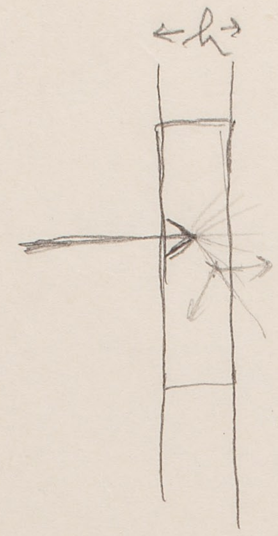
E22 190 P06

ⓔ



1. $\cos\gamma_1 = \dfrac{v_1}{v_0} = \cos\theta_1$

2. $\cos\gamma_2 = \dfrac{v_2}{v_1} = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2)$

- - - - -

n. $\cos\gamma_n = \dfrac{v_n}{v_{n-1}} = \cos\theta_{n-1}\cos\theta_n + \sin\theta_{n-1}\sin\theta_n\cos(\phi_{n-1}-\phi_n)$

① h の内で $(\gamma_1, \gamma_1+d\gamma_1)$ の範囲にある prob. は

$$\boxed{\int_0^h e^{-\frac{z}{\lambda_0}}\frac{dz}{\lambda_0}\, 2\sin\gamma_1\cos\gamma_1\, d\gamma_1}$$

$$= \left(1-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}\right) 2\sin\gamma_1\cos\gamma_1\, d\gamma_1 = \left(1-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}\right)\frac{2v_1 dv_1}{v_0^2}$$

この中で外へ出る prob. は.

$$\int_0^h e^{-\frac{z}{\lambda_0}}\frac{dz}{\lambda_0}\, 2\sin\gamma_1\cos\gamma_1 d\gamma_1 \cdot e^{-\frac{h-z}{\lambda_1\cos\gamma_1}}$$

$$= e^{-\frac{h}{\lambda_1\cos\gamma_1}}\frac{2v_1dv_1}{v_0^2}\frac{1}{\lambda_0}\frac{e^{\frac{h}{\lambda_1\cos\gamma_1}-\frac{h}{\lambda_0}}-1}{\frac{1}{\lambda_1\cos\gamma_1}-\frac{1}{\lambda_0}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0}}-e^{-\frac{h}{\lambda_1\cos\gamma_1}}}{\frac{h}{\lambda_1\cos\gamma_1}-\frac{h}{\lambda_0}}\cdot\frac{h}{\lambda_0}\,\frac{2v_1dv_1}{v_0^2}$$

$$= D(h, \lambda_1, \gamma_1)\frac{2v_1dv_1}{v_0^2}$$

② 次に $(z, z+dz)$ で $(\gamma_1, \gamma_1+d\gamma_1)$ の scattering をやったものの中で更に第二回の scattering をやるものは

$$e^{-\frac{z}{\lambda_0}}\frac{dz}{\lambda_0}\ 2\sin\gamma_1\cos\gamma_1\, d\gamma_1 \times \left(1-e^{-\frac{h-z}{\lambda_1\cos\gamma_1}}\right)$$

このうちで更に (γ_2 から $\gamma_2+d\gamma_2$) scattering をやるものは

$$\times\ 2\sin\gamma_2\cos\gamma_2\, d\gamma_2$$

である。

$$= e^{-\frac{z}{\lambda_0}}\frac{dz}{\lambda_0}\cdot\frac{2v_1\,dv_1}{v_0^2}\cdot\left(1-e^{-\frac{(h-z)v_0}{\lambda_1 v_1}}\right)\cdot\frac{2v_2\,dv_2}{v_1^2}$$

