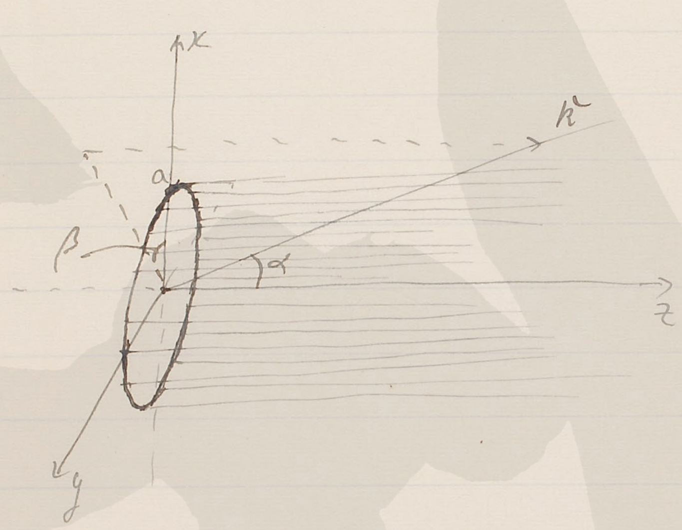
DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE 16 +2B

NO.

(i) e^{ikz} ノ場合



$\vec{k}$ 方向ノ plane wave ハ $e^{i(\vec{k}\vec{r})}$

$$\vec{k} \equiv (k\sin\alpha\cos\beta,\ k\sin\alpha\sin\beta,\ k\cos\alpha)$$
$$\vec{r} \equiv (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$$
$$\vec{k}\vec{r} = kr\left(\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta) + \cos\theta\cos\alpha\right)$$

コレニ $A(\alpha,\beta)$ ヲカケテ α, β ニツイテ積分シ. $z=0$ (即チ $\theta=\frac{\pi}{2}$) デ原点ヲ中心トスル半径 a ノ circular slit ヲ通ル様ナ bundle ニスル.

$$\psi(r,\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} A(\alpha,\beta)\, e^{ikr(\sin\theta\sin\alpha\cos\beta + \cos\theta\cos\alpha)}\, d\alpha\, d\beta \quad \cdots\cdots (1)$$

ココニ $(\varphi-\beta)$ ノ代リニ β トオイテモ差支ナイカラ β トオイタ.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

~~Symmet~~ Symmetry ノ考ヘカラ $A(\alpha,\beta)$ ハ α ノミノ function デアル

即チ $A(\alpha)$ デアル

① ヲ β ニツイテ積分スレバ

$$\int_0^{2\pi} e^{ikr\sin\theta\sin\alpha\cos\beta}\,d\beta = \int_0^{2\pi} e^{i\gamma\cos\beta}\,d\beta \qquad [\gamma = kr\sin\theta\sin\alpha]$$

$$= 2\int_0^{\pi} e^{i\gamma\cos\beta}\,d\beta$$

$$= 2\pi J_0(\gamma) = 2\pi J_0(kr\sin\theta\sin\alpha)$$

[∵ Hansen ノ積分 $J_n(z) = \frac{1}{\pi i^n}\int_0^{\pi} e^{iz\cos\varphi}\cos n\varphi\,d\varphi$.]

デアルカラ

$$\psi(r\theta) = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} A(\alpha)\,e^{ikr\cos\theta\cos\alpha} J_0(kr\sin\theta\sin\alpha)\,d\alpha$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ デハ

$$\psi(r\tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} 1 & r<a \\ 0 & r>a \end{cases}$$

デアルカラ

$$\psi(r,\tfrac{\pi}{2}) = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} A(\alpha)\,J_0(kr\sin\alpha)\,d\alpha = \begin{cases} 1 & r<a \\ 0 & r>a \end{cases} \qquad (2)$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 3

a ガ $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ($\cancel{} < 10^{-7}\frac{1}{\sqrt{E}}$, E ハ e.v unit) ニ比シテズット大キイ時ニハ $A(\alpha)$ ハ α ノゴク小サイ所ダケ appreciable デアルト考ヘテヨイ. ~~故~~

