0$ デアルカラ, w_1 ガ $l=1, m=0$ ノトキノミ exist スル.

$$u_1 = \frac{f_0}{r} Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{f_0}{r}$$
$$w_1 = \frac{f_{n1}}{r} Y_{10} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi}}\frac{f_{n1}}{r}\cos\theta$$

ヲ I_1 ノ式ニ代入スレバ

$$I_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi}}\int \frac{f_0\bar{f}_{n1}}{r^2}\cos^2\theta\, d\tau = \frac{\sqrt{3}}{2}\int f_0\bar{f}_{n1}\, r\, dr\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^\infty f_0\bar{f}_{n1}\, r\, dr$$

同様ニシテ

$$I_2 = \int \bar{w}_2\, z\, u_2\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^\infty g_0\bar{g}_{n1}\, r\, dr$$

之カラ $|e_1 I_1 + e_2 I_2|^2$ ヲトレバ 其ノ z-comp. ノミヲ考ヘタ $|q_{kn}|^2$ ヲ得ル。 x, y, comp. ヲ考ヘニ入レレバ コノ値ヲ3倍スレバヨイ。

故ニ 全体トシテ

$$|q_{kn}|^2 = \left|e_1\int_0^\infty f_0\bar{f}_{n1}\, r\, dr + e_2\int_0^\infty g_0\bar{g}_{n1}\, r\, dr\right|^2$$

故ニ (5,9) ハ

$$\left.\begin{aligned}&\frac{4}{3}\left(\frac{\nu_{kn}}{c}\right)^3\frac{1}{\hbar v}\left|e_1 I_f + e_2 I_g\right|^2\\ &I_f = \int_0^\infty f_0\bar{f}_{n1}\, r\, dr,\quad I_g = \int_0^\infty g_0\bar{g}_{n1}\, r\, dr\end{aligned}\right\}\quad (5,11)$$

トナル。之ヲアラユル n ニツイテ sum up スレバ capture ニヨル cross section ヲウル

コノ cross section ガ大キクナルノハ、ヤハリ ~~■~~ incident neutron ノ wave function ノ ~~■~~ nucleus 内ニ於ケル amplitude ガ大キクナル

トキデアルカラ. Scattering ノ cross section ノ大キイトキハ当然 capture ノ cross section モ大キクナルハズデアル.

シカモ cross section ノ order ガ Bethe ノ場合ト同ジデアラウコトハ容易ニ考ヘラレル.

$$q_{kn} = e_1 \int \bar{w}_1 \mathcal{V} u_1 d\tau + e_2 \int \bar{w}_2 \mathcal{V} u_2 d\tau \qquad (5,10)$$

ここに w_1, w_2 は $l=1$ の bound state の wave function で, u_1, u_2 は

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{f_0}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{k}\sin kr + \frac{c_0}{\sqrt{4\pi}} e^{ikr}\right) && r>a \\ &= \frac{1}{r}\left(-\lambda_2 \frac{a_1}{\sqrt{4\pi}} \sin k_1 r + \lambda_1 \frac{a_2}{\sqrt{4\pi}} \sinh k_2 r\right) && r<a \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{g_0}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{a_0}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{k''}\left(-G(r)\right)^{-\frac{1}{4}} e^{-\int_a^r \sqrt{\;}\, dr}\right) && r>a \\ &= \frac{1}{r}\left(\frac{a_1}{\sqrt{4\pi}} \sin k_1 r - \frac{a_2}{\sqrt{4\pi}} \sinh k_2 r\right) && r<a \end{aligned}\right\} (5,11)$$

ここに

$$\left\{\begin{aligned} \frac{a_1}{\sqrt{4\pi}} &= \frac{\Gamma_2 a}{\cos k_1 a\,(\Pi_1 - ika\Pi_2)} e^{-ika} \\ \frac{a_2}{\sqrt{4\pi}} &= \frac{\Gamma_1 a}{\cosh k_2 a\,(\Pi_1 - ika\Pi_2)} e^{-ika} \\ \frac{c_0}{\sqrt{4\pi}} &= -\frac{1}{k}\frac{\Pi_1 \sin ka - \Pi_2\, ka \cos ka}{\Pi_1 - ika\Pi_2} e^{-ika} \\ \frac{a_0}{\sqrt{4\pi}} &= -\frac{1}{\sqrt{k''}}\frac{\Delta_1}{\Pi_1 - ika\Pi_2} e^{-ika} \end{aligned}\right. \qquad (5,12)$$

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned} \Pi_1 &= \lambda_1\Gamma_1 k_2 a - \lambda_2\Gamma_2 k_1 a \\ \Pi_2 &= \lambda_1\Gamma_1 \tanh k_2 a - \lambda_2\Gamma_2 \tan k_1 a \\ \Delta_1 &= k_1 a \tanh k_2 a - k_2 a \tan k_1 a \end{aligned}\right. \\ &\left\{\begin{aligned} \Gamma_1 &= G_0^{\frac{1}{4}} \tan k_1 a + k_1 G_0^{-\frac{1}{4}} \\ \Gamma_2 &= G_0^{\frac{1}{4}} \tanh k_2 a + k_2 G_0^{-\frac{1}{4}} \\ G_0 &= k''^2 + \frac{\mathrm{I\!E}_0}{a} \approx \frac{\mathrm{I\!E}_0}{a} \approx 3.5 \cdot 10^{24} Z^{\frac{2}{3}} \end{aligned}\right. \\ &\left\{\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{1+\varepsilon^2}\, J_0 + \frac{J_{10}+J_{20}}{2} - \frac{D_0}{2} + E_0 \\ k_2 &= \sqrt{1+\varepsilon^2}\, J_0 - \frac{J_{10}+J_{20}}{2} + \frac{D_0}{2} - E_0 \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} (5,13)$$

k_1, k_2 ガ共ニ imaginary ニナルコトハ アリ得ナイカラ. ドチラカ一方ガ imaginary ニナルコトハアル.

$$\Lambda = \cos k_1 a \cosh k_2 a \,(\Pi_1 - i k a \Pi_2)$$

トオケバ, Λ ハ $k_1 a$ ガ常ニ 5〜10 ノ real デアルト考ヘレバ

$$\cancel{\Lambda} \; k_1 a \sinh k_2 a \; G_0^{\frac{1}{4}}$$

ノ order ノ量ト考ヘテヨイ.

