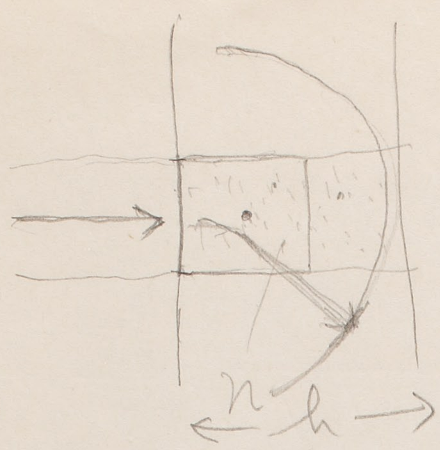
③

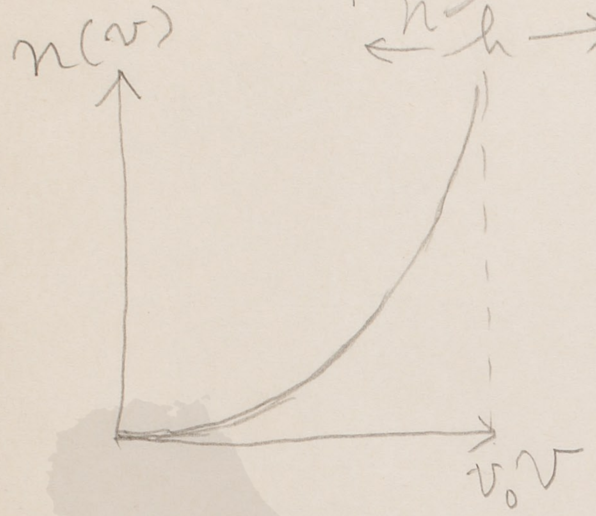


$$n\iint \sigma(\omega)\cdot d\omega = \frac{1}{\lambda}$$

$\cos\theta = \frac{v}{v_0}$

$$= \sigma(\omega)\,d\omega = \frac{\cos\theta\, d\omega}{\pi}$$

$$= \frac{d\phi}{\pi}\cdot\frac{v}{v_0}\cdot\frac{dv}{v_0}\cdot\frac{1}{\lambda_0}$$



一回のscatteringを考へ、~~その後の~~ scatterされる部分の減衰を考へなければ $(v, v+dv)$ の間のvelocityで screenの1の unit areaを unit timeに 横切るneutronの数は

$$n(v) = \frac{2v\,dv}{v_0^2}\cdot\frac{h}{\lambda_0}N_0$$

である。

∵ $(x, x+dx)$ の間で scatter~~ing~~ され~~たもの~~ 横切るもの

$$\frac{N_0}{\lambda_0}\cdot e^{-\frac{x}{\lambda_0}}dx\,\frac{2v\,dv}{v_0^2}\cancel{\frac{h}{\lambda_0}}$$

$$\times\; e^{-\frac{h-x}{\lambda(v)\cos\theta}}$$

$-\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda(v)\cos\theta}$

∴ xについて $(0,h)$ の間で積分して

$$N_0\frac{2v\,dv}{\lambda_0 v_0^2}\cdot e^{-\frac{h}{\lambda(v)\cos\theta}}\left\{\cancel{\lambda_0\left(1-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}\right)}\right\} = \frac{1-e^{+\frac{h}{\lambda(v)\cos\theta}-\frac{h}{\lambda_0}}}{\frac{1}{\lambda(v)\cos\theta}-\frac{1}{\lambda_0}}$$

~~$h \ll \lambda_0$ とすると、~~

$$= N_0\frac{2v\,dv}{v_0^2}\left\{\cancel{\frac{h}{\lambda_0}e^{-\frac{hv_0}{\lambda(v)v}}} + \frac{1}{\lambda_0}\frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0}}-e^{-\frac{hv_0}{\lambda(v)v}}}{\frac{v_0}{\lambda(v)v}-\frac{1}{\lambda_0}}\right\}$$

$$= N_0\frac{2v\,dv}{\lambda_0 v_0^2}\,\frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0}}-e^{-\frac{hv_0}{\lambda v}}}{\frac{v_0}{\lambda v}-\frac{1}{\lambda_0}}$$