$\sin\alpha = t$ トオケバ ② ハ

$$\psi(r, \tfrac{\pi}{2}) = 2\pi\int_0^1 \frac{A(\sin^{-1}t)}{t\sqrt{1-t^2}} J_0(krt)\, t\, dt.$$

$\frac{A(\sin^{-1}t)}{t\sqrt{1-t^2}}$ ハ $t>1$ デハ殆ド zero デアルカラ 積分ノ上限ハ ∞ ニシテモヨイ.

ソレカラ Hankel ノ relation ヲ用ヒレバ

$$\frac{2\pi A(\sin^{-1}t)}{t\sqrt{1-t^2}} = \int_0^\infty \psi(r, \tfrac{\pi}{2}) J_0(krt)\, kr\, d(kr)$$

$$= \int_0^{ka} J_0(krt)\, kr\, d(kr)$$

$$= (ka)^2\int_0^1 J_0(kat\,x)\, x\, dx$$

$$= \frac{ka}{t} J_1(kat)$$

故ニ

$$\boxed{A(\alpha) = \frac{ka}{2\pi} J_1(ka\sin\alpha)\cos\alpha.}$$

③

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 4

$ka = \frac{2\pi a}{\lambda}$ ハ 明カニ 非常ニ大キナ量デアルカラ, A(α)ハ $\sin\alpha$ ノ非常ニ小サナ部分ダケシカ contribute シナイ.

~~故~~ ソノ $A(\alpha)$ ヲ ② ~~式~~ ノ integral ノ式ニ代入スルト

$$2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ka}{2\pi} J_1(ka\sin\alpha)\, J_0(kr\sin\alpha)\cos\alpha\, d\alpha$$

$$= ka\int_0^1 J_1(kax)\, J_0(krx)\, dx$$

$\int_1^\infty J_1(kax)\, J_0(krx)\, dx$ ハ ka, kr ガ充分大キケレバ, 充分小サイコトガ証明出来ルカラ. 上ノ式ハ 0→∞ ノ積分ニ直シテヨイ. ~~故~~

即チ

$$ka\int_0^\infty J_1(kax)\, J_0(krx)\, dx$$

コレガ r=0 デ 1 ニナリ. r=∞ デ zero ニナルコトハ容易ニ示スコトガ出来ル. ~~又. r=a デ 積分ガ $\frac{1}{2}$ ニナリ. derivative~~

Scattering ノ場合ノ wave function ガ asymptotic ニ

$$e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x})} + \frac{e^{ikr}}{r} f((\widehat{\mathbf{k}\mathbf{x}}))$$

1 書ケル 場合ニハ

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 5

$z=-d$ ノ所ニ 半径 a ノ slit ガアツタトスレバ

$$\bar{f}(\theta)=\frac{ka}{2\pi}\iint f(\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)+\cos\theta\cos\alpha)\, e^{ikd\cos\alpha}\, J_1(ka\sin\alpha)\cos\alpha\, d\alpha\, d\beta$$

トオケバ

$$I=\left|\bar{f}(\theta)\right|^2$$

ガ scattering ノ intensity ヲ与ヘル

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

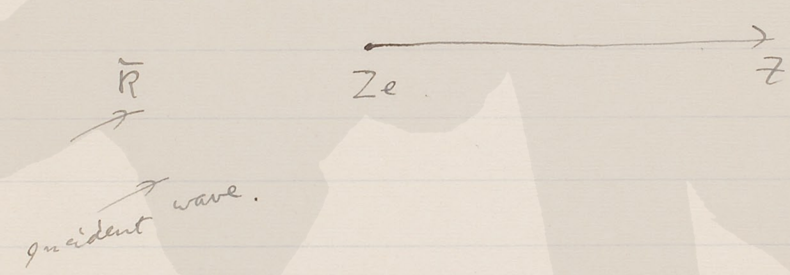
DATE

NO. 6

(ii) Coulomb Field ニオケル場合

~~任意ノ方向 $\bar{k}$~~

Incident wave ノ方向ガ $\bar{k}$ ノトキノ wave function ハ、
Nucleus ヲ原点ニスル座標 $\mathfrak{x}$ ガ $\bar{k}$ ニ parallel ナ
トキヲノゾケバ 充分大キナ $r=|\mathfrak{x}|$ ニトレバ