ソコ, E ガ大キイ値ナラバ k ガ大キイカラ, $k_1 \to k$, $k_2 \to ik$, $G_0 \to -k^2$ トナルカラ

$$\Lambda \longrightarrow k^{\frac{3}{2}} a$$

Λ ヲ用ヒテ (5,12) ヲ書ケバ

$$\left.\begin{aligned}
\frac{a_1}{\sqrt{4\pi}} &= \frac{1}{\Lambda} \cosh k_2 a \;\Gamma_2\, a e^{-ika} \\
\frac{a_2}{\sqrt{4\pi}} &= \frac{1}{\Lambda} \cos k_1 a \;\Gamma_1\, a e^{-ika} \\
\frac{C_0}{\sqrt{4\pi}} &= -\frac{1}{\Lambda}\frac{1}{k} \cos k_1 a \cosh k_2 a \,(\Pi_1 \sin ka - \Pi_2\, ka \cos ka)\, e^{-ika} \\
\frac{D_0}{\sqrt{4\pi}} &= -\frac{1}{\Lambda}\frac{1}{\sqrt{k}} \cos k_1 a \cosh k_2 a \;\Delta_1 e^{-ika}
\end{aligned}\right\} (5,12')$$

u_1, u_2 ヲ energy ニツイテ normalize シタモノヲ u_{1E}, u_{2E} ト書ケバ

$$\left.\begin{aligned}
u_{1E} &= A_0 k^{\frac{1}{2}} u_1 \\
u_{2E} &= A_0 k^{\frac{1}{2}} u_2 \\
A_0 &= \left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Big/ \pi\hbar
\end{aligned}\right\} (5,14)$$

然ル. u_{1E}, u_{2E} ハ (5, 12') カラモ明カナ様ニ, Nucleus ノ質量数ニヨツテ異ル amplitude ヲモチ 且, $k^{\frac{1}{2}}$ ニ比例スル. ウチ, k ニハ Nucleus ノ質量数ニモアマリ depend シナイ wave function ヲ用ヒテ表ハスコトヲ考ヘル

$$u_{1E} = k^{\frac{1}{2}} \frac{k_1 a \sinh k_2 a}{\Lambda} u_{1W}$$

etc.

トオケバ

$$\left.\begin{aligned} u_{1W} &= \frac{\Lambda}{k_1 a \sinh k_2 a} A_0 u_1 \\ u_{2W} &= \frac{\Lambda}{〃} A_0 u_2 \end{aligned}\right\} (5, 15)$$

u_{1W}, u_{2W} ハ. $\cos k_1 a\, \Gamma_1$, $\cosh k_2 a\, \Gamma_2$ ガ同時ニ zero ニナラナイ限リ Nucleus ノ質量数ニアマリ depend シナイト考ヘラレル. 又, Energy E ニモ depend シナイ.

energy ガ非常ニ大キクナレバ

$$u_{1W} \to u_{1E}, \quad u_{2W} \to u_{2E}$$

Q_{kn} ノ z-component ハ, u_{1W}, u_{2W} ヲ用ヒテ書ケバ

$$I_z = e_1 \int \bar{w}_1 z u_1 \, dz + e_2 \int \bar{w}_2 z u_2 \, dz$$

$$\approx -\frac{e}{2A_0} \cdot \frac{k_1 a \sinh k_2 a}{\Lambda} \left(\int (\bar{w}_1 z u_{1W} - \bar{w}_2 z u_{2W}) \, dz \right) *$$

コヽニ. $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$ ハ $l=1$, $m=0$ ノ solution デアル.

---

* $e_1 = -e_2 = -\frac{e}{2}$

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$$

$$p = m\dot{q} \qquad p_{mn} = 2\pi m i \nu_{mn} q_{mn}$$

$$p_{mn} q_{nl} - q_{mn} p_{nl} = \frac{h}{2\pi i}\delta_{ml}$$

$$\frac{2\pi m}{h}\left\{ \nu_{mn} q_{mn} q_{nl} - \nu_{nl} q \right.$$

$$(\nu_{nm} + \nu_{nl})\, q_{mn} q_{nl} = \frac{1}{2}\delta_{ml}$$

$$\frac{2\pi m}{h} \sum_n \int \tilde{\Psi}_m q \Psi_n dq \cdot \int \tilde{\Psi}_n' q' \Psi_l' dq' = \frac{1}{2}\delta_{ml}$$
$$(\nu_{nm} + \nu_{nl})$$

$$\frac{4\pi \nu m}{h} \int \tilde{\Psi}_m q \Psi_n dq \cdot \int \tilde{\Psi}_n' q' \Psi_l' dq' = \delta_{ml}$$

$$\int \tilde{\Psi}_m \Psi_l(E)\, dq = \delta(E; E') \qquad \frac{dE}{dl}$$

p

$$\int \tilde{\Psi}\Psi \frac{dE}{dE}\, dE\, dq = 1,$$

$$\frac{dl}{dE} \int \frac{4\pi}{h^3}\sqrt{E}\, dE \qquad \frac{4\pi p^2 dp}{h^3}$$

$$f_\varpi = \frac{2\mu}{\hbar}c\left|\int(\varpi_1 z u_{1\varpi} - \varpi_2 z u_{2\varpi})\,d\tau\right|^2$$

ハ oscillator strength デ、$\frac{1}{E}$ ノ dimension ヲモツ。transition ハ 全部 $\hbar c$ ノ order ノモノト考ヘテヨイカラ.

$$\hbar c\, f_\varpi \approx 1$$

故ニ

$$|I_z| \approx \frac{e}{2}\frac{1}{A_0}\frac{1}{\sqrt{3\mu c}}\frac{k_1 a \sinh k_2 a}{\Lambda}$$

$l=1$ ノ level ニハ $m=0$, $m=\pm 1$ ノ 3ツノ eigenfunction ガアルカラ

$$|q_{km}|^2 \approx 3|I_z|^2$$

先 $\frac{\pi^2 e^2 h\nu}{m^2 c^3 v}\cdot l$

$\frac{\pi^2 e^2}{mc\cdot v}\cdot l$

故ニ

$$\Phi_{cap} \approx \frac{\pi^2 e^2 \hbar c}{c^3 \mu^2 v}\frac{(k_1 a \sinh k_2 a)^2}{|\Lambda|^2} \qquad (5, 17)$$