$h \ll \lambda_0$
$h \ll \frac{\lambda v}{v_0}$ なら

$$\cong N_0\frac{2v\,dv}{v_0^2}\cdot\frac{h}{\lambda_0}$$

これに $h \gg \frac{\lambda v}{v_0}$, $\lambda_0 \gg$ なら、 $N_0\frac{2v\,dv}{\lambda_0 v_0^2}\cdot\frac{v}{\lambda v_0}e^{-\frac{h}{\lambda_0}}$

然るに非常に h の小さい limit では、scatter ~~されずに~~ されて生ずる neutron の総数は

$$N' = N_0\int_0^{v_0}\frac{2v\,dv}{v_0^2}\,\frac{h}{\lambda_0} = N_0\frac{h}{\lambda_0}.$$

$$N_0\int_0^{v_0}\frac{2v\,dv}{v_0^2}\frac{h}{\lambda_0} = N_0\frac{v^2}{v_0^2}\frac{h}{\lambda_0}$$

h の大きくない場合は ~~小さい limit では~~.

$$N' = N_0\int_0^{v_0}\frac{2v\,dv}{v_0^2}\cdot\frac{1}{\lambda_0}\,\frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0}} - e^{-\frac{hv_0}{\lambda v}}}{\frac{v_0}{\lambda v} - \frac{1}{\lambda_0}}$$

$$= \cancel{N_0\frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0}}}{\lambda_0}\cdot\frac{2}{3}\frac{2}{v_0^3}\int_0^{v_0}\frac{v^2\,dv}{\lambda}}$$

$$N_0\int_{v_c}^{v}\frac{v\,dv}{v_0^2}\frac{h}{\lambda_0} = N_0\left(\frac{v^2}{v_0^2} - \frac{v_c^2}{v_0^2}\right)\frac{h}{\lambda_0}$$

scatter されずに通る数は

$$N_0\, e^{-\frac{h}{\lambda_0}}$$

然るに

$$N'' = N_0\left(1 - e^{-\frac{h}{\lambda_0}}\right) - N'$$

が丁度二回目の scattering を受けるもの。この数は、勿論、$h \ll \lambda_0$ の limit に於て $\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2$ の order のもの。

今、h が与えられたとし、$v \le v_c$ ~~に於ては~~ に於ては、h と $\frac{\lambda v}{v_0}$ が同じ order とし、それ以上では $h \ll \frac{\lambda v}{v_0}$ と [illegible]、且 λ はこの範囲で constant λ_c と見做し、$\lambda_0 \gg \frac{\lambda_c v}{v_0}$ とする

すると、

$$N' = N_0\int_{v_c}^{v_0}\frac{2v\,dv}{v_0^2}\cdot\frac{h}{\lambda_0} + N_0\int_0^{v_c}\frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0}} - e^{-\frac{hv_0}{\lambda_c v}}}{\frac{v_0}{\lambda_c v} - \cancel{\frac{1}{\lambda_0}}}\,\frac{2v\,dv}{\lambda_0 v_0^2}$$

negligible

$$= N_0\frac{h}{\lambda_0}\left(1 - \frac{v_c^2}{v_0^2}\right) + N_0 e^{-\frac{h}{\lambda_0}}\cdot\frac{2}{3}\frac{v_c^3}{v_0^3}\cdot\frac{\lambda_c}{\lambda_0}$$