この中どれだけが transmit し、どれだけが reflect されるかが問題である。 γ_1, γ_2 をきめても（即ち v_1, v_2 をきめる）

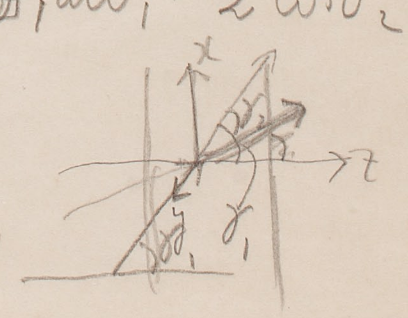
$$\cos\gamma_1 = \cos\theta_1$$
$$\cos\gamma_2 = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2)$$

なる関係により、θ_2, ϕ_1, ϕ_2 の中二つは ~~arbit~~ 或る範囲内で自由にとれる。その中 $0 \le \theta_1 \le \frac{\pi}{2}$ のものは transmit され、$\frac{\pi}{2} \le \theta_1 \le \pi$ のものは reflect される。

詳しくかけると、 $d\omega_1 = \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\phi_1$, $d\omega_2 = \sin\theta_2\, d\theta_2\, d\phi_2$

の間に scatter されるものは

$$e^{-\frac{z}{\lambda_0}}\frac{dz}{\lambda_0}\left(1-e^{-\frac{(h-z)v_0}{\lambda_1 v_1}}\right) 2\cos\gamma_1\, d\omega_1\cdot 2\cos\gamma_2\, d\omega_2$$



~~variable を $(\theta_1\ \phi_1\ \theta_2$~~

~~この中~~ $(\gamma_2\ \chi_2)$ なる方向と z-axis の間の angle を α_2 とおく

$\cos\alpha_2 = \cos\gamma_1\cos\gamma_2 + \sin\gamma_1\sin\gamma_2\cos\chi_2$

ただし $1 \geq \cos\alpha_2 \geq 0$ なるものだけが transmit される

従って. $-\frac{\cos\gamma_1\cos\gamma_2}{\sin\gamma_1\sin\gamma_2} \leqq \cos\chi_2 \leqq 1$

$-\cot\gamma_1\cot\gamma_2 \leq \cos\chi_2 \leq 1$, $z+dz)$

~~α_2 は angle のもの は $(z', z'+dz')$ の間で ... ものが~~

$$e^{-\frac{z}{\lambda_0}}\frac{dz}{\lambda_0}\cdot 2\cos\gamma_1\,d\omega_1, \cancel{2\cos\gamma_2\,d\omega_2}$$

この中. z' と $(z', z'+dz')$ の間で scatter されて $d\omega_2$ に行くものは

$$\frac{dz}{\lambda_0}2\cos\gamma_1\,d\omega_1\,e^{-\frac{z}{\lambda_0}}\,e^{-\frac{z'-z}{\lambda_1\cos\alpha_1}}\,\frac{dz'}{\lambda_1\cos\alpha_1}\,2\cos\gamma_2\,d\omega_2\cdot e^{-\frac{h-z'}{\lambda_2\cos\alpha_2}}$$

従って 全体として

$$\int_{z=0}^{h}\int_{z'=z}^{h} e^{\left(\frac{1}{\lambda_1\cos\alpha_1}-\frac{1}{\lambda_0}\right)z}\, e^{\left(\frac{1}{\lambda_1\cos\alpha_1}-\frac{1}{\lambda_1\cos\alpha_2}\right)z'}\, e^{-\frac{h}{\lambda_1\cos\alpha_2}}\,dz\,dz'$$

$$\times\frac{2\cos\gamma_1\,d\omega_1}{\lambda_0}\cdot\frac{2\cos\gamma_2\,d\omega_2}{\lambda_1\cos\alpha_1} =$$

$$= \int_0^h e^{\left(\frac{1}{\lambda_1\cos\alpha_2}-\frac{1}{\lambda_0}\right)z}\left(e^{-\frac{z}{\lambda_1\cos\alpha_2}} - e^{-\frac{h}{\lambda_1\cos\alpha_2}}\right)dz$$

$$\times\frac{2\cos\gamma_1\,d\omega_1}{\lambda_0}\cdot 2\cos\gamma_2\,d\omega_2$$

