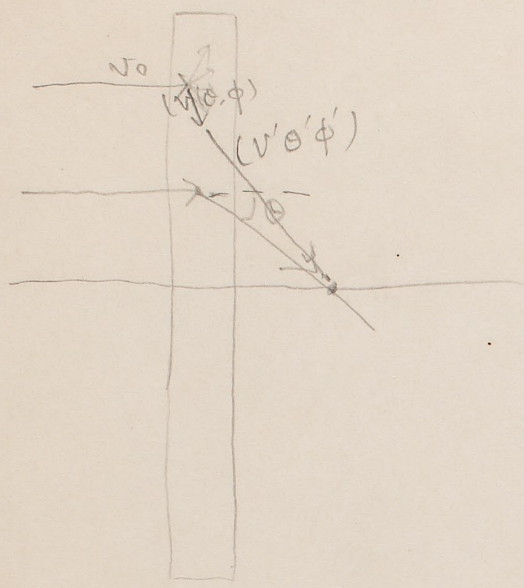


$\frac{v}{v_0} = \cos\theta$.　　ϕ : arbitrary.

$\frac{v'}{v} = \cos\gamma . = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' \cos(\phi-\phi')$

v', θ', ϕ' の中一つは arbitrary.

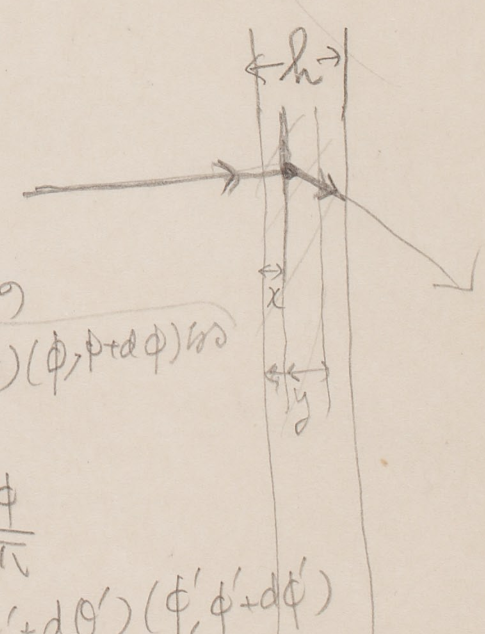
一個の衝突で $(\theta, \theta+d\theta)(\phi, \phi+d\phi)$ の間に scatter される prob. は　$d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$.
とおいて　$2\sin\theta\cos\theta\, d\theta\, \cancel{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{2\pi} = \frac{\cos\theta \cdot d\omega}{\pi}$

= 個目の衝突で $(\theta', \theta'+d\theta')(\phi', \phi'+d\phi')$ の間に scatter される prob は　$d\omega' = \sin\theta' d\theta' d\phi'$
とおいて　$\cancel{2\sin\gamma\cos\gamma\, d\gamma}$.
$\cos\gamma \frac{d\omega'}{\pi} = \cos\gamma \frac{\sin\theta' d\theta' d\phi'}{\pi}$

故に、二個の衝突によって (Θ', Φ') 方向に deflect される prob. は

$$\iint \frac{\cos\theta\, d\omega}{\pi} \cdot \frac{\cos\gamma \cdot d\omega'}{\pi} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\cancel{2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\phi\, \cos\gamma}{\pi^2} d\omega'$$

$$\cancel{= \frac{2}{\pi}\int \sin\theta \cdot \cos^2\theta \cdot \cos\theta'\, d\theta \cdot d\omega'}$$



一個の衝突の結果 velocity の reduce された neutron が更に updy で scatter されるとすると、x から $x+dx$ 深さで一個の $(\theta, \theta+d\theta)(\phi, \phi+d\phi)$ の scattering を起こる確率は

$$\frac{1}{\lambda_0} e^{-\frac{x}{\lambda_0}} dx \cdot \frac{\cancel{2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{d\phi}{\cancel{2}\pi}$$