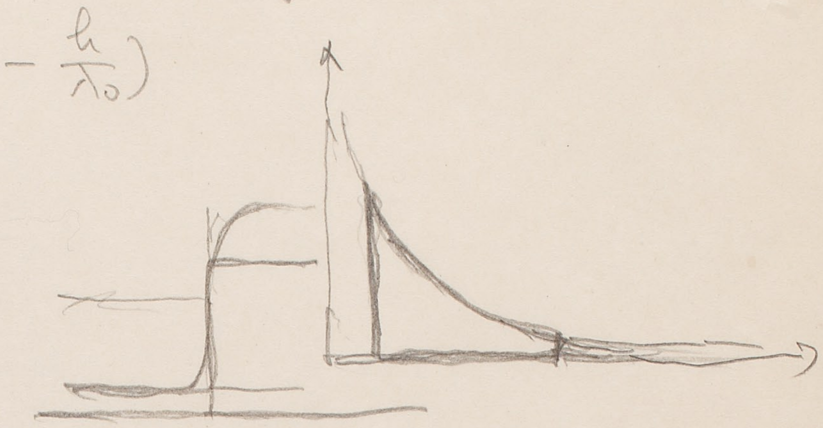
$$\frac{hv_0}{\lambda_c v} = x \qquad -\frac{hv_0\,dv}{\lambda_c v^2} = dx \qquad \frac{\lambda_c}{hv_0}x^2\,dv = dx \qquad v = \frac{hv_0}{\lambda_c x}$$

$$-\frac{2N_0\lambda_c}{\lambda_0 v_0^3}\int_{\frac{hv_0}{\lambda_c v_c}}^{\infty} e^{-x}\left(\frac{hv_0}{\lambda_c x}\right)^2\frac{hv_0\,dx}{\lambda_c x^2}$$

$$= N_0 \frac{h}{\lambda_0}\left(1 - \frac{\nu_c^2}{\nu_0^2}\right) + N_0 e^{-\frac{h}{\lambda_0}} \frac{2}{3}\frac{\nu_c^3}{\nu_0^3}\frac{\lambda_c}{\lambda_0}$$

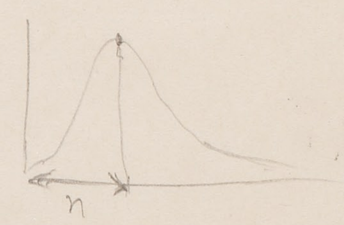
$$\left(1 - \frac{h}{\lambda_0}\right)$$

$$- \frac{2N_0 h^3}{\lambda_0 \lambda_c^2} \boxed{\int_{\frac{h\nu_0}{\lambda_c \nu_c}}^{\infty} e^{-x} x^{-4} dx}$$



$$\frac{d}{dx}(x^n e^{-x}) = 0 \qquad n x^{n-1} - x^n \cancel{y} = 0.$$

$$n^n \cdot e^{-}$$



$$1 - \cancel{x} x + \frac{x^2}{2} + \cdots\cdots$$

$$= 1 - x + \frac{x^2}{2} + \cdots$$

$$x = 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{-4} dx = \frac{1}{2 \cdot 3 x} = \frac{1}{6}$$

$$\int_{\frac{h\nu_0}{\lambda_c \nu_c}}^{1} \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) x^{-4} dx = \left(-\frac{\cancel{x}}{3x^3} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x}\right)_1^{\frac{h\nu_0}{\lambda_c \nu_c}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda_c \nu_c}{h\nu_0}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_c \nu_c}{h\nu_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_c \nu_c}{h\nu_0}\right)$$

$$\frac{1}{3} \quad \cancel{\frac{3}{6}} \quad \cancel{\frac{1}{6}} \quad \frac{\cancel{2}}{6} \qquad -\cancel{\ } \frac{1}{3}$$

$$\frac{2N_0 h^3}{\lambda_0 \lambda_c^2}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{\lambda_c \nu_c}{h\nu_0}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_c \nu_c}{h\nu_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_c \nu_c}{h\nu_0}\right) - \frac{1}{6}\right\}$$

$$= \frac{2N_0}{\lambda_0}\left\{\frac{\lambda_c \nu_c^3}{\nu_0^3} - \frac{1}{2}\frac{h \nu_c^2}{\nu_0^2} + \frac{1}{2}\frac{h^2 \nu_c}{\lambda_0 \nu_0} - \cdots\right\}$$

$$\therefore N' \cong N_0 \frac{h}{\lambda_0}\left(1 - \cancel{\frac{v_c^2}{v_0^2}}\right) + N_0 \frac{2}{3}\frac{v_c^3}{v_0^3}\frac{\lambda_c}{\lambda_0}\left(1 - \frac{h}{\lambda_0}\right)$$