第一次近似トシテ

$$\psi \sim \left(1-\frac{\bar{\alpha}^2}{i(kr-\bar{k}\cdot\mathfrak{x})}\right)e^{i(\bar{k}\mathfrak{x})+i\bar{\alpha}\log(kr-\bar{k}\cdot\mathfrak{x})}$$

$$+\frac{\bar{\alpha}}{kr-\bar{k}\cdot\mathfrak{x}}e^{ikr-i\bar{\alpha}\log(kr-\bar{k}\cdot\mathfrak{x})+i\pi+2i\eta_0}$$

$$\bar{\alpha}=\frac{2\pi ZZ'e^2}{hv}=\frac{mZZ'e^2}{\hbar^2 k}$$

$$e^{2i\eta_0}=\Gamma(1+i\bar{\alpha})/\Gamma(1-i\bar{\alpha})$$
(1)

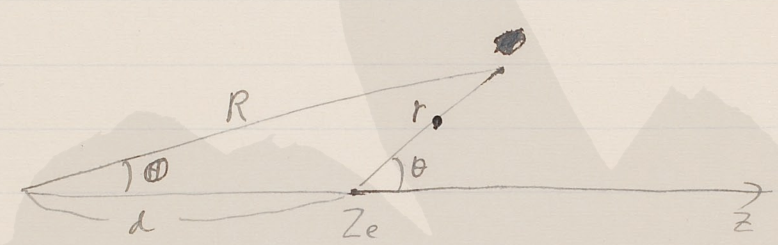
m, $Z'e$ ハ夫々 incident particle ノ reduced mass 及ビ charge ヲ表ハス.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 7

rガ充分大キクナレバ

$$\psi \sim e^{i(k\cdot x) + i\alpha \log(kr - k\cdot x)} \qquad ②$$



図ノ様ニ $z=-d$ ノ所ヲ ~~[illegible]~~ origin ニスル座標ニカヘル.

$$r\sin\theta = R\sin\Theta$$
$$r\cos\theta = R\cos\Theta - d$$

デアルカラ

$$k\cdot x = kR(\sin\Theta \sin\alpha \cos(\varphi-\beta) + \cos\Theta\cos\alpha) - kd\cos\alpha$$
$$kr = k\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\Theta}$$

$z=-d$ ノ所ニ slit (半径 a) ガアッタトスレバ

② ニ $A(\alpha)$ ヲカケテ α, β ニツイテ積分シ $\Theta = \frac{\pi}{2}$ デ

$$R>a \quad \psi = 0$$
$$R<a \quad \psi = 1$$

ナル様ニ $A(\alpha)$ ヲキメル.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 8

$$\psi\left(R,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}A(\alpha)\,e^{i\left[kR\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)-ka\cos\alpha\right]+i\bar{\alpha}\log\left(k\sqrt{R^2+d^2}-kR\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)+kd\cos\alpha\right)}\,d\alpha\,d\beta \qquad \text{------ (3)}$$

$$\psi\left(R,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}1 & R<a\\ 0 & R>a\end{cases} \qquad \text{--- (4)}$$