それが更に (y から $y+dy$) 深さで = 個目の $(\theta', \theta'+d\theta')(\phi', \phi'+d\phi')$ の衝突を起こす prob. は
$(v = v_0\cos\theta)$

$$\frac{e^{-\frac{y-x}{\lambda(v)\cos\theta}}}{\lambda(v)\cos\theta} dy \cdot \cancel{2\sin\gamma}\cos\gamma \cdot \frac{\sin\theta' d\theta' d\phi'}{\pi}$$

である。
従って $(\theta,\phi)(\theta'\phi')$ なる二個の粒子が相次いでおこる prob は

$$\frac{\sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\phi\cdot\cos\gamma\sin\theta' d\theta' d\phi'}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\lambda_0\lambda(v)\cos\theta}\int_0^h e^{-\frac{x}{\lambda_0}}dx\int_0^{h-x} e^{-\frac{y}{\lambda(v)\cos\theta}}dy$$

$$\int_0^h e^{-\frac{x}{\lambda_0}}dx\int_0^{h-x} e^{-\frac{y}{\lambda(v)\cos\theta}}dy=\lambda(v)\cos\theta\int_0^h \frac{1-e^{-\frac{h+x}{\lambda(v)\cos\theta}}}{\cancel{\lambda(v)\cos\theta}}\cdot e^{-\frac{x}{\lambda_0}}dx$$

$$= \cancel{\frac{1-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}}{\lambda_0\lambda(v)\cos\theta}} - \frac{e^{-\frac{h}{\lambda(v)\cos\theta}}}{\lambda(v)\cos\theta}$$

$$=\lambda(v)\cos\theta\,\lambda_0\left\{\left(1-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}\right)-\frac{e^{-\frac{h}{\lambda(v)\cos\theta}}}{1-\frac{\lambda_0}{\lambda(v)\cos\theta}}\left(1-e^{\frac{h}{\lambda(v)\cos\theta}-\frac{h}{\lambda_0}}\right)\right\}$$

$$=\lambda(v)\cos\theta\,\lambda_0\left\{1-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}-\frac{e^{-\frac{h}{\lambda(v)\cos\theta}}-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}}{1-\frac{\lambda_0}{\lambda(v)\cos\theta}}\right\}$$

∴ ~~$\lambda(v)\cos\theta \gg h$ なら,~~
∴ $\lambda_0 \gg \lambda(v)\cos\theta$) なら $\qquad \cong \lambda(v)\cos\theta\,\lambda_0\cdot\frac{h}{\lambda_0}$
$\lambda_0 \gg h$

又 $\lambda(v)\cos\theta \gg h$ なら
$\lambda_0 \gg h$

$$\lambda(v)\cos\theta\,\lambda_0\left\{\frac{h}{\lambda_0}-\frac{\frac{h}{\lambda_0}-\frac{h}{\lambda(v)\cos\theta}+\frac{1}{2}\frac{h^2}{\lambda^2(v)\cos^2\theta}-\frac{1}{2}\frac{h^2}{\lambda_0^2}}{\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda(v)\cos\theta}}\cdot\frac{1}{\lambda_0}\right\}$$

$$=\lambda(v)\cos\theta\,\lambda_0\frac{h^2}{2\lambda_0}\left\{\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda(v)\cos\theta}\right\}$$

$< \theta \le \frac{\pi}{2}-\delta$

$\cos\theta \simeq 0$ or $\theta \simeq \frac{\pi}{2}$ or $v \simeq 0$ でない限り

$\lambda_0(v)\cos\theta \gg h$ と考へられる. この範囲では

$(\theta,\phi)(\theta',\phi')$ なる二個の衝突の確率は

$$\frac{\sin\theta\cos\theta\, d\theta d\phi \cos\gamma \sin\theta' d\theta' d\phi'}{\pi^2} \cdot \frac{h}{\lambda_0}$$

$\cos\theta \simeq 0$ 即ち $\theta \simeq \frac{\pi}{2}$ or $v \simeq 0$ の時には

~~$\lambda_0(v)\cos\theta$~~ ... $\frac{\pi}{2}-\varepsilon \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ / $\varepsilon \ge \cos\theta \ge 0$

$v_0\varepsilon \ge v \ge 0$ の間では $\lambda_0(v)\cos\theta \le \lambda(v_0\varepsilon)\varepsilon \ll h$

