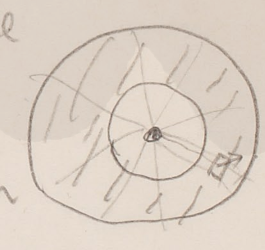
 10

Elementary Theory of Velocity Distribution of Slowed Down Neutrons

By Hideki Yukawa　　May 5, 1936

Fermi (Zeeman Festschrift S. 128, 1935) に於て、source から出る uniform velocity の neutron が、proton との elastic scattering によって slow down され、結局 capture される場合の equilibrium distribution を求めた。しかし、かゝる理想的な場合は実現不可能で、実際は finite size の hydrogenated substance の boundary を通って neutron が逃げて行く。故に次の如き條件の下に問題を解く方がむしろ実際に近い。

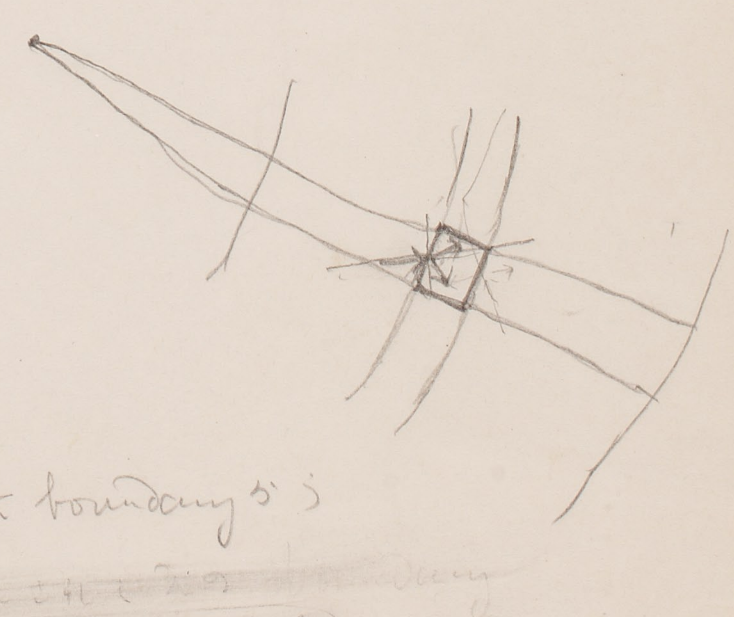
point source から四方に uniform に出た neutron が concentric spheres を boundary とする substance により slow down 及び capture され、一部が boundary から逃げ出す。その velocity 分布又は中の distribution を求めることが問題となる。



symmetry から考へて distribution function は r, v 及び velocity が radius の方向となす angle θ のみの函数、

$$f(r, v, \theta)$$

と考へられる。



さて、

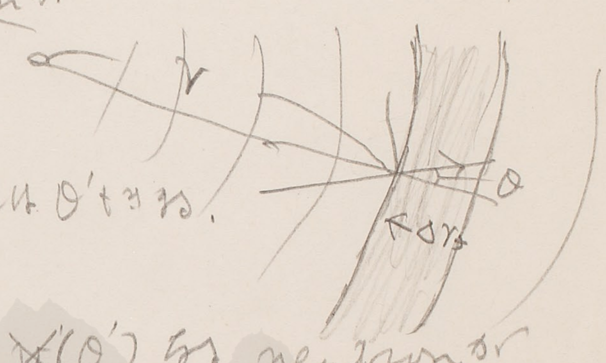
$$v_n^2 = v_n'^2 + v_p'^2 \quad 4.$$

$$v_n = v_n' + v_p' \quad 3$$

$$v_n' v_p' = 0.$$

而して ◠ なる薄い region の各 boundary から入ってくる neutron の中、

ある一部は そのまゝつきぬけ、
他の一部は scatter されて元へ戻り、
残りは capture されてなくなるであらう。
この場合 scattering は この両 region 中で何回もおこつたかも知れぬが Δr を充分小さくすれば それは negligible になる。又 neutron の velocity の大きさ及び方向によつて、之等の割合、又 scatter された後の velocity distribution は異なるであらう。
一般に、 r なる半径の boundary を内から外へ突きぬける v なる velocity で θ なる angle で通つた結果、$(\theta', \theta'+d\theta')$ なる方向へ neutron が