$$\cancel{- \frac{2N_0}{\lambda_0}\left\{\frac{\lambda_c v_c^3}{v_0^3}\right.} - N_0 \cdot 2\frac{v_c^3}{v_0^3}\cdot\frac{\lambda_c}{\lambda_0} + \cancel{N_0 \frac{v_c^2}{v_0^2}\frac{h}{\lambda_0}}$$

$$- N_0 \frac{h^2}{\lambda_0^2}\frac{v_c}{v_0} - \cdots$$

但し、$\dfrac{h^3}{\lambda_0 \lambda_c^2}$ 以上を neglect してある。

$$N' \cong N_0 \frac{h}{\lambda_0}\left(1 \cancel{+} - \frac{2}{3}\frac{v_c^3}{v_0^3}\frac{\lambda_c}{\lambda_0}\right) - N_0 \frac{4}{3}\frac{v_c^3}{v_0^3}\frac{\lambda_c}{\lambda_0} - N_0 \frac{h^2}{\lambda_0^2}\frac{v_c}{v_0}$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$\therefore N'' = \frac{2}{3}\cancel{\frac{v_c^3}{v_0^3}} N_0 \frac{h}{\lambda_0}\frac{\lambda_c}{\lambda_0}\cdot\frac{v_c^3}{v_0^3} + \frac{4}{3}N_0 \frac{v_c^3}{v_0^3}\frac{\lambda_c}{\lambda_0}$$

$$+ N_0 \frac{h^2}{\lambda_0^2}\frac{v_c}{v_0}$$

$$= \frac{4}{3}N_0 \frac{v_c^3}{v_0^3}\frac{\lambda_c}{\lambda_0}\left(1 + \cancel{\frac{1}{2}\frac{h}{\lambda_0}}\right) + N_0 \left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 \frac{v_c}{v_0}$$

hが非常に小さくなければ、第二項は negligible になる。但し、その時には当然 v_c を小さくとりうるから、第一項も小さくなる。

0.04~~05~~

0.02
0.02
0.0004

今 $\lambda_c = \dfrac{\lambda_0}{20}$ とすると、

$$N'' = \cancel{\frac{4}{3}\, 0.13\, N_0}\; N_0 \frac{v_c}{v_0}\left(0.13\left(\frac{v_c}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2\right)$$

$\lambda_0 = 10^{cm}$. $\lambda_c = 0.5^{cm}$

$h = 1^{mm}$

$$\frac{v_c}{v_0} = \frac{1}{105},\quad \frac{\lambda v_c}{v_0} = 1^{mm} = h.$$

$$N'' = N_0 \frac{1}{5\cancel{0}0}\left(0.0052 + \cancel{0.0004}\right)$$

$$= N_0 \cdot 10^{-4} \times 5$$

即ち 5×10^{-4} 位が ~~2千分の一~~ 二回以上の scattering をやることになる。

その energy は元の ~~分~~ 25 ぶの 1 以下である。

一回の scattering では之に下れないのは。

$$N_0\int_0^{v_c}\frac{2v\,dv}{\lambda_0 v_0^2}\,\frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0}}-e^{-\frac{h v_0}{\lambda_c v}}}{\frac{v_0}{\lambda_c v}-\frac{1}{\lambda_0}}$$

$$= N_0' - N_0\frac{h}{\lambda_0}\left(1-\frac{v_c^2}{v_0^2}\right)$$

$$= N_0\frac{h}{\lambda_0}\frac{v_c^2}{v_0^2}\left\{1-\frac{2}{3}\frac{v_c\lambda_c}{v_0\lambda_0}\right\}$$ 0.00032

$$-N_0\frac{4}{3}\frac{v_c^3}{v_0^3}\frac{\lambda_c}{\lambda_0}-N_0\frac{h^2}{\lambda_0^2}\frac{v_c}{v_0}$$ 0.0008 0.0004