$$= 2\cos\gamma_1\,d\omega_1\cdot 2\cos\gamma_2\,d\omega_2\left(1 - e^{-\frac{h}{\lambda_0}} - \frac{e^{-\frac{h}{\lambda_1\cos\alpha_2}}}{\frac{\lambda_0}{\lambda_1\cos\alpha_2}-1}\left(e^{(\cdots)h}-1\right)\right)$$

$$= 2\cos\gamma_1\,d\omega_1\,2\cos\gamma_2\,d\omega_2\left(1 - e^{-\frac{h}{\lambda_0}} - \frac{1}{\frac{\lambda_0}{\lambda_1\cos\alpha_2}-1}\left(e^{-\frac{h}{\lambda_0}} - e^{-\frac{h}{\lambda_1\cos\alpha_2}}\right)\right)$$

次に ~~χ_2~~ ~~γ_1, γ_2~~, $\chi_1\ \chi_2$ について積分する

χ_1, χ_2 について積分すると、

$$2\cos\gamma_1 \sin\gamma_1 d\gamma_1 \cdot 2\pi \int 2\cos\gamma_2 \sin\gamma_2 d\gamma_2$$

$$\times \int_{-|\arccos(\cot\gamma_1 \cot\gamma_2)|}^{|\arccos(\cot\gamma_1\cot\gamma_2)|} d\chi_2 \left\{1 - e^{-\frac{h}{\lambda_0}} - \frac{1}{\frac{\lambda_0}{\lambda_1 \cos\alpha_2} - 1}\left(e^{-\frac{h}{\lambda_0}} - e^{-\frac{h}{\lambda_1\cos\alpha_2}}\right)\right\}$$

この積分は複雑である.

~~v_2が相当大きければ.~~ $\cos\gamma_1$ ~~は大して小さくなく.~~

之を

$$f\left(h, \lambda_1, \lambda_2, \cancel{\frac{v_1}{v_0}}, \cancel{\frac{v_2}{v_1}}\right) \quad v_1, v_2)$$

とおくと,

$$\cos\gamma_1 = \frac{v_1}{v_0} \qquad \cos\gamma_2 = \frac{v_2}{v_1}$$

故に更に v_1 について, v_2 から v_0 まで積分すると

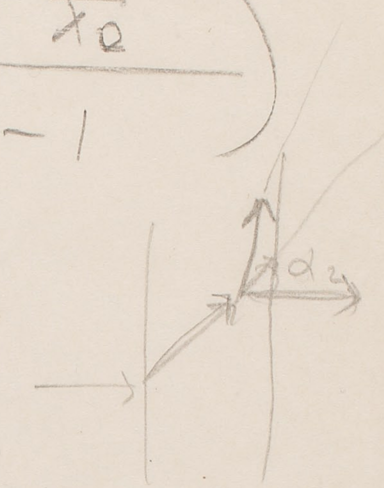
$$\int_{v_1=v_2}^{v_0} \frac{4\pi v_2 dv_2}{v_1^2} \cdot \frac{2 v_1 dv_1}{v_0^2} f(h, v_1, v_2)$$

$$= \frac{8\pi v_2 dv_2}{v_0^2} \int_{v_2}^{v_0} \frac{dv_1}{v_1} f(h, v_1, v_2)$$

h が 0 に等しい limit においては [illegible]

$\cancel{1 - e^{-\frac{h}{\lambda_0}}}$ $\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2$

$$\int dx_2 \left(\cancel{1 - \frac{h}{\lambda_0}} \frac{h}{\lambda_0} + \frac{\frac{h}{\lambda_1 \cos\alpha_2} - \frac{h}{\lambda_0}}{\frac{\lambda_0}{\lambda_1 \cos\alpha_2} - 1} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{h}{\lambda_1 \cos\alpha_2}\right)^2 - \left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2}{\frac{\lambda_0}{\lambda_1 \cos\alpha_2} - 1} \right)$$



$$= \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 \cdot \int \frac{\lambda_0}{\lambda_1 \cos\alpha_2} \, dx_2$$