コノ最後ノ factor ハ、min ノトキニ $\kappa_0^{-\frac{1}{2}}$ ノ order デ ~~…~~ resonance ノトキハ ズット大キクナル。resonance ヲ考ヘナケレバ

$$\Phi_{cap} \approx 10^{-41}\frac{\nu}{v}$$

$$\frac{10\cdot 2\cdot 10^{-19}\cdot 6\cdot 10^{-27}}{2\times 10^{-48}\cdot 27\cdot 10^{30}}$$

$\nu = 10^{21}$, $v = 10^5$ ト考ヘレバ

$$\Phi_{cap} \approx 10^{-25}$$

$$= \frac{\cancel{2}\,10^{-45}}{\cancel{4}\times 10^{-18}}\cdot 10^{-13}$$

$$= 10^{-40}$$

(5, 17) ノ式ハ Bethe ノ求メタ式ノ C ノ代リニ $\frac{k_1 a \sinh k_2 a}{\Lambda}$ ガ来テイル.

29 13

~~[illegible]~~ capture ノ cross section ト scattering cross section ハ

$$\Phi_{cap} = \frac{\pi^2 e^2 \hbar c}{c^3 \mu v} \frac{(k_1 a \sinh k_2 a)^2}{\cos^2 k_1 a \cosh^2 k_2 a (\Pi_1^2 + k^2 a^2 \Pi_2^2)} \qquad (5,18)$$

~~[illegible] scatter~~

$$\Phi_{scatt} = \frac{4\pi}{k^2} \frac{(\sin k_1 a\, \Pi_1 - k_1 a \cos k_1 a\, \Pi_2)^2}{\Pi_1^2 + k^2 a^2 \Pi_2^2} \qquad (5,19)$$

slow neutron デハ

$$\Phi_{cap} = 0{,}3 \cdot 10^{-12} \frac{(k_1 a)^2 \tanh^2 k_2 a}{\cos^2 k_1 a\, \Pi_1^2}$$

$$\Phi_{scatt} = 4 \cdot 10^{-24} \frac{(\Pi_1 - \Pi_2)^2}{\Pi_1^2}$$

コノニツノ ratio ヲトレバ

$$\frac{\Phi_{scatt}}{\Phi_{cap}} = 10^{-11} \frac{\cos^2 k_1 a (\Pi_1 - \Pi_2)^2}{(k_1 a)^2 \tanh^2 k_2 a} \qquad (5,20)$$

之ガ

$$\Pi_1 = \Lambda_1 \Gamma_1 k_2 a - \Lambda_2 \Gamma_2 k_1 a = 0 \qquad (5,21)$$

ノ resonance ノトキニドウナルカヲ調ベル.

(5,21) ヲ用ヒレバ

$$\Pi_2 = \Lambda_1 \Gamma_1 \tanh k_2 a - \Lambda_2 \Gamma_2 \tan k_1 a = \frac{\Lambda_1 \Gamma_1}{k_1 a}(k_1 a \tanh k_2 a - k_2 a \tan k_1 a)$$

$$= \frac{\Lambda_1 \Gamma_1}{k_1 a} \Delta_1 = \frac{\Lambda_2 \Gamma_2}{k_2 a} \Delta_1$$

又、一般ニ

$$\Delta_1 = G_0^{-\frac{1}{4}} (k_1 a \Gamma_2 - k_1 a \Gamma_1)$$

デアルカラ 之ニ (5,21) ヲ用ヒレバ

$$= \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{\Lambda_2} G_0^{-\frac{1}{4}} \Gamma_1 k_2 a = \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{\Lambda_1} G_0^{-\frac{1}{4}} \Gamma_2 k_1 a$$

故ニ (5, 23) ハ

$$\frac{\Phi_{scatt}}{\Phi_{cap}} \approx 10^{-11} G_0^{-\frac{1}{2}} \frac{\cos^2 k_1 a\, \Gamma_2^4}{(k_2 a)^2 \tanh^2 k_2 a} \qquad (5, 22)$$

$\cos k_1 a$ ガ zero ノトキハ (5, 21) カラ $\cos k_2' a$ ($k_2 = i k_2'$) モ zero デナケレバナラナイカラ $\Gamma_2^4 / \tanh^2 k_2 a \approx G_0 \tan^2 k_2' a$ ガ infinity ニナリ ratio ハ結局相當ニ大キイ

故ニ ratio ガ小サクナルノハ
$\Gamma_2 = 0$
ノトキデアル. (5, 21) カラ Γ_1 モ zero ニナルカラ コノトキハ (5, 18) ハアテハマラナイガ (5, 12') ヲ見レバ分ルヤウニ (5, 18) ノ Λ ノ代リニ $\frac{\Lambda}{\Gamma_2}$ ヲトレバヨク, 故ニ ~~(5, 18) ノ分母~~ (5, 22) ノ分母ニ $\Gamma_2^2 \approx \Gamma_1^2$ ノ order ノモノガ付ケ加ハラナケレバナラヌカ? ソレデモ アタ Γ_2^2 ガ残ルカラ (5, 22) ハ小サクナリ得ルワケデアル

次ニ $\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_2 = 0$ ノ場合ヲ併セテ調ベテ見ル

一般ニ

$$\Pi_2 = \lambda_1 \Gamma_1 \tanh k_2 a - \lambda_2 \Gamma_2 \tan k_1 a$$
$$= \lambda_1 \Gamma_1 (\Gamma_2 G_0^{-\frac{1}{4}} - k_2 G_0^{-\frac{1}{2}}) - \lambda_2 \Gamma_2 (\Gamma_1 G_0^{-\frac{1}{4}} - k_1 G_0^{-\frac{1}{2}})$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_2) \Gamma_1 \Gamma_2 G_0^{-\frac{1}{4}} - G_0^{-\frac{1}{2}} (\lambda_1 \Gamma_1 k_2 - \lambda_2 \Gamma_2 k_1)$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_2) \Gamma_1 \Gamma_2 G_0^{-\frac{1}{4}} - \frac{G_0^{-\frac{1}{2}}}{a} \Pi_2$$