$\frac{h}{\lambda_0}=0.02$

$\frac{\lambda_c}{\lambda_0}=0.1$

$\frac{v_c}{v_0}=0.2$

0.02 ~~0.04~~ 0.04

$$= N_0\{0.0008\,(1-\tfrac{2}{3}\cdot 0.0\cancel{1}3)$$

$$-\ 0.0011-0.00004\}$$

$$\frac{dw}{\lambda(v')\pi}N(v',\theta',\phi')\sin\theta' d\theta' d\phi'\cdot) \quad \cos\gamma.$$ ~~sin θ, sin φ, sin~~

$$\boxed{\frac{N(v',\theta',\phi')dw'\cdot\cos\gamma\ dw}{\lambda(v')\cdot\pi}}$$

2 $\sin\gamma\cdot d\gamma d\phi$

2回の衝突

1回の衝突で scatter されて x なる depth の unit area を unit time に cross する neutron で 方向が (θ', ϕ') 附近の $d\omega'$ なる solid angle 中にあるものを

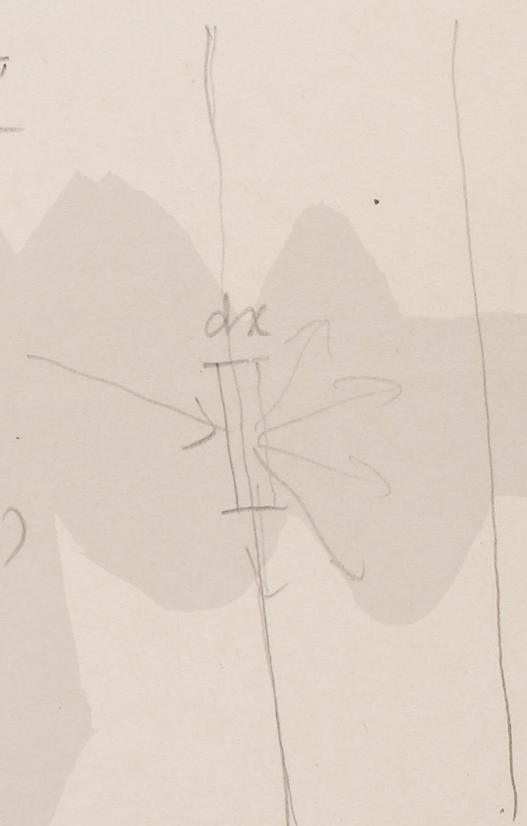
$$N(x, \theta', \phi')\, d\omega'$$

$$\left(\cos\theta' = \frac{v'}{v_0} \qquad d\omega' = \frac{dv'\, d\phi'}{v_0} \right)$$

とすると、これらの計算により

$$N(x, \theta', \phi')\, d\omega' = \frac{N(x, v', \phi')\, dv'\, d\phi'}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{N_0 v'\, dv'\, d\phi'}{\lambda_0 v_0^2} \cdot \frac{e^{-\frac{x}{\lambda_0}} - e^{-\frac{v_0 x}{\lambda' v'}}}{\frac{v_0}{\lambda' v'} - \frac{1}{\lambda_0}}$$

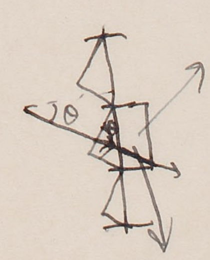


これが又 dx の内で scatter されて (θ, ϕ) の附近の $d\omega$ なる solid angle に出る prob は (unit time に出て行く数)

$$\boxed{\frac{N(x, \theta', \phi')\, d\omega' \cdot \cos\gamma \cdot d\omega}{\lambda(v') \cdot \pi} \cdot dx}$$

この中 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ のものは ~~plate を出る~~ transmit するもので、$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ は reflect されるものである。

出る為には又 $\frac{h-x}{\cos\theta}$ なる path の途中で scatter されるから、出る数は



$$\frac{d\omega'}{\lambda(v')\pi} \cos\gamma\, d\omega\, N(x, \theta', \phi)\, e^{-\frac{h-x}{\lambda \cos\theta}}\, dx$$