$\bar{\alpha}\log\left[k\sqrt{R^2+d^2}-kR\sin\alpha\cos\beta+kd\cos\alpha\right]$ ノ term ヲ考ヘルト
~~β ノ変化ニヨル 括弧内ノ変化ハ 高々 $kR\alpha$ ノ order デアル~~.
括弧内ガ kR ダケ変化シタトキ生ズル変化ハ $R \ll d$ ナラバ
大体

$$\frac{\bar{\alpha}kR}{2kd}=\frac{\bar{\alpha}R}{2d}$$

トナル。

$$\bar{\alpha}=\frac{mZZ'e^2}{\hbar^2k}=\frac{\sqrt{m}\,ZZ'e^2}{\hbar\sqrt{2E}}$$

ハ イクラ大キクテモ 50 以上ニハナルマイカラ (Particle ノ energy ガ増セバ $\bar{\alpha}$ ハヘル)

$$R \ll \frac{d}{10}$$

ナラバ $e^{i\bar{\alpha}\log[\cdot\ \cdot\ ]}$ ノ term ハ

$$e^{i\bar{\alpha}\log kd(1+\cos\alpha)}$$

ト書イテヨイ.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 5

故ニ β ニツイテ積分ハ容易ニ遂行出来ル

$$\psi\left(R, \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} A(\alpha)\, J_0(kR\sin\alpha)\, e^{-ika\cos\alpha + i\alpha\log ka(1+\cos\alpha)}\, d\alpha \qquad \cdots\cdots (5)$$

$kR = \lambda$, ~~トオケバ~~ $\sin\alpha = x$, トオケバ

$$\psi\left(R, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \lambda < ka \\ 0 & \lambda > ka \end{cases}$$

$$= 2\pi \int_0^1 \underbrace{\frac{A(\sin^{-1}x)}{x\sqrt{1-x^2}}\, e^{-ika\sqrt{1-x^2} + i\alpha\log ka(1+\sqrt{1-x^2})}}_{=\frac{\bar{A}(x)}{2\pi}} J_0(\lambda x)\, x\, dx$$

$$= \int_0^1 \bar{A}(x)\, J_0(\lambda x)\, x\, dx \qquad (6)$$

$\bar{A}(x)$ ハ x ノ小サイ所ダケガ contribute スルト考ヘレバ、
積分ノ上限ハ ∞ ニシテヨイ.
上ノ関係ハ

$$R \ll \frac{a}{10} \quad \text{即チ} \quad \lambda = kR \ll \frac{ka}{10}$$

ノ範囲デノミ成立スルガ, $\frac{a}{10}$ ヲ 1 ノ order トスレバ, $\lambda \ll 10^7\sqrt{E}$ (E ハ volt unit) ナラバヨイノデアルカラ λ ハ非常ニ大キクトツテモ差支ヘナイノデアル.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

故ニ Hankel ノ逆関係ガ近似的ニ応用出来ル

$$\bar{A}(x) = \frac{2\pi A(\sin^{-1}x)}{x\sqrt{1-x^2}} e^{-ikd\sqrt{1-x^2} + i\alpha \log kd(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$= \int_0^\infty \psi(R, \tfrac{\pi}{2}) J_0(\lambda x)\lambda\, d\lambda$$

$$= \int_0^{ka} J_0(\lambda x)\lambda\, d\lambda$$

$$= \frac{ka}{x} J_1(kax)$$

故ニ

$$\boxed{A(\alpha) = \frac{ka}{2\pi}\cos\alpha\, J_1(ka\sin\alpha)\cdot e^{ikd\cos\alpha - i\alpha\log kd(1+\cos\alpha)}} \quad (7)$$

故ニ.

~~Co~~ Coulomb field 中ノ wave ノ scattered part ハ

$$\frac{\bar{\alpha}}{kr - kz} e^{ikr - i\alpha\log(kr - kz) + i\pi + 2i\eta_0} \quad (8)$$

= $A(\alpha)$ ヲカケテ α, β ニツイテ積分シタモノニナル.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

故ニ

$$f(\theta) = \iint A(\alpha)\cdot\frac{\bar{\alpha}}{k}\,\frac{e^{-i\bar{\alpha}\log(1-\sin\theta\sin\alpha\cos\beta-\cos\theta\cos\alpha)}}{1-\sin\theta\sin\alpha\cos\beta-\cos\theta\cos\alpha}\,d\alpha\,d\beta$$