故ニ

$$\frac{\Pi_2}{\Pi_1} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\Gamma_1 k_2 a)(\Gamma_2 k_1 a)}{\lambda_1 \Gamma_1 k_2 a - \lambda_2 \Gamma_2 k_1 a} \cdot \frac{G_0^{-\frac{1}{4}}}{k_1 k_2 a^2} - \frac{G_0^{-\frac{1}{2}}}{a}$$

若シ $\Gamma_1 \Gamma_2$ ガ zero デナクテ $\lambda_1\Gamma_1 k_2 - \lambda_2\Gamma_2 k_1 = 0$ ナラバ $\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \to \infty$ トナッテ scattering ハ resonance ヲ起スガ. $\Gamma_1 k_2 a$, $\Gamma_2 k_1 a$ ガ共ニ zero ニ近イトキハ $(\lambda_1\Gamma_1 k_2 a - \lambda_2\Gamma_2 k_1 a)$ ガ 同ジ程度ノ small quantity デアルカラシテ ~~$\frac{\Gamma_1\Gamma_2 k_1 k_2 a^2}{\lambda_1\Gamma_1 k_2 a - \lambda_2\Gamma_2 k_1 a}$~~ ハ 大ナクモ 小サクモナイ.

次ニ $\frac{a_1}{\sqrt{4\pi}}$ ヲ調ベルト (5,12) カラ slow neutron デハ

$$\frac{a_1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{\Gamma_2 a}{\cos k_1 a\,(\lambda_1\Gamma_1 k_2 a - \lambda_2\Gamma_2 k_1 a)}$$

若シ $\lambda_1\Gamma_1 k_2 a - \lambda_2\Gamma_2 k_1 a$ ガ ~~$\lambda_1\Gamma_1 k_2 a$~~ $\Gamma_2 k_1 a$ ノ order デアレバ $\frac{a}{\sqrt{4\pi}}$ ハ $\frac{1}{k_1}$ ノ order デアルガ, $\lambda_1\Gamma_1 k_2 a - \lambda_2\Gamma_2 k_1 a$ ガ, ~~$\lambda_1\Gamma_1 k_2 a$~~ $\Gamma_2 k_1 a$ ヨリモ 小サナ small quantity ナラバ. $\frac{a_1}{\sqrt{4\pi}}$ ハ 相当大キクナル

反対ニ. $\Gamma_1 k_2 a$ ガ $\lambda_1\Gamma_1 k_2 a - \lambda_2\Gamma_2 k_1 a$ ヨリ order ノ低イ small quantity ナラバ $\frac{a_2}{\sqrt{4\pi}}$ ガ大キクナル

特ニ若シ. $\Gamma_1\Gamma_2 k_1 k_2 a^2$ ガ $\lambda_1\Gamma_1 k_2 a - \lambda_2\Gamma_2 k_1 a$ ト同ジ order カ又ハヨリ大キイ order ノ small quantity デ. $\Gamma_1 k_2 a$ カ又ハ $\Gamma_2 k_1 a$ ノ何レカガ $\lambda_1\Gamma_1 k_2 a - \lambda_2\Gamma_2 k_1 a$ ヨリ order ノ低イ small quantity ナラバ scattering ハ resonance ハ起サナイデ. capture ノミノ cross section ガ 非常ニ増加シ得ルワケデアル.

即チ,

$$\rho_1 = k_2 a\left(\tan k_1 a + k_1 G_0^{-\frac{1}{2}}\right) \approx 0$$
$$\rho_2 = k_1 a\left(\tanh k_2 a + k_2 G_0^{-\frac{1}{2}}\right) \approx 0.$$
$$\frac{\lambda_1\rho_1 - \lambda_2\rho_2}{\rho_1\rho_2} \approx 1 \text{ ノ order (又ハソレ以上)}$$
(5,27)

ソノ condition ヲ偶然満足スル様ナコトガアレバ (d ノヤウナ現象ガ起リウルワケデアル.

(5, 27) ノ condition ハ k_2 ガ imaginary デナケレバ起ラナイ.

$$k_2^2 = \sqrt{1+\varepsilon^2}\,J_0 - \frac{J_{10}+J_{20}}{2} + \frac{D_0}{2} < 0$$

即チ ~~[illegible]~~ exchange force ト大サト同ジ order ノ, ordinary attractive force (J_{10}, J_{20} ガ共ニ pos デナクテモ $\frac{J_{10}+J_{20}}{2}$ ガ pos ナラバヨイ) ガ働カネバナラヌ.

$$\frac{\Phi_{scatt}}{\Phi_{ela}} \approx 10^{-11} \cos^2 k_1 a = 1 \sim 2 \times (\cdots)$$

§6.

$l=1$ ノ bound state ノ wave function ヲ求メル。 energy ヲ $-E'$ トスル

<u>$r>a$</u> デハ

$$\frac{d^2f}{dr^2}-\left(\kappa^2+\frac{2}{r^2}\right)f=0 \qquad (6,1)$$

$$\frac{d^2g}{dr^2}-\left(\kappa'^2+\frac{R_0}{r}+\frac{2}{r^2}\right)g=0 \qquad (6,2)$$

$$\kappa^2=E_0'=\frac{2\mu}{\hbar^2}E', \quad \kappa'^2=E_0'+D_0$$

コレノ infinity デ vanish スル solution ヲ求メルト

$$\begin{cases} f_{1E'}=C_1(-F_1(r))^{-\frac{1}{4}}e^{-\int_a^r\sqrt{-F_1}\,dr} & (6,3)\\ g_{1E'}=D_1(-G_1(r))^{-\frac{1}{4}}e^{-\int_a^r\sqrt{-G_1}\,dr} & (6,4)\end{cases}$$

$$F_1(r)=-\kappa^2-\frac{2}{r^2}, \quad G_1(r)=-\kappa'^2-\frac{2}{r^2}$$

<u>$r<a$</u> デハ

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\left(-\kappa^2+J_{10}-\frac{2}{r^2}\right)f+J_0g=0 \qquad (6,5)$$

$$\frac{d^2g}{dr^2}+\left(-\kappa'^2+J_{20}-\frac{2}{r^2}\right)g+J_0f=0 \qquad (6,6)$$