$$\Delta r \cdot \rho(v'\theta'; v\theta)\, d\theta'$$

丈戻つて来るとし、$\frac{\pi}{2}+\theta \geq \theta' \geq \frac{\pi}{2}$

v が大きければ θ′ も大きい。

$$\Delta r \cdot \kappa(v\,\theta)$$

丈が capture されたとし、更に向ふ側へ $(\theta', \theta'+d\theta')$ なる neutron が

$$\Delta r \cdot \rho(v\theta'; v\theta)\, d\theta', \quad 0 \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$$

丈つきぬけたとすると、v なる neutron の反射は、

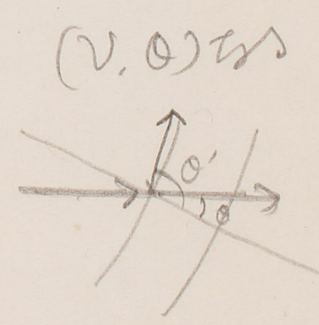
$$\Delta r\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}+\theta} \rho\, d\theta' + \kappa\right]$$

従つて (v, θ) なる neutron の

$$1 - \Delta r\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}+\theta} \rho\, d\theta' + \kappa\right]$$

なる fraction 丈がつきぬけた訳である

ρ に就いてもう少し詳しく考へて見ると、(v, θ) なる neutron が θ' なる方向に scatter される割合は



$$\frac{\Delta r}{\cos\theta} \cdot \lambda(v, \theta'-\theta)\, d\theta'$$

capture の割合は $\frac{\Delta r}{\cos\theta}\kappa(v)$

従つて

$$1 - \Delta r\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}+\theta} \frac{\lambda(v, \theta'-\theta)\, d\theta'}{\cos\theta} + \frac{\kappa(v)}{\cos\theta}\right]$$

丈がそのまゝつきぬける。

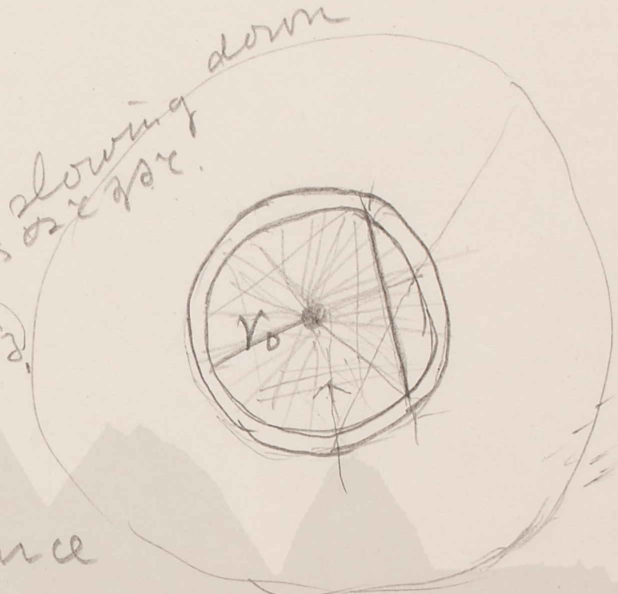
そこで velocity distribution を

$$f(r, v, \theta)$$

とすると、r なる面を unit time に通る (v, θ) なる neutron の数は

$$v\cos\theta\cdot f.$$

(但し $\theta \le \frac{\pi}{2}$.)