である。

但し、$\frac{v}{v_0'} = \cos\gamma = \cos\theta' \cos\theta + \sin\theta' \sin\theta \cos(\phi' - \phi)$,

$v = \cancel{\cos\theta}\ \frac{v'}{v_0} \cos\gamma, = \cos\theta' \cos\gamma.$

$$\sin(\phi-\phi') = \sqrt{1-\left(\frac{\frac{v}{v'}-\frac{v'}{v_0}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{v_0^2}}\sin\theta}\right)^2}$$

$$\frac{\partial\phi'}{\partial v} = \frac{1}{v'}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v'^2}{v_0^2}\right)\sin^2\theta-\left(\frac{v}{v'}-\frac{v'}{v_0}\cos\theta\right)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{v}{v'}\,\cancel{\cos\theta} +$$

$|\cos(\phi-\phi')|^2 \leq 1$ でなければならぬ.

$$\left(1-\frac{v'^2}{v_0^2}\right)\sin^2\theta-\left(\frac{v}{v'}-\frac{v'}{v_0}\cos\theta\right)^2 = \sin^2\theta-\frac{v'^2}{v_0^2}-\frac{v^2}{v'^2}+\frac{2v}{v_0}\cos\theta \geq 0.$$

or $v'^4 = \qquad \leq 0$

$$-\left(\frac{v'}{v_0}-\frac{v\cos\theta+\frac{v_0}{2}\sin^2\theta}{v'}\right)^2+\frac{v^2}{v'^2}\left\{\left(\cos\theta+\frac{v_0}{v}\sin^2\theta\right)^2-1\right\} \geq 0.$$

$$\left|\cos\theta+\frac{v_0}{v}\sin^2\theta\right| \geq 1.$$

$\cancel{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}$.

$$-\cos^2\theta+\frac{2v}{v_0}\cos\theta+\left(1-\frac{v'^2}{v_0^2}-\frac{v^2}{v'^2}\right) \geq 0$$

$$-\left(\cos\theta-\frac{v}{v_0}\right)^2+\left(1-\frac{v'^2}{v_0^2}-\frac{v^2}{v'^2}+\frac{v^2}{v_0^2}\right) \geq 0$$

$$-\left(\cos\theta-\frac{v}{v_0}\right)^2+\left(1-\frac{v'^2}{v_0^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{v'^2}\right) \geq 0.$$

$$\left|\cos\theta-\frac{v}{v_0}\right| \leq \sqrt{\left(1-\frac{v'^2}{v_0^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{v'^2}\right)}$$

$\cos\theta > \frac{v}{v_0}$ なら $\frac{v}{v_0} \leq \cos\theta \leq \frac{v}{v_0}+\sqrt{}$

そこで x について 0から h 迄 積分すると、

$$\frac{\cos\gamma\, \cancel{d\omega}\, d\omega}{\lambda(v')\,\pi}\,\frac{N_0 v' dv' d\phi'}{\pi\lambda_0 v_0^2}\,\frac{1}{\frac{v_0}{\lambda' v'}-\frac{1}{\lambda_0}}\left\{\int_0^h e^{-\frac{h}{\lambda\cos\theta}+\left(\frac{1}{\lambda\cos\theta}-\frac{1}{\lambda_0}\right)x}dx\right.$$

$$\left.-\int_0^h e^{-\frac{h}{\lambda\cos\theta}+\left(\frac{1}{\lambda\cos\theta}-\frac{v_0}{\lambda' v'}\right)x}dx\right\}$$

$$=\frac{\cos\gamma\, d\omega}{\lambda(v')\,\pi}\cdot\frac{N_0 v' dv' d\phi'}{\pi\lambda_0 v_0^2}\,\frac{e^{-\frac{h}{\lambda\cos\theta}}}{\frac{v_0}{\lambda' v'}-\frac{1}{\lambda_0}}\left\{\frac{e^{\left(\frac{1}{\lambda\cos\theta}-\frac{1}{\lambda_0}\right)h}-1}{\frac{1}{\lambda\cos\theta}-\frac{1}{\lambda_0}}\right.$$