§2 ニ於ケル λ_1, λ_2 ヲ用ヒレバ

$$\frac{d^2h_1}{dr^2}+\left(\kappa_1^2-\frac{2}{r^2}\right)h_1=0 \qquad (6,7)$$

$$\frac{d^2h_2}{dr^2}-\left(\kappa_2^2+\frac{2}{r^2}\right)h_2=0 \qquad (6,8)$$

$$\kappa_1^2=-E_0'+J_{10}+\lambda_1J_0=\sqrt{1+\varepsilon^2}\,J_0+\frac{J_{10}+J_{20}}{2}-\left(\frac{D_0}{2}+E_0'\right)$$

$$\kappa_2^2=-(E_0'+J_{10}+\lambda_2J_0)=\sqrt{1+\varepsilon^2}\,J_0-\frac{J_{10}+J_{20}}{2}+\left(\frac{D_0}{2}+E_0'\right)$$

$$\varepsilon=\frac{D_0+J_{10}-J_{20}}{2J_0}$$

33

(6,7) ノ解ハ

$$\sqrt{k_1 r}\, J_{\frac{3}{2}}(k_1 r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin k_1 r}{k_1 r} - \cos k_1 r\right)$$

デアルカラ, 結局

$$h_1 = b_1\left(\frac{\sin k_1 r}{k_1 r} - \cos k_1 r\right)$$
$$h_2 = b_2\left(\frac{\sinh k_2 r}{k_2 r} - \cosh k_2 r\right)$$

ト書ケル. 故ニ

$$\left\{\begin{array}{l} f_{1E'} = -\lambda_2 b_1\left(\dfrac{\sin k_1 r}{k_1 r} - \cos k_1 r\right) + \lambda_1 b_2\left(\dfrac{\sinh k_2 r}{k_2 r} - \cosh k_2 r\right) \quad (6,9) \\ g_{1E'} = b_1\left(\dfrac{\sin k_1 r}{k_1 r} - \cos k_1 r\right) - b_2\left(\dfrac{\sinh k_2 r}{k_2 r} - \cosh k_2 r\right) \quad (6,10) \end{array}\right.$$

$$(r < a)$$

(6,3), (6,4) ノ derivation ニオイテ. 適当ニ省略スレバ

$$f'_{1E'} = -c_1(-F_1(r))^{-\frac{1}{4}} e^{-\int_a^r \sqrt{\ }\, dr}$$
$$g'_{1E} = -d_1(-G_1(r))^{\frac{1}{4}} e^{-\int_a^r \sqrt{\ }\, dr}$$

(6,3), (6,9) ヲツナグト

$$-\lambda_2 b_1\left(\frac{\sin k_1 a}{k_1 a} - \cos k_1 a\right) + \lambda_1 b_2\left(\frac{\sinh k_2 a}{k_2 a} - \cosh k_2 a\right) = c_1 F_{10}^{-\frac{1}{4}} \quad \cdots (6,11)$$

$$-\lambda_2 b_1\left(-\frac{\sin k_1 a}{k_1 a^2} + \frac{\cos k_1 a}{a} + k_1 \sin k_1 a\right) + \lambda_1 b_2\left(-\frac{\sinh k_2 a}{k_2 a} + \frac{\cosh k_2 a}{a} - k_2 \sinh k_2 a\right)$$
$$= -c_1 F_{10}^{\frac{1}{4}} \quad \cdots (6,12)$$

コヽニ $F_{10} = -F_1(a)$, $G_{10} = -G_1(a)$

(6,12)×a + (6,11) ヲ作レバ

$$-\lambda_2 b_1 k_1 a \sin k_1 a - \lambda_1 b_2 k_2 a \sinh k_2 a = -c_1\left(a F_{10}^{\frac{1}{4}} - F_{10}^{-\frac{1}{4}}\right) \quad \cdots (6,13)$$

(6,11) ト (6,13) トカラ，b_1 b_2 ヲ求メルト

$$\begin{cases} A' = \kappa_1 a \sin \kappa_1 a \left(\dfrac{\sinh \kappa_2 a}{\kappa_2 a} - \cosh \kappa_2 a \right) + \kappa_2 a \sinh \kappa_2 a \left(\dfrac{\sin \kappa_1 a}{\kappa_1 a} - \cos \kappa_1 a \right) \\ \quad = \kappa_1 a \sin \kappa_1 a \cdot \sigma_2 + \kappa_2 a \sinh \kappa_2 a \cdot \sigma_1 \\ \sigma_1 = \dfrac{\sin \kappa_1 a}{\kappa_1 a} - \cos \kappa_1 a \\ \sigma_2 = \dfrac{\sinh \kappa_2 a}{\kappa_2 a} - \cosh \kappa_2 a \end{cases}$$

トオケバ

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{c_1}{\lambda_2 A'} \left(\sigma_2 \left(a F_{10}^{\frac{1}{4}} - F_{10}^{-\frac{1}{4}} \right) - \kappa_2 a \sinh \kappa_2 a \cdot F_{10}^{-\frac{1}{4}} \right) \\ b_2 = \dfrac{c_1}{\lambda_1 A'} \left(\sigma_1 \left(a F_{10}^{\frac{1}{4}} - F_{10}^{-\frac{1}{4}} \right) + \kappa_1 a \sin \kappa_1 a \; F_{10}^{-\frac{1}{4}} \right) \end{cases} \qquad (6,14)$$

1ニオイテ　(6,4), (6,10) カラ

$$\begin{cases} b_1 = -\dfrac{a_1}{A'} \left(\sigma_2 \left(a G_{10}^{\frac{1}{4}} - G_{10}^{-\frac{1}{4}} \right) - \kappa_2 a \sinh \kappa_2 a \; G_{10}^{-\frac{1}{4}} \right) \\ b_2 = -\dfrac{a_1}{A'} \left(\sigma_1 \left(a G_{10}^{\frac{1}{4}} - G_{10}^{-\frac{1}{4}} \right) + \kappa_1 a \sin \kappa_1 a \; G_{10}^{-\frac{1}{4}} \right) \end{cases} \qquad (6,15)$$