中の空の space では slowing down などはないとする。
及び capture などがないとする。

さて、内側の boundary に於ける[illegible]を無視する。equilibrium distribution に対しては、resultant neutron current は source に於けるもの丈の差である。これを velocity v_0 $(\theta_0=0)$ の monochromatic なものとし、unit time に Q_0 個の neutron が出てくるとすると、之は吸収されないで r_0+dr_0 の所へ、

$$Q_0\left\{1-\Delta r\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}+\theta}\frac{\lambda(v,\theta'-\theta)\,d\theta'}{\cos\theta}+\frac{\kappa(v)}{\cos\theta}\right]\right\}$$

丈出て行く。

cavity 中の velocity distribution を (v_0 は除く)

$$f_0(v, \theta)$$

$$f_0(v,\theta) = f_0(v, \pi-\theta),$$

とすると、之が単位時間に $(\theta \le \frac{\pi}{2})$

$$4\pi r_0^2\, v\cos\theta\, f_0$$

丈 boundary を通過し、その結果 散乱されて θ' $(\ge \frac{\pi}{2})$, $v'(v,\theta,\theta')$ なる neutron が

$$dr\,\frac{\lambda(v,\theta'-\theta)}{\cos\theta}\,4\pi r_0^2\, v\cos\theta\, f_0$$

丈 散って来ると考える。

一方、r_0+dr から boundary を通って $\left(\theta \geq \frac{\pi}{2}\right)$ 4

$4\pi(r_0+dr)^2 f(r_0+dr, v, \theta)(-v\cos\theta)$

個の (v,θ) neutron が [illegible]

$\frac{dr}{(-\cos\theta)} \cdot \lambda(v,\theta'-\theta)$ $4\pi(r_0+dr)^2 f(r_0+dr, v,\theta)(-v\cos\theta)$

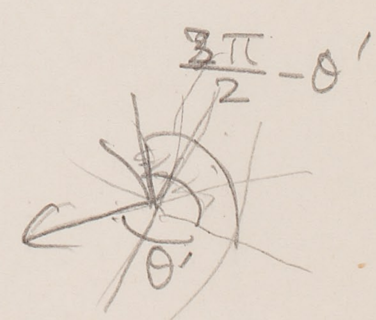
だけ neutron が ~~生まれた~~ capacity 中に とすると、equil. distribution においては、

$$dr \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \lambda(v,\theta'-\theta) \cdot v f_0(v,\theta) \, d\theta$$

$$+ dr \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \lambda(v',\theta'-\theta) f(r_0, v, \theta) \, v \, d\theta$$

$$+ f(r_0, v'\theta') \left\{ 1 - dr \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}+\theta'} \frac{\lambda(v',\theta'-\theta'')d\theta''}{\cos\theta'} + \frac{\kappa(v')}{\cos\theta'} \right] \right\} v'\cos\theta'$$

$$= f_0(v'\theta') \cdot v'\cos\theta'$$



$$\therefore f(r_0, v'\theta') = f_0(v'\theta')$$

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \lambda(v,\theta'-\theta) v f_0(v,\theta) \, d\theta$$

$$+ \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \lambda(v',\theta'-\theta) v f(r_0 v,\theta) \, d\theta$$

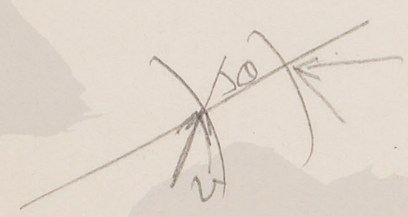
$$+ v'\cos\theta' \frac{\partial f(r_0, v'\theta')}{\partial r} = v' f(r_0 v'\theta') \left[\int_{\frac{3\pi}{2}-\theta'}^{\pi} \lambda(v,\theta'-\theta'')d\theta'' + \kappa(v') \right]$$

$\theta' \geq \frac{\pi}{2}$

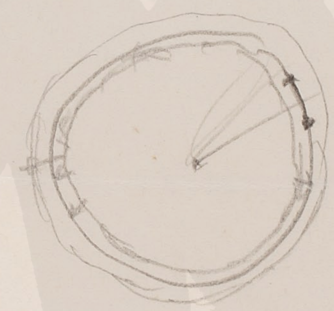
$$\int_{\theta=0}^{\pi} \lambda(v, \theta'-\theta)\, v\, f(r_0, v, \theta)\, d\theta$$

$$+\, v' \cos\theta' \frac{\partial f(r_0, v'\theta')}{\partial r} = v' f(r_0, v', \theta')\Big[\int_{\frac{3\pi}{2}-\theta'}^{\pi} \lambda(v, \theta'-\theta')d\theta'$$