$$\left.-\frac{e^{\left(\frac{1}{\lambda\cos\theta}-\frac{v_0}{\lambda' v'}\right)h}-1}{\frac{1}{\lambda\cos\theta}-\frac{v_0}{\lambda' v'}}\right\}$$

$$=\frac{N_0 \cancel{d\omega} \cos\gamma\, d\omega\, v' dv' d\phi'}{\pi^2 \lambda' \lambda_0\, \cancel{\cos\theta}\, v_0^2}\,\frac{1}{\frac{v_0}{\lambda' v'}-\frac{1}{\lambda_0}}\left\{\frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0}}-e^{-\frac{h}{\lambda\cos\theta}}}{\frac{1}{\lambda\cos\theta}-\frac{1}{\lambda_0}}\right.$$

$$\left.-\frac{e^{-\frac{v_0 h}{\lambda' v'}}-e^{-\frac{h}{\lambda\cos\theta}}}{\frac{1}{\lambda\cos\theta}-\frac{v_0}{\lambda' v'}}\right\}$$

積分のvariableを $(v', \phi', \theta, \phi)$ から (v', v, θ, ϕ) にかへると、

$$dv' d\phi'\, d\omega = \cancel{\alpha}\, \frac{\partial\phi'}{\partial v}\, dv' d\phi\, v\, d\theta$$

然るに

$$\cos(\phi - \phi') = \frac{\frac{v}{v_0\cos\theta'}-\cos\theta'\cos\theta}{\sin\theta'\sin\theta} = \frac{\frac{v}{v'}-\frac{v'}{v_0}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{v_0^2}}\,\sin\theta}$$

$$\sin(\phi-\phi')\frac{\partial\phi'}{\partial v} = \frac{\frac{1}{v'}}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{v_0^2}}\,\sin\theta}$$

$\cancel{\cos\theta}$ or $\frac{v}{v_0} \geq \cos\theta \geq \frac{v}{v_0} - \sqrt{\;''\;}$

$$\frac{v}{v_0} + \sqrt{} \geq \cos\theta \geq \frac{v}{v_0} - \sqrt{\cdots}$$

$$\frac{N_0\, v\, dv'\, dv}{v_0^2\, \pi^2 \lambda' \lambda_0}\, dw \cdot \frac{1}{\frac{v_0}{\lambda' v'} - \frac{1}{\lambda_0}} \left\{ \;'' - ''\; \right\}$$

$$\times \frac{1}{v'} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v'^2}{v_0^2}\right)\sin^2\theta - \left(\frac{v}{v'} - \frac{v'}{v_0}\cos\theta\right)^2}}$$

$$/\!/ \quad \left(1-\frac{v'^2}{v_0^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{v'^2}\right) - \left(\cos\theta - \frac{v}{v_0}\right)^2$$

$d\varphi$についての積分をすると、2πがかかる。

θについての積分は $y=\cos\theta$ について、

$$\left(\frac{v}{v_0} - \sqrt{\left(1-\frac{v'^2}{v_0^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{v'^2}\right)},\ \frac{v}{v_0} + \sqrt{\;''\;}\right)$$

の範囲でやる。

この積分は非常に複雑である。

そこで $\cos\theta$ のあまり小さくない所、即ち θ が $\frac{\pi}{2}$ にあまり近くなく

従って、$\frac{h}{\lambda\cos\theta} \ll 1$ で、

$$e^{-\frac{h}{\lambda\cos\theta}} = 1 - \frac{h}{\lambda\cos\theta} + \frac{h^2}{2\lambda^2\cos^2\theta}$$

となり、3乗以上の項を neglect すると

$$\frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0}} - e^{-\frac{h}{\lambda\cos\theta}}}{\frac{1}{\lambda\cos\theta} - \frac{1}{\lambda_0}}$$

$\frac{a}{y^2}$ $y = e^{-\frac{a}{\log x}}$ $\frac{a^2 - \left(\frac{1}{x} - b\right)^2}{x^2} = \frac{}{(x-a)+\cdots}$