とすると $$\frac{\sin\theta\cos\theta\, d\theta\cdot d\phi \cos\gamma \sin\theta' d\theta' d\phi'}{\pi^2}\frac{h^2}{2\lambda_0}\left\{\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda(v)\cos\theta}\right\}$$

$$\simeq \frac{\sin\theta\cos\theta\, d\theta d\phi \cos\gamma \sin\theta' d\theta' d\phi'}{\pi^2}\frac{h^2}{2\lambda_0\lambda(v)\cos\theta}.$$

$\frac{\pi}{2}-\delta \le \theta \le \frac{\pi}{2}-\varepsilon$ の間では

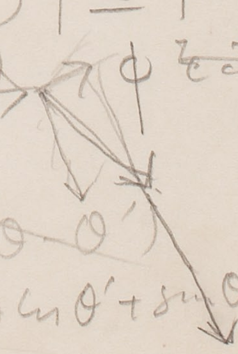
$$\frac{\sin\theta\cos\theta\, d\theta d\phi \cos\gamma \sin\theta' d\theta' d\phi'}{\pi^2}\left\{1-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}\frac{1}{\lambda_0 \ldots \frac{1}{\lambda_0}-\ldots}\right.$$

$$\left\{1-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}+\frac{e^{-\frac{h}{\lambda\cos\theta}}-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}}{\frac{1}{\lambda(v)\cos\theta}-\frac{1}{\lambda_0}}\right\}$$

さて ~~二個の衝突の~~ 方向について 絶対 (θ',ϕ') なる prob.

は、 ~~$\frac{\gamma}{\gamma_0}$~~ $= |\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')| \le 1$

$(0\le\theta'\le\frac{\pi}{2})$ ϕ を求めれば良い.



的条件を 満足する $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ について 積分すれば良い。 それには、

$\cos(\theta-\theta')$

$$\le\{\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')\}^2 \le (\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta')^2$$

$(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')^2$ $\phi-\phi'=0$:

$\cos\theta'\{\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')\} = \frac{v'}{v_0}$

$\cos\theta' \cong 0$, $\sin\theta' \cong 1$). $\cos\theta \cong \frac{v'}{v_0}\frac{1}{\sin\theta'\cos(\phi-\phi')} \le 1$

≥ 0

$\sim \frac{v'}{v_0}$

$\cos(\phi-\phi') \ge \frac{v_0\sin\theta'}{v'}$

$|\phi-\phi'| \le \frac{\pi}{2}$

$|\phi-\phi'| \le \arccos\left(\frac{v_0\sin\theta'}{v'}\right)$

一回目に　$\theta \simeq \frac{\pi}{2}$ なる衝突をし、次に 二回目の衝突をして velocity が v' で (θ', ϕ') なる方向に scatter されたとする。$\frac{v'}{v_0} = \cos\theta\cos\gamma$

or　$\cos\theta\{\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\,\underline{\sin\theta'}\,\underline{\cos(\phi-\phi')}\} = \frac{v'}{v_0}$

∴ $|\phi - \phi'| \simeq \frac{\pi}{2}$) でない限り、
~~又は~~ $\theta' \simeq 0$　$\cos\theta \simeq \frac{v'}{v_0}\frac{}{\sin\theta'\cos(\phi-\phi')}$

$$-\sin\theta\, d\theta \simeq \frac{dv'}{v_0\sin\theta'\cos(\phi-\phi')}$$

∴ ~~第~~二回の衝突によって $(\theta', \theta'+d\theta')(\phi', \phi'+d\phi')(v', v'+dv')$ になる prob. は

$$\frac{\cancel{\sin\theta}\,\cos\theta\, d\phi\cos\gamma\sin\theta' d\theta' d\phi'}{\pi^2}\cdot\frac{h^2}{2\lambda_0\lambda(v)\cos\theta}\cdot\frac{dv'}{v_0\cancel{\sin\theta'}\cos(\phi-\phi')}$$

$$= \frac{\cancel{\cos\theta}}{\pi}\frac{1}{\pi^2}\frac{h^2}{2\lambda_0\lambda(v)}\cdot\frac{\cos\gamma\, d\phi}{\cos(\phi-\phi')}\frac{d\theta' d\phi' dv'}{v_0}$$