$$+\, \varkappa(v')\Big]$$



$v\,dt \ll dr,$



$v \cos\theta\, dt \cdot 4\pi r^2$

$f(r, v, \theta)\{1 - \frac{dr}{\rho}\}$

$\|$

$\sum f(r, v, \theta)$

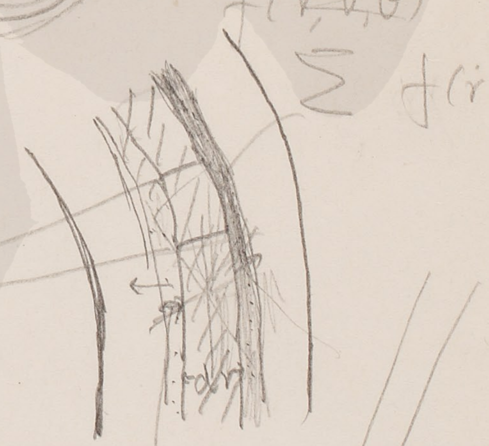
$\theta < \frac{\pi}{2}$ $\quad v \cos\theta\, dt \cdot 4\pi r^2 f(r, v, \theta)$

$\downarrow$

$\theta' > \frac{\pi}{2}$ $\quad v^2 \cos\theta^2\, dt \cdot 4\pi r^2 f(r, v, \theta)$

$\theta' < \frac{\pi}{2}$ $\quad \times \frac{dr}{\lambda(v, \theta; v'\theta') \cdot \cos\theta}$

$$v \cos\theta\, dt \cdot \frac{dr}{\lambda(v)\cos\theta}\, 4\pi r^2 f(r, v, \theta)$$



$v\,dt \cos\theta\, dt$

$\theta > \frac{\pi}{2}$ $\quad v(\cos\theta)dt \cdot 4\pi(r^2 + 2r\,dr)\{f(r, v, \theta) + dr \frac{\partial f}{\partial r}\}$

$\theta' > \frac{\pi}{2}$ $\quad v(-\cos\theta)dt \cdot 4\pi(r^2 + 2r\,dr)\{f(r, v, \theta) + dr \frac{\partial f}{\partial r}\}$

$\theta' < \frac{\pi}{2}$ $\quad \times \frac{dr}{\lambda(v, \theta; v'\theta') \cdot \cos\theta}$

$\prime\ \prime$

$\times$

ある時刻で $(r, r+dr)(v, v+dv)(\theta; \theta+d\theta)$ neutron の数を

$$\rho(r, v, \theta, t)\, dr\, dv\, d\theta$$

とすると、$t+dt$ なる時刻には $(v\,dt \ll dr)$

capture のために

$$(-)\quad \frac{dt}{\tau(v)}\, \rho(r, v, \theta, t)\, dr\, dv\, d\theta$$

丈へり $(\tau(v)$: mean life time$)$

scattering のために

$$(-)\quad \int_0^v \frac{dt\, dv'}{\lambda(v, \theta; v', \theta')} \cdot \rho(r, v, \theta, t)\, dr\, dv\, d\theta .$$

丈減少し、一方 他の速度の neutron の scattering のために

$$(+)\quad \int_v^{v_0} \frac{dt\, dv' \rho(r, v', \theta', t)\, dr\, dv'\, d\theta'}{\lambda(v' \theta'; v, \theta)} \qquad \lambda(v'; v, |\theta'-\theta|)$$

$(\lambda$: mean free path$)$

丈増加し、

又 r の boundary を通って出入することによる増加は

$$(+)\quad \rho(r, v, \theta, t)\, dv\, d\theta \cdot v \cos\theta\, dt$$

外の boundary を通って出入っていく減少は

$$(-)\quad \rho(r+dr, v, \theta, t)\, dr\, dv\, d\theta \cdot v \cos\theta\, dt$$

$$\frac{2v\,dv\, v'}{v^2 \lambda}$$

これらを足して 0 になるためには

$$-\frac{\rho}{\tau(v)} - \int_0^v \frac{dv'}{\lambda(v, \theta; v'\theta')} \cdot \rho + \int_v^{v_0} \frac{dv' \rho(v'\theta')}{\lambda(v', \theta'; v, \theta)}$$