(6,14) (6,15) カラ

$$\frac{c_1}{a_1} = -\lambda_2 \frac{\sigma_2 \left(a G_{10}^{\frac{1}{4}} - G_{10}^{-\frac{1}{4}} \right) - \kappa_2 a \sinh \kappa_2 a \; G_{10}^{-\frac{1}{4}}}{\sigma_2 \left(a F_{10}^{\frac{1}{4}} - F_{10}^{-\frac{1}{4}} \right) - \kappa_2 a \sinh \kappa_2 a \; F_{10}^{-\frac{1}{4}}}$$

$$= -\lambda_1 \frac{\sigma_1 \left(a G_{10}^{\frac{1}{4}} - G_{10}^{-\frac{1}{4}} \right) + \kappa_1 a \sin \kappa_1 a \; G_{10}^{-\frac{1}{4}}}{\sigma_1 \left(a F_{10}^{\frac{1}{4}} - F_{10}^{-\frac{1}{4}} \right) + \kappa_1 a \sin \kappa_1 a \; F_{10}^{-\frac{1}{4}}} \quad \cdots (6,16)$$

コノ式カラ bound state ノ energy ノ eigenvalue $(-E')$ ガキマッテクル

但シ

$$Z(\kappa, x) = \left(\frac{\sin \kappa a}{\kappa a} - \cos \kappa a \right) (ax - 1) + \kappa a \sin \kappa a$$

トオケバ　(6,16) カラ

$$\frac{G_{10}^{\frac{1}{4}} C_1}{F_{10}^{\frac{1}{4}} Q_1} = -\lambda_2 \frac{Z(i\kappa_2, \sqrt{G_{10}})}{Z(i\kappa_2, \sqrt{F_{10}})} = -\lambda_1 \frac{Z(\kappa_1, \sqrt{G_{10}})}{Z(\kappa_1, \sqrt{F_{10}})} \quad \cdots \quad (6,16')$$

然ルニ, κ_2 ガ real ナラバ

$$\sigma_2 = \frac{\sinh \kappa_2 a}{\kappa_2 a} - \cosh \kappa_2 a = \sum \left(\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{(2n)!} \right) (\kappa_2 a)^{2n} < 0$$

$$a\sqrt{\frac{G_{10}}{F_{10}}} - 1 \approx a\frac{K'}{K} - 1 > 0$$

デアルカラ

$$Z(i\kappa_2, \sqrt{G_{10}}) < 0, \quad Z(i\kappa_2, \sqrt{F_{10}}) < 0.$$

故ニ $(6,16')$ カラ ($\lambda_2 < 0$ デアルカラ)

$$\frac{G_{10}^{\frac{1}{4}} C_1}{F_{10} Q_1} = -\lambda_1 \frac{Z(\kappa_1, \sqrt{G_{10}})}{Z(\kappa_1, \sqrt{F_{10}})} > 0$$

デナケレバナラナイ. モシ κ_1 ガ imaginary デアッタトスレバ, $\frac{Z(\kappa_1, \sqrt{G_{10}})}{Z(\kappa_1, \sqrt{F_{10}})} > 0$ ニナルカラ, 上ノ ~~notation~~ 不等式ト矛盾スル.

故ニ κ_2 ガ real ナラバ κ_1 モ real デナケレバナラナイ.

κ_1, κ_2 ノ definition カラ 之ガ共ニ imaginary ニナルコトノナイノハ明カデアルカラ, κ_1, κ_2 ノトリウル値トシテハ, 次ノ二ツノ場合ノミガ残ル.

(i) κ_1, κ_2 ガ共ニ real,

コノトキハ, $(6,16')$ カラ明カナ様ニ, C_1, Q_1 ハ, ドチラカ一方ガ zero ニナッタリ, 大キナ値ヲ示シタリスルコトハナイ.

(ii) κ_1 ガ real デ, κ_2 ガ imaginary

コノトキハ, C_1, Q_1 ノ中何レカ一方ガ zero ニナルコトモアリウル.

シカシ, ココデハ簡単ノタメニ, 主トシテ κ_2 ガ real ノ場合ヲ考ヘルコトニスル.

κ_1 κ_2 ナドニ含マレル J ハ, bound state ニオケルモノデ, 之ガ scattering ノトキノ J ト同ジデアルカドウカハ疑問デアルガ, ココデハ同ジト見ルコトニスル.

次ニ Normalization ヲヤル. normalization condition ハ

$$\int_0^\infty \left[|f_{1E'}|^2 + |g_{1E'}|^2 \right] dr = 1. \qquad (6,18)$$

κ_2 ヲ real トスレバ

$$\frac{a_1}{c_1} = -\frac{1}{\lambda_2} \frac{\sigma_2\left(aF_{10}^{\frac{1}{4}} - F_{10}^{-\frac{1}{4}}\right) - \kappa_2 a \sinh \kappa_2 a \, F_{10}^{-\frac{1}{4}}}{\sigma_2\left(aG_{10}^{\frac{1}{4}} - G_{10}^{-\frac{1}{4}}\right) - \kappa_2 a \sinh \kappa_2 a \, G_{10}^{-\frac{1}{4}}} \equiv p \approx 1,$$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{\sigma_1\left(aG_{10}^{\frac{1}{4}} - G_{10}^{-\frac{1}{4}}\right) + \kappa_1 a \sin \kappa_1 a \, G_{10}^{-\frac{1}{4}}}{\sigma_2\left(aG_{10}^{\frac{1}{4}} - G_{10}^{-\frac{1}{4}}\right) - \kappa_2 a \sinh \kappa_2 a \, G_{10}^{-\frac{1}{4}}} \equiv p_1 \lessapprox 1$$

b_2, a_1 ノ代リニ p_1, p ヲ用ヒルコトニスル

$$\int_0^\infty |f_{1E'}|^2 dr = \int_0^a + \int_a^\infty$$

$$\int_0^a \equiv \int_0^a \left[-\lambda_2 b_1 \left(\frac{\sin \kappa_1 r}{\kappa_1 r} - \cos \kappa_1 r \right) + \lambda_1 b_2 \left(\frac{\sinh \kappa_2 r}{\kappa_2 r} - \cosh \kappa_2 r \right) \right]^2 dr = b_1^2 a C_f, \quad C_f \approx 1$$

$$C_f = \frac{1}{a} \int_0^a \left[-\lambda_2 \left(\frac{\sin \kappa_1 r}{\kappa_1 r} - \cos \kappa_1 r \right) + \lambda_1 p_1 \left(\frac{\sinh \kappa_2 r}{\kappa_2 r} - \cosh \kappa_2 r \right) \right]^2 dr$$

$$\int_a^\infty \equiv \int_a^\infty c_1^2 \left(-F_1(r) \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-2\int_a^r \sqrt{-F_1}\, dr} dr \approx c_1^2 \int_a^\infty \frac{1}{\kappa} e^{-2\kappa(r-a)} dr = \frac{c_1^2}{2\kappa}$$