$|\phi-\phi'| \simeq \frac{\pi}{2}$ 又は $\theta' \simeq 0$ でない限り、

$$\simeq \frac{1}{\pi^2}\frac{h^2\sin\theta'}{2\lambda_0\lambda(v)\,v_0}d\theta' d\phi' dv' d\phi$$

unit time に v_0 なる neutron が unit area を N_0 丈 cross するなら、$(v', v'+dv')(\theta', \theta'+d\theta')(\phi', \phi'+d\phi')$ neutron が cross する数は

$$N_0\frac{v'}{v_0^2}\frac{1}{\pi^2}\frac{h^2\sin\theta'\cos\theta}{2\lambda_0\lambda(v)}d\theta' d\phi' dv' d\phi \times \cancel{N_0}$$

しかるに　$\cos(\phi-\phi') \geqq \frac{v'}{v_0\sin\theta'}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$　∴ $|\phi-\phi'| \leqq \arccos\left(\frac{v'}{v_0\sin\theta'\cos\theta}\right)$

~~但し、$\frac{v'}{v_0} < \sin\theta'$ なる限り。しかるに $\frac{v'}{v_0} \ll 1$、∴ $\sin\theta' \ll 1$ では~~

そこで $\nu'\ \theta'\ \phi'$ をきめたればとりうる ϕ の範囲であるが,

$$\cos\theta = \delta - \frac{\delta^3}{3} \qquad \sin\theta = 1 - \frac{\delta^2}{2} + \cdots$$

とおると,

$$\left(\delta^2 - \frac{\delta^4}{3}\right)\cos\theta' + \left(\delta - \frac{\delta^3}{2}\right)\sin\theta'\cos(\phi-\phi') = \frac{v'}{v_0} = \varepsilon.$$

$$\delta = \frac{\varepsilon + k\varepsilon^2 + \cdots}{\sin\theta\cos(\phi-\phi')} \cancel{+ k\varepsilon^2} + \cdots$$

$$\frac{\varepsilon^2\cos\theta'}{\{\sin\theta'\cos(\phi-\phi')\}^2} + \cancel{\frac{2k\varepsilon^3\cos\theta'}{\{\sin\theta'\cos(\phi-\phi')\}^2}} \cdots$$

$$+ \quad k\varepsilon^2 + \cdots = 0.$$

$$k = -\frac{\cos\theta'}{\{\sin\theta'\cos(\phi-\phi')\}^2} \qquad \delta = \frac{\varepsilon}{\sin\theta'\cos(\phi-\phi')} - \frac{\cos\theta'}{(\quad)^3}\varepsilon^2$$

$\delta > 0$ ~~でなく~~ 故, で又 $\sin\theta' > 0$ 故, $\cos(\phi-\phi') > 0$

$\therefore \quad |\phi-\phi'| < \frac{\pi}{2}$,

故に ϕ について $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ の間で積分すると,

$$N_0\frac{v'}{v_0^2}\frac{1}{\pi}\frac{h^2\sin\theta'\cos\theta'}{2\lambda_0\lambda(v)}d\theta' d\phi' dv'.$$

更に ϕ' について $(0, 2\pi)$ の間で積分すると

$$N_0\frac{v'dv'}{v_0^2}\frac{h^2}{\lambda_0\lambda(v)}\sin\theta'\cos\theta' d\theta'.$$

θ' について $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ の間で積分すると $\qquad \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin \overset{x}{(2\theta)}\, d\overset{x}{(2\theta)} = \frac{1}{2}$

$$\boxed{N_0\frac{v'dv'\cdot h^2}{v_0^2\cdot 2\lambda_0\lambda(v)}}$$

となる。これは $\frac{v'}{v_0} \ll 1$ なる neutron の数である。(二個の衝突ならぬ)