$$- \frac{\partial \rho}{\partial r} v \cos\theta = 0, \qquad \frac{v\rho}{\lambda} \qquad + \frac{\int_v^{v_0} \rho' dv'}{\lambda}$$

$$\rho \left[\int_0^v \frac{dv'}{\lambda(v, \theta; v'\theta')} + \frac{1}{\tau(v)} \right] + \frac{\partial \rho}{\partial r} v \cos\theta = \int_v^{v_0} \frac{\rho'\, dv'}{\lambda(v'\theta'; v\theta)}$$

$$= \frac{v}{\lambda(v)}$$

(i) 最も簡単な assumption として,

$$\frac{1}{\lambda(v,\theta;v'\theta')} = \text{const} = \frac{1}{\lambda}$$

とおくと, 上式を v について積分すれば

$$-\frac{1}{\tau(v)}\frac{\partial\rho}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\tau(v)}\right)\cdot\rho - \frac{v}{\lambda}\frac{\partial\rho}{\partial v} - \frac{\rho}{\lambda}$$

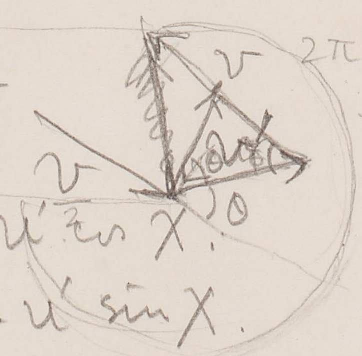
$$-\frac{\rho}{\lambda} - \frac{\partial^2\rho}{\partial v\partial r}v\cos\theta - \frac{\partial\rho}{\partial r}\cos\theta = 0$$

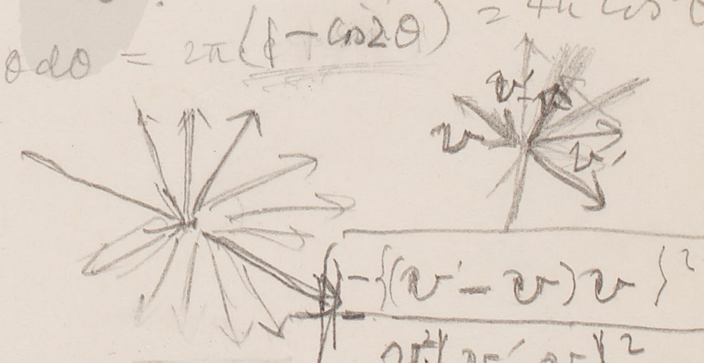
$$\rho(v)\left[\frac{v}{\lambda(v)} + \frac{1}{\tau(v)}\right] + \frac{\partial\rho}{\partial r}v\cos\theta = 2v\int^{v_0}\frac{n(v')dv'}{v'\lambda(v')}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{v\tau}\right)\right\}^{v} + \frac{\rho}{v\lambda} + \frac{\partial\rho}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial^2\rho}{\partial v\partial r}v\cos\theta = 0$$

$2\cos^2\theta$

$$2\pi\int_0 \sin\theta\, d\theta = 2\pi(1-\cos 2\theta) = 4\pi\cos^2\theta.$$





$$v^2 = v'^2 + u'^2$$

$$v = v'\cos\theta + u'\cos\chi$$

$$0 = v'\sin\theta - u'\sin\chi$$

$$2v'\cos(\theta+\chi) = 0$$

$$\theta+\chi = \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{-\{(v'-v)v\}^2}{v^2(v'-v)^2}$$

$$\frac{v'^2}{v^2}$$

$$v = v'\cos\theta + u'\sin\theta = v'\cos\theta\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right) =$$