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\cos(\gamma_1 - \gamma_2)\cos(\gamma_1 + \gamma_2)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{h^2}{\lambda_0 \lambda_1} \int \frac{d x_2}{\cos\alpha_2}$$

$a = \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$

$b = \sin\gamma_1 \sin\gamma_2$

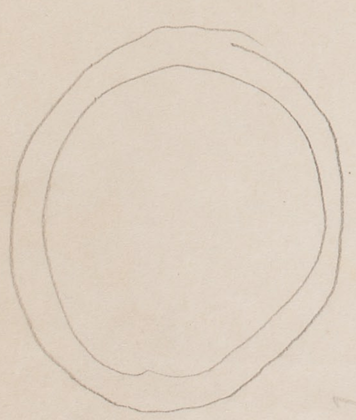
$-1 \arccos(\cot\gamma_1 \cot\gamma_2)$

$$\frac{\cos(\gamma_1 - \gamma_2)}{\cos(\gamma_1 + \gamma_2)} \gtrless 0$$

$$\int \frac{d x_2}{a + b\cos x_2} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\cos(\gamma_1 - \gamma_2)\cos(\gamma_1 + \gamma_2)}}{\cos(\gamma_1 - \gamma_2)} \tan\frac{x_2}{2} \right)$$

for $\frac{\cos(\gamma_1 - \gamma_2)}{\cos(\gamma_1 + \gamma_2)} > 0$

$$= \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log\left(\frac{a + b + \sqrt{b^2 - a^2}\tan\frac{x_2}{2}}{a + b - \sqrt{b^2 - a^2}\tan\frac{x_2}{2}} \right)$$



$\cancel{\tan \arccos x = y}$ $\quad \frac{1}{i} \frac{e^{\frac{i \arccos x}{2}} - e^{-\frac{i \arccos x}{2}}}{e^{\frac{i \arccos x}{2}} + e^{-\frac{i \arccos x}{2}}}$

$\cancel{\arccos x = \arctan y}$

$\cancel{x = \cos \arctan y}$

$= \frac{1}{i}$

$= \cos$

$\arccos x = y$

$x = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$ $\quad y =$

$$\frac{2h^2}{\lambda_0\lambda_1}\,\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,\tan\frac{\chi_2}{2}}{a+b}\right) \qquad \frac{a+b}{a-b}>0$$

or $$\frac{2h^2}{\lambda_0\lambda_1}\,\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\left(\frac{a+b+\sqrt{b^2-a^2}\,\tan\frac{\chi_2}{2}}{a+b-\sqrt{b^2-a^2}\,\tan\frac{\chi_2}{2}}\right) \qquad \frac{a+b}{a-b}<0$$

$$\chi_2 = \arccos(\cot\gamma_1\cos\gamma_2)$$

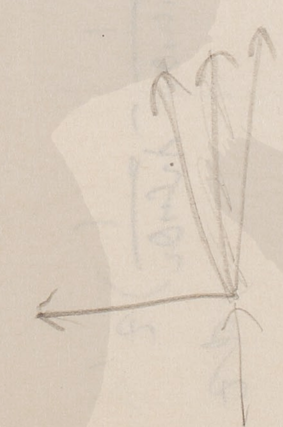
$$\left.\begin{aligned} a &= \cos\gamma_1\cos\gamma_2 \\ b &= \sin\gamma_1\sin\gamma_2 \end{aligned}\right)$$

$$\frac{8\pi\, v_2\, dv_2}{v_2^2}\int_{v_2}^{v_0}\frac{dv_1}{v_1}\times$$

$$\int_0^h e^{\left(\frac{1}{\lambda_1\cos\theta_1}-\frac{1}{\lambda_0}\right)z}dz\; e^{-\frac{h}{\lambda_2\cos\theta_2}}\int_z^h e^{-\left(\frac{1}{\lambda_1\cos\theta_1}-\frac{1}{\lambda_2\cos\theta_2}\right)z'}dz'$$