一個の衝突による分は　$\cos\theta^{2} = \frac{v^{2}}{v_0}$

$$\frac{1}{\lambda_0} e^{-\frac{x}{\lambda_0}} dx \, \sin\theta\cos\theta \, d\theta \, \frac{d\phi}{\pi}$$

$$= \cancel{\lambda_0}\left(1-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}\right)\frac{2v\,dv}{v_0^2} \cong \frac{h}{\lambda_0}\frac{2v\,dv}{v_0^2}$$

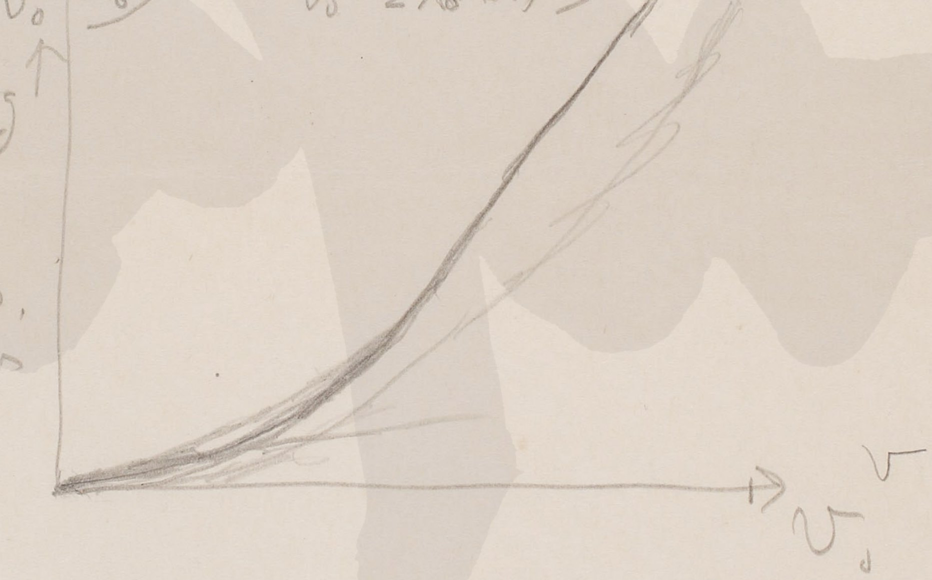
unit time に unit area を横切る数は

$$N_0\frac{v\cos\theta}{v_0}\cdot\frac{h}{\lambda_0}\frac{2v\,dv}{v_0^2} = N_0\frac{2v^3dv}{v_0^4}\cdot\frac{h}{\lambda_0}$$

故に velocity と共に急激に減少する。

$\frac{v}{v_0}$ の非常に小さい　$\frac{2v^3}{v_0^4}\frac{h}{\lambda_0}$　$\frac{v'^2}{v_0^2}\frac{h^2}{2\lambda_0\lambda(v)}$

所では二個の scattering による項の方が overwhelming になる。



(この点では ~~一個の方の項は除外すべき~~ である)

従って slow neutron の数は大体 h^2 に比例する筈である。

~~$\frac{v'}{v_0} \leq \frac{1}{1000}$ とすると、~~

$$\frac{\frac{2v^3}{v_0^4}\frac{h}{\lambda_0}}{\frac{v}{v_0^2}\frac{h^2}{2\lambda_0\lambda(v)}} = \frac{4v^2}{v_0^2}\cdot\frac{\lambda(v)}{h}$$

$\frac{v'}{v_0} \leq 10^{-3}$ とすると、$\cong 4\cdot 10^{-6}\frac{\lambda(v)}{h}$

で非常に小さい。$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{10}$ 位では、$\frac{1}{25}\frac{\lambda(v)}{h}$. ∴ $\lambda(v) \cong 5^{mm}$ とすると

$h \cong 1^{mm}$ では既に 2回の scattering の方が効いてくる。

~~積分の範囲~~は slow neutron の numerosity (current) は
$(0, v_1)$ の範囲について積分すると、

$$\frac{N_0}{v_0^2} \cdot \frac{v_1^2}{4} \cdot \frac{h^2}{2\lambda_0 \lambda(v)}$$

速い neutron の数 (current) は　(v_2, v_0) の範囲について
積分すると、
N_{00}

$$\simeq \frac{N_0 h}{2\lambda_0} - \cdots$$