$v'\sin\theta = u'\cos\theta,$ $v' = v\cos\theta.$ $u' = v\sin\theta.$

$$\rho = \rho_r \rho_{v,\theta}$$

$$\frac{1}{\rho_{v,\theta}\cos\theta}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\rho_{v,\theta}}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{v\tau}\right)\right\}+\frac{1}{v\lambda\cos\theta}+\left(1+\frac{\partial\rho_{v,\theta}}{\partial v}\frac{v}{\rho_{v,\theta}}\right)\frac{1}{\rho_r}\frac{d\rho_r}{dr}=\varkappa$$

$$\frac{1}{\rho_r}\frac{d\rho_r}{dr}=-\varkappa.\qquad \rho_r=e^{-\varkappa r}$$

$$dv\,dv'\,d\theta'$$

$$(v,v',\theta)$$

$$=\frac{\partial(v,v',\theta')}{\partial(v,v',\theta)}dv\,dv'\,d\theta.$$

$$\frac{1}{\rho_{v,\theta}\cos\theta}$$

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial v}{\partial v} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\partial\theta'}{\partial v} & \frac{\partial\theta'}{\partial v'} & \frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{\rho_r}\frac{\partial\rho_r}{\partial r}=\frac{1}{\rho(v,\theta)v\tau\cos\theta}\left\{\int_v^{v_0}\frac{\rho(v',\theta')dv'}{\lambda(v'\theta';v\theta)}\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}-\rho(v,\theta)\left[\int_0^v\frac{dv'}{\lambda(v\theta;v'\theta')}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\tau(v)}\right]\right\}=-l.$$

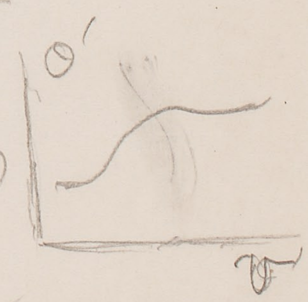
$$\rho_r=e^{-\frac{r}{l}}$$

$$\frac{\lambda}{v}\int_0^v\frac{dv'}{\lambda(v\theta;v'\theta')}=1.\qquad \frac{v}{\lambda}$$

$$\lambda(v)=v\,dt\Big/\int_0^v\frac{dv'}{\lambda(v\theta;v'\theta')}.$$

$$\int_0^{v'}\frac{dv'}{\lambda(v,\theta;v'\theta')}=\frac{v'^2}{v^2}\cdot\frac{v}{\lambda(v)}=\frac{v'^2}{v\lambda(v)}$$

$$\frac{1}{\lambda(v,\theta;v'\theta')}=\frac{2v'}{v\lambda(v)}\qquad \theta'(v,v',\theta)$$



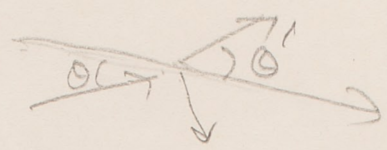
$$\int_v^{v_0}\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\frac{\rho(v'\theta')dv'}{\lambda(v'\theta';v\theta)}=\int_v^{v_0}\frac{\rho(v'\theta')dv'\cdot 2v}{v'\lambda(v')}\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}.$$

$$2\int_v^{v_0}\frac{\rho(v'\theta')dv'}{v'\lambda'}\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}=\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{v\tau}+\frac{\cos\theta}{l}\right)\rho(v,\theta)$$

$v^2 = v'^2 + u'^2$

$v\cos\theta = v'\cos\theta' + u'\sin\theta'$

$v\sin\theta = v'\sin\theta' - u'\cos\theta'$



$(v\cos\theta - v'\cos\theta')^2 + (v\sin\theta - v'\sin\theta')^2 = v^2 - v'^2$

$-2vv'\cos(\theta' - \theta^*) = -2v'^2$

$\cos(\theta' - \theta^*) = \frac{v'}{v}$

$\frac{\partial\theta'}{\partial\theta} = 1$

$\theta' = \theta + \arccos\frac{v'}{v}$

$-\sin(\theta'-\theta)\frac{\partial\theta'}{\partial v} = -\frac{v'}{v^2}$

$\frac{\partial\theta'}{\partial v} = \frac{\frac{v'}{v^2}}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{v^2}}} = \frac{v'}{v\sqrt{v^2-v'^2}}$

$\frac{\partial\theta'}{\partial v'} = \frac{-\frac{1}{v}}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{v^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{v^2-v'^2}}$