同様ニシテ

$$\int_0^\infty |g_{1E'}|^2 dr = \int_0^a + \int_a^\infty$$

$$\int_0^a = b_1^2 a C_g, \quad C_g = \frac{1}{a} \int_0^a \left(\left(\frac{\sin \kappa_1 r}{\kappa_1 r} - \cos \kappa_1 r \right) - p_1 \left(\frac{\sinh \kappa_2 r}{\kappa_2 r} - \cosh \kappa_2 r \right) \right)^2 dr$$

$$\int_a^\infty = \frac{c_1^2}{2\kappa'^2} p^2$$

故ニ　(6,18) ハ

$$b_1^2 a(c_f + c_g) + c_1^2\left(\frac{1}{2\kappa^2} + \frac{p^2}{2\kappa'^2}\right) = 1. \qquad (6,19)$$

$$c_f \approx 1, \quad c_g \approx 1.$$

然ルニ、c_1 ト b_1 トノ比ハ

$$\frac{c_1}{b_1} = \frac{\mu_2 A'}{\sigma_2\left(a\Gamma_{10}^{\frac{1}{4}} - \Gamma_{10}^{-\frac{1}{4}}\right) - k_2 a \sinh k_2 a\, \Gamma_{10}^{-\frac{1}{4}}}$$

デアッテ　k_2 ガ real ナラバ　コノ右辺ノ分母ハ　常ニ negative デ、10^{-6} ノ order デアル。故ニ

$$\frac{c_1 a}{b_1\sqrt{a}} \cancel{A} = p_2 A' \approx A' \quad , \quad p_2 = \frac{\mu_2\sqrt{a}}{Z(ik_2, \sqrt{\Gamma_{10}})\cdot\Gamma_{10}^{-\frac{1}{4}}}$$

A' ハ高々 1 ノ order デアルガ zero ニナルコトモアル。結局 (6,19) ハ

$$b_1^2 a\left\{(c_f + c_d) + \frac{p_2^2 A'^2}{2}\left(\frac{1}{(\kappa a)^2} + \frac{p^2}{(\kappa' a)^2}\right)\right\} = 1.$$

故ニ

$$|b_1| \approx \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$|c_1| \approx \frac{1}{a} A'$$

§7

§5 ニオケル (5,11) ヲ計算スル

$$I_f = \int_0^\infty f_0 \bar{f}_{n1}\, r\, dr = \int_0^a + \int_a^\infty = I_{f1} + I_{f2}$$

$$I_{f1} = \int_0^a \left(-\lambda_2 a_1 \sin k_1 r + \lambda_1 a_2 \sinh k_2 r\right)\left\{-\lambda_2 b_1\left(\frac{\sin k_1 r}{k_1 r} - \cos k_1 r\right) + \lambda_1 b_2\left(\frac{\sinh k_2 r}{k_2 r} - \cosh k_2 r\right)\right\} r\, dr$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{G_0^{\frac{1}{4}} \sin k_1 a + k_1 G_0^{-\frac{1}{4}} \cos k_1 a}{G_0^{\frac{1}{4}} \sinh k_2 a + k_2 G_0^{-\frac{1}{4}} \cosh k_2 a} \lessapprox 1 \quad (\text{但}, k_2 \text{ハ real ト仮定スル}) \\ \dfrac{b_2}{b_1} = p_1 \lessapprox 1 \qquad (k_2 \text{ real}) \end{array}\right.$$

デアルカラ.

$$I_{f1} = a_1 b_1 a^2 d_f, \quad |d_f| \lessapprox 1$$

$$d_f = \frac{1}{a^2}\int_0^a \left(-\lambda_2 \sin k_1 r + \lambda_1 \frac{a_2}{a_1} \sinh k_2 r\right)\left\{-\lambda_2\left(\frac{\sin k_1 r}{k_1 r} - \cos k_1 r\right) + \lambda_1 \frac{b_2}{b_1}\left(\frac{\sinh k_2 r}{k_2 r} - \cosh k_2 r\right)\right\} r\, dr$$

次ニ I_{f2} ハ

$$I_{f2} = \int_a^\infty \left(\frac{\sqrt{4\pi}}{k} \sin kr + C_0 e^{ikr}\right) C_1 \left(-F_1(r)\right)^{-\frac{1}{4}} e^{-\int_a^r \sqrt{-F_1}\, dr}\, r\, dr$$

slow neutron ノ場合デアルカラ $ka \ll 1$ ト見テヨイ.

$$= \frac{C_1}{\sqrt{K}} \int_a^\infty \left(\sqrt{4\pi}\, r + C_0\right) e^{-K(r-a)}\, r\, dr$$

$$= \frac{C_1}{\sqrt{K}}\left\{\frac{\sqrt{4\pi}(Ka+1)^2}{K^3} + \frac{C_0(Ka+1)}{K^2}\right\}.$$