トスレバ

$$I(\theta) = |f(\theta)|^2$$

ガ Scattered intensity ヲ表ハス

但シ $f(\theta)$ ノ積分ハ β ニツイテハ $0 \to 2\pi$, α ニツイテハ θ ガ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ノ時ハ $\theta-\delta$, $\theta+\delta$ (δハ小) ノ間ダケノゾイテ 0 カラ $\frac{\pi}{2}$ マデ積分スル.
$\delta \to 0$ ノ limiting case デ積分ガ exist スルカドウカハ不明デアル.

$A(\alpha)$ = ① ヲ代入スレバ

$$|f(\theta)| = \frac{\bar{\alpha}a}{2\pi}\int d\alpha\, e^{ik d\cos\alpha - i\bar{\alpha}\log(1+\cos\alpha)} J_1(ka\sin\alpha)\cos\alpha$$

$$\times \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\bar{\alpha}\log(1-\sin\theta\sin\alpha\cos\beta-\cos\theta\cos\alpha)}}{1-\sin\theta\sin\alpha\cos\beta-\cos\theta\cos\alpha}\,d\beta$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 1

V

Coulomb field ニヨル Scattering ノ wave function ハ, incidence ノ方向ヲ $\mathbf{k}$ トスレバ

$$\psi \approx \left(1 - \frac{\gamma^2}{i(kr - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + i\gamma \log(kr - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}$$

$$+ \frac{\gamma}{kr - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{ikr - i\gamma\log(kr - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + i\pi + 2i\eta_0} \qquad (1)$$

コヽニ

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{2\pi ZZ'e^2}{hv} = \dfrac{mZZ'e^2}{\hbar^2 k} \\ e^{2i\eta_0} = \dfrac{\Gamma(1+i\alpha)}{\Gamma(1-i\alpha)} \end{cases}$$

上ノ式ハ $\mathbf{k}$ ト $\mathbf{x}$ トガ平行デナイ限リ r ヲ充分大キクトレバ必ズ成立スル。

第一項＝

$$A(\alpha) = \frac{ka}{2\pi} \frac{e^{ikd\cos\alpha - i\gamma\log kd(1+\cos\alpha)}}{1 - \dfrac{\gamma^2}{ikd(1+\cos\alpha)}} J_1(ka\sin\alpha)\cos\alpha$$

―― ― ― (2)*

* A(α)ノ分母ニアル $\dfrac{\gamma^2}{ikd(1+\cos\alpha)}$ ノ項ハ非常ニ小サイカラ neglect シテモ差支ヘナイ

ヲカケテ, α, β ニツイテ積分スレバ, $z = r\cos\theta = -d$ ニオイテ,

$r\sin\theta > a$ ナラバ 0

$r\sin\theta < a$ ナラバ 1

デアル様ナ wave function ヲ得ル.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 2

之ヲ験算ノ形式デ証明シテ見ル！

マヅ ① ノ第一項ニ ② ヲカケテ積分スル。

$$4 \approx \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{\gamma^2}{ikr(1-\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)-\cos\theta\cos\alpha)}\right)e^{ikr(\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)+\cos\theta\cos\alpha)}$$

$$\times e^{i\gamma\log kr(1-\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)-\cos\theta\cos\alpha)}\quad A(\alpha)\ d\alpha\, d\beta \qquad \text{-----} \ (3)$$

$A(\alpha)$ ニハ $J_1(ka\sin\alpha)$ ナル factor ガアルカラ $\alpha > \frac{10^4}{ka} \approx 10^{-4}$ デハ殆ド zero ト見テヨイ。

$(1-\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)-\cos\theta\cos\alpha)$ ハ $\underbrace{\theta=\alpha,\ \varphi=\beta}_{\text{又ハ } \theta=\alpha=0,\ \varphi=\beta+\pi}$ ノトキノミ zero デ他ノ場合ハ positive デアルカラ、$\theta > \frac{\pi}{2}$ ナル場合ヲ考ヘレバ 被積分項ニハ singularity ガ表ハレナイ。