$$=\int_0^h e^{\left(\frac{1}{\lambda_1\cos\theta_1}-\frac{1}{\lambda_0}\right)z}dz\;\frac{e^{-\frac{h}{\lambda_2\cos\theta_2}}\,e^{-\left(\frac{1}{\lambda_1\cos\theta_1}-\frac{1}{\lambda_2\cos\theta_2}\right)z}-e^{-\frac{h}{\lambda_1\cos\theta_1}}}{\frac{1}{\lambda_1\cos\theta_1}-\frac{1}{\lambda_2\cos\theta_2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\lambda_1\cos\theta_1}-\frac{1}{\lambda_2\cos\theta_2}}\left[e^{-\frac{h}{\lambda_2\cos\theta_2}}\int_0^h e^{\left(\frac{1}{\lambda_2\cos\theta_2}-\frac{1}{\lambda_0}\right)z}dz - e^{-\frac{h}{\lambda_1\cos\theta_1}}\int_0^h e^{\left(\frac{1}{\lambda_1\cos\theta_1}-\frac{1}{\lambda_0}\right)z}dz\right]$$



$$= \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1\cos\theta_1} - \frac{1}{\lambda_2\cos\theta_2}} \left[\frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0}} - e^{-\frac{h}{\lambda_2\cos\theta_2}}}{\frac{1}{\lambda_2\cos\theta_2} - \frac{1}{\lambda_0}} - \frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0}} - e^{-\frac{h}{\lambda_1\cos\theta_1}}}{\frac{1}{\lambda_1\cos\theta_1} - \frac{1}{\lambda_0}} \right]$$

$$\times \frac{2\cos\gamma_1 d\omega_1}{\pi\lambda_0} \frac{2\cos\gamma_2 d\omega_2}{\pi\lambda_1\cos\theta_1}$$

$$\gamma_1 = \theta_1$$

$$\cos\theta_2 = \cos\gamma_1\cos\gamma_2 + \sin\gamma_1\sin\gamma_2\cos\chi_2$$

これは $v_1, \chi_1, \Phi_1, \chi_2$ についての積分が残つてゐる。

然るに $\lambda_0, \lambda_1\cos\theta_1, \lambda_2\cos\theta_2 \gg h$ と見なすと、

上式は
$$\frac{h}{\frac{1}{\lambda_1\cos\theta_1} - \frac{1}{\lambda_2\cos\theta_2}} \Big[1 - \frac{1}{2}\frac{h}{\lambda_2\cos\theta_2} - \frac{1}{2}\frac{h}{\lambda_0} - 1 + \frac{1}{2}\frac{h}{\lambda_1\cos\theta_1} + \frac{1}{2}\frac{h}{\lambda_0} \Big] = \frac{h^2}{2}$$

∴ prob. は $\cancel{\frac{2\cos\gamma_1 d\omega_1}{\lambda_0}}$

$$\frac{h^2}{2\pi^2\lambda_0\lambda_1} d\omega_1 \cos\gamma_2 d\omega_2 = \frac{h^2}{\lambda_0\lambda_1} \frac{v_1 dv_1 d\chi_1}{2\pi v_0^2} \frac{v_2 dv_2 d\chi_2}{2\pi v_1^2}$$

となる。

然るに $\cos\theta_2 = \cos\gamma_1\cos\gamma_2 + \sin\gamma_1\sin\gamma_2\cos\chi_2 \geq 0.$

故に χ_2 は $\cos\chi_2 \geq -\frac{\cos\gamma_1\cos\gamma_2}{\sin\gamma_1\sin\gamma_2}$ or -1