~~$\rho(v^*\theta^*) = \rho(v)$~~

~~$-\frac{2\rho(v)}{v\lambda} = \frac{d}{dv}\left\{\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{v\tau} + \frac{\cos\theta}{l}\right)\rho(v)\right\}$~~

$$2\int_v^{v_0} \frac{\frac{\partial\rho(v'\theta')}{\partial\theta'}}{v'\lambda'} dv' = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{v\tau} + \frac{\cos\theta}{l}\right)\frac{\partial\rho(v,\theta)}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{l}\rho(v,\theta)$$

$$2\int_v^{v_0} \frac{\frac{\partial^2\rho(v'\theta')}{\partial\theta'^2}}{v'\lambda'} dv' = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{v\tau} + \frac{\cos\theta}{l}\right)\frac{\partial^2\rho(v,\theta)}{\partial\theta^2} - \frac{2\sin\theta}{l}\frac{\partial\rho}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{l}\rho(v,\theta).$$

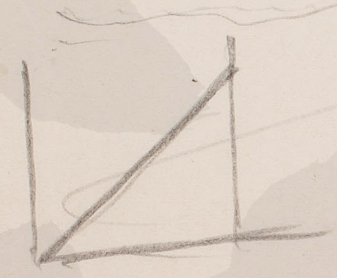
$l \to \infty$. $\quad 2\int_v^{v_0} \frac{\rho(v',\theta')\,dv'}{v'\lambda'} = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{v\tau}\right)\rho(v,\theta).$

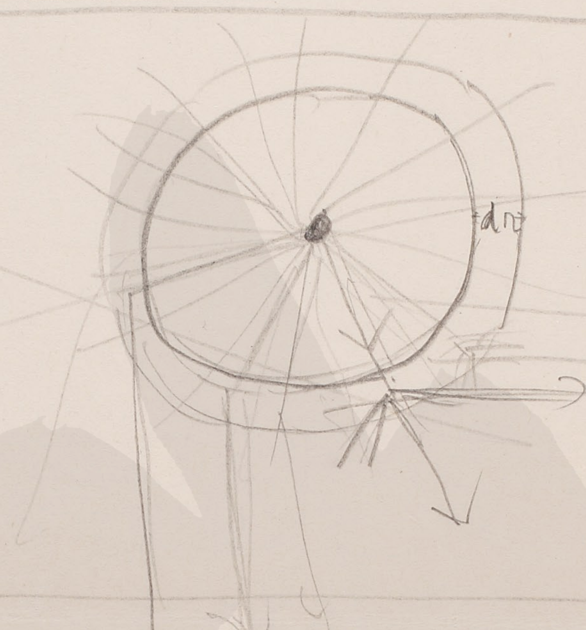
general solution は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\nu}{l}} \rho(\nu, \theta, l)\, a(l)\, dl.$$

l をきめても各 $\rho(\nu, \theta, l)$ は unique にはきまらぬ

$$\frac{\nu' d\nu'}{\nu \lambda(\nu)}$$





θについて、 0, π の間について ∫すると、 $\rho(\nu) = \int_0^\pi \rho(\nu, \theta) d\theta$ とすると

$$\int_0^\pi \rho(\nu', \theta') d\theta = \int_0^\pi \rho(\nu', \theta') d\theta' \cdot \frac{\partial\theta(\nu, \nu'\theta')}{\partial\theta'}$$

$$= \rho(\nu')$$

$$\chi(\nu) = \int_0^\pi \rho \cdot \cos\theta\, d\theta$$

$$2\int_\nu^{\nu_0} \frac{\rho(\nu') d\nu'}{\nu' \lambda'} = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\nu\tau}\right)\rho(\nu) + \frac{\chi(\nu)}{l}$$

$$\rho(\nu, \theta) = \sum_{k=1} \{\rho_k(\nu) \cos 2k\theta + \rho_k'(\nu) \sin 2k\theta\} + \rho(\nu)$$

$$\int_\nu^{\nu_0} \frac{\rho_k(\nu) d\nu'}{\nu' \lambda'} = \rho_k'(\nu)$$