$\frac{\gamma^2}{kr(1-\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)-\cos\theta\cos\alpha)}$ ノ max ハ $\varphi=\beta,\ \alpha=\frac{\pi}{2}$ ノトキデ、ソノ ~~大体~~ 値ハ $\frac{\gamma^2}{kr(1-\sin\theta)}$ デアルカラ $r \approx d$ ノ近傍ヲ考ヘレバ $\frac{\gamma^2}{kd(1-\sin\theta)}$

デアル。故ニ、コノ term ハ

$$1-\sin\theta \gg \frac{\gamma^2}{kd} \approx 10^{-7} \quad (\because \gamma_{max.}^2 \approx 10^3)$$

デアリサヘスレバ 充分ニ小サイ。

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 3

故ニ $A(\alpha)$ ヲ δ-function ノ様ニ考ヘ~~積分スレ~~レバ (3) ハ

$$\psi \approx \left(1-\frac{\delta^2}{ikr(1-\cos\theta)}\right)e^{i\delta\log kr(1-\cos\theta)}$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} e^{ikr(\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)+\cos\theta\cos\alpha)}A(\alpha)\,d\alpha\,d\beta$$

$J_0(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{iz\cos\beta}d\beta$ ノ公式ヲ用ヒテ β ニツイテノ積分ヲ遂行スレバ

$$\psi \approx 2\pi\left(1-\frac{\delta^2}{ik(r-z)}\right)e^{i\delta\log k(r-z)}$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ikr\cos\theta\cos\alpha}J_0(kr\sin\theta\sin\alpha)\,A(\alpha)\,d\alpha.$$

(2) 式ノ $A(\alpha)$ ハ α ノ小サイ部分デハ簡単ニナリテ

$$A(\alpha)=\frac{ka}{2\pi}\frac{e^{-i\delta\log 2k\alpha}}{1-\frac{\delta^2}{i\cdot 2k\alpha}}e^{ika\cos\alpha}J_1(ka\sin\alpha)\cos\alpha.$$

デアルカラ之ヲ上ノ式ニ代入スレバ

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 4

$$\psi \approx ka \frac{1-\dfrac{\gamma^2}{i(kr-kz)}}{1-\dfrac{\gamma^2}{i\cdot 2kd}} e^{i\gamma \log \frac{r-z}{2d}}$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ik(r\cos\theta+d)\cos\alpha} J_1(ka\sin\alpha) J_0(kr\sin\theta\sin\alpha)\cos\alpha\, d\alpha \quad \text{— — — — (4)}$$

コノ式ハ $\dfrac{\gamma^2}{kr(1-\sin\theta)} \ll 1$. ~~即チ $r\sin\theta \ll r-\dfrac{\gamma^2}{k}$~~ ナラバ

成立スル式デアル

(4) ニオイテ $r\cos\theta = z = -d$ トオケバ

$$\psi(r,\theta) \approx ka\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(ka\sin\alpha) J_0(kr\sin\theta\sin\alpha)\cos\alpha\, d\alpha.$$

$$\approx ka\int_0^{\infty} J_1(kax) J_0(kr\sin\theta\, x)\, dx$$

~~コレ~~ コヽデ 前ニ証明シタ様ニ.

$$ka\int_0^{\infty} J_1(kax) J_0(kr\sin\theta\, x)\, dx = \begin{cases} r\sin\theta < a & 1 \\ r\sin\theta > a & 0 \end{cases}$$

デアルカラ ψ ハ $z=-d$ デハ 半径 a ノ slit テモツコトニナル.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 5

一般ニ ④式ノアテハマル範囲デ（slit ヲ含ム plane 外デ）ハ wave function ノ incident part ガドウナルカヲ調ベルコトハ簡単ニハ出来サウデナイ。