I_g ハ

$$I_g = \int_0^\infty g_0 \bar{g}_{n1} r\,dr = \int_0^a + \int_a^\infty = I_{g1} + I_{g2}$$

$$I_{g1} = a_1 b_1 a^2 d_g$$

$$d_g = \frac{1}{a^2}\int_0^a \left(\sin k_1 r - \frac{a_2}{a_1}\sinh k_2 r\right)\left(\frac{\sin k_1 r}{k_1 r} - \cos k_1 r - \frac{b_2}{b_1}\left(\frac{\sinh k_2 r}{k_2 r} - \cosh k_2 r\right)\right) r\,dr$$

$$I_{g2} = \int_a^\infty Q_0 \sqrt{k''}\,(-G(r))^{-\frac{1}{4}} e^{-\int_a^r \sqrt{-G}\,dr} \cdot Q_1 (-G_1(r))^{-\frac{1}{4}} e^{-\int_a^r \sqrt{-G_1}\,dr}\, r\,dr$$

$$\approx \frac{Q_0 Q_1}{\sqrt{k'}} \int_a^\infty e^{-(k'+k'')(r-a)}\, r\,dr$$

$$\approx \frac{Q_0 Q_1}{\sqrt{k'}} \frac{(k''+k')a+1}{(k''+k')^2}$$

故ニ大体ノorderハ

$$|I_{f1}| \approx |I_{g1}| \lesssim a_1 a^{\frac{3}{2}} \qquad \left(\because b_1 \approx \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$|I_{f2}| \lesssim \frac{A'}{\sqrt{k a}}\left\{\sqrt{4\pi}\frac{(ka+1)^2}{k^3} + C_0 \frac{ka+1}{k^2}\right\} \approx A'\left\{a^{\frac{5}{2}} + C_0 k^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$\left(\because \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{ka}}\frac{(ka+1)^2}{(ka)^3} \approx 1,\quad \frac{ka+1}{ka} \approx 1\right)$$

$$|I_{g2}| \lesssim A' Q_0 k'^{-\frac{3}{2}} \qquad \left(\because Q_1 \lesssim \frac{A'}{a},\quad \frac{1+(k''+k')a}{(k''+k')^2} \approx \frac{a}{k'}\right)$$

a_1, C_0, Q_0 ノ値ハ §4 カラ

$$C_0 = -\sqrt{4\pi}\, a\left(1 - \frac{\Pi_2}{\Pi_1}\right), \qquad Q_0 = -\frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{k''}}\frac{\Delta_1}{\Pi_1}$$

$$a_1 = -\frac{\sqrt{k''}\, P_2 Q_0}{A} = \frac{\sqrt{4\pi}\, a \Gamma_2}{\cos k_1 a \cdot \Pi_1}\Bigg)^{*}$$

$$\Pi_1 = \lambda_1 \Gamma_1 k_2 a - \lambda_2 \Gamma_2 k_1 a, \qquad \Pi_2 = \lambda_1 \Gamma_1 \tanh k_2 a - \lambda_2 \Gamma_2 \tan k_1 a$$

$$\Delta_1 = k_1 a \tanh k_2 a - k_2 a \tan k_1 a$$

$$\Gamma_1 = G_0^{\frac{1}{4}} \tan k_1 a + k_1 G_0^{-\frac{1}{4}}, \qquad \Gamma_2 = G_0^{\frac{1}{4}} \tanh k_2 a + k_2 G_0^{-\frac{1}{4}}$$

$$G_0 = 3.5 \cdot 10^{24}\, Z^{\frac{2}{3}}$$

---

* $\cos k_1 a = 0$ ノトキハ $\Pi_1 = \infty$ ニナルカラ $\cos k_1 a \cdot \Pi_1$ ハ zero ニハナラナイ.

殊ニ. $\Pi_1 = 0$ デ a, C_0, Q_0 ハ皆大キクナル. 即チ, コレガ resonance デアル.

resonance ヲ考ヘナケレバ a, C_0, Q_0 ハ凡ソ $\sqrt{4\pi}\,a$ ノ order ト見テヨイカラ. 結局

$$|e_1 I_f + e_2 I_g|^2 \lessapprox e^2 a^5 \cdot 10 \approx e^2 \cdot 10^{-60}$$

$$\left(\because\ e_1 \approx -e_2 \approx \frac{e}{2}\right)$$

殊ニ. ~~基底~~ energy level $-E'$ ヘノ transition ニヨル capture cross section ハ (5, 11) カラ

$$\frac{4}{3}\left(\frac{\nu_{放}}{c}\right)^3 \frac{1}{\hbar v}|e_1 I_f + e_2 I_g|^2 \approx \left(\frac{v}{c}\right)^3 \frac{e^2}{\hbar v}\cdot 10^{-60}$$

$$\nu_{放} = \frac{E+E'}{\hbar}$$

$\nu_{放} \approx 10^{21}$ ト考ヘレバ

$$\Phi_{cap} \approx \frac{10^{-20}}{v}$$

Gas kinetic energy ノ order デハ $v \approx 10^5$ ト見テヨイカラ.

$$\Phi_{cap} \approx 10^{-25}$$

Bethe ハ $\Phi_{cap} \approx 3.10^{-25}$ ト ~~案~~ 与ヘテイル.

次ニ resonance ノ所ヲ調ベテ見ル.
capture cross section ハ a, C_0, Q_0 ヲ凡テ含ムカラ. コノ中ノドレカガ
非常ニ大キケレバ capture cross section ハ大キクナル. 殊ニ. scattering
ノ cross section $|C_0|^2$ ノ大キイトキハ. 例外ナク capture モ大キイ筈デアロウカ?
逆ニ capture ノ大キイトキニ. scattering モ大キイトハ限ラナイ.*

* A' ノ小サイトキハ. C_0 ガ大キクテモ. scattering ノソレ程大キクナイコトモアル.

$\Pi_1 = 0$ デハ、a_1 C_0 Q_0 ハ皆大キクナルノデアルガ、之等ノ大キサノ比ヲトツテ見ルト。

$$|a_1| : |C_0| : |Q_0| = \frac{\sqrt{4\pi}\, a \Gamma_2}{\cos k_1 a \cdot \Pi_1} : \frac{\sqrt{4\pi}\, a\, \Pi_2}{\Pi_1} : \frac{\sqrt{4\pi}\, \Delta_1}{\sqrt{k''}\, \Pi_1}$$

$$= \frac{\Gamma_2}{\cos k_1 a} : \Pi_2 : \frac{\Delta_1}{\sqrt{k''}\, a}$$

故ニ、a_1 C_0 Q_0 ノ大キサニハ簡単ナ比例関係ナドハナク、相当不規則ナ大小~~変化~~ヲ示スデアラウ。

従ツテ同じ resonance デモ、capture ト scattering ノ relative intensity ハ、物質ニヨツテ異ツタ ratio ヲモツコトニナラウ。

以上デハ spin ヲ考ヘニ入レナカツタガ、之ヲ考ヘテモ cross section ノ order マデ変化スルコトハナイト考ヘラレル。