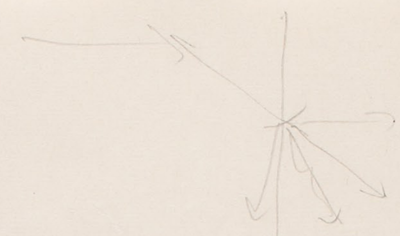
即ち、 $-|\arccos(-\cot\gamma_1\cot\gamma_2)| \leq \chi_2 \leq +|\ \ |$ ($\alpha-\pi$, $\alpha+\pi$)

の間でなければならぬ。

故に χ_2 について積分すると、

$$2\left|\arccos(-\cot\gamma_1\cot\gamma_2)\right|$$

or 2π



今. γ_1,γ_2 が共に $\frac{\pi}{4}$ よりも小さいとすると $\cot\gamma_1\cot\gamma_2 > 1$

χ_2 の範囲は 2π になる。この時には、

$\frac{v_2}{v_0} = \cot\gamma_1\cot\gamma_2 \cancel{\quad} > \frac{1}{2}$ (蓋然的には $\frac{\frac{v_2}{v_0}}{\sqrt{1-(\frac{v_2}{v_0})^2}}\cdot\frac{\frac{v_2}{v_1}}{\sqrt{1-(\frac{v_2}{v_1})^2}} >$ 実1

即ち元の velocity の半分よりも大きいものは reflect されない。

この時には、χ_1,χ_2 について積分すると

$$\frac{h^2}{\lambda_0\lambda_1}\frac{2v_2dv_2}{v_0}\cdot\frac{dv_1}{v_1^2}$$

次に v_1 について、v_2 から v_0 まで積分すると、

$$\frac{h^2}{\lambda_0\lambda_1}\frac{2v_2dv_2}{v_0}\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_0}\right)$$

$$=\frac{h^2}{\lambda_0\lambda_1}\frac{2dv_2}{v_0^2}(v_0-v_2) \quad \text{for } v_2>\frac{v_0}{2}$$

蓋然的には、v_1 の如何にかかわらず。 $>v_2$

$\frac{v_2}{v_0} > \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{\frac{v_2}{v_0}}{\sqrt{1-(\frac{v_1}{v_0})^2}\sqrt{1-(\frac{v_2}{v_1})^2}} >$ 実1 $\qquad \frac{\frac{v_2}{v_0}}{1-\frac{v_2}{v_0}} >$ 実1

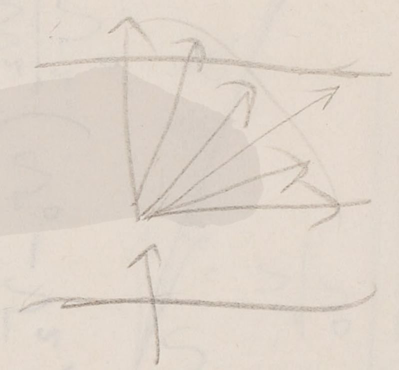
$\therefore$ $\cancel{\frac{\frac{v_2}{v_0}}{1-(\frac{v_2}{v_0})^2} > \frac{1}{2}}$ $\qquad (\frac{v_2}{v_0})^2+2\frac{v_2}{v_0}-1>0.$

$\frac{\partial}{\partial v_1}\left\{\left(1-(\frac{v_1}{v_0})^2\right)\left(1-(\frac{v_2}{v_1})^2\right)\right\}$ $\qquad \cancel{\left\{(\frac{v_2}{v_0})+\frac{1}{2}\right\}^2 \gtrless 2}$

$\frac{v_2}{v_0}+1>\sqrt{2}$. $\qquad \frac{v_2}{v_0}>\sqrt{2}-1$

$= -\frac{2v_1}{v_0^2}\left(1-(\frac{v_2}{v_1})^2\right)+\frac{2v_2^2}{v_1^3}\left(1-(\frac{v_1}{v_0})^2\right) = \frac{2v_2^2}{v_0^2 v_1}-\frac{2v_1}{v_0^2}+\frac{2v_2^2}{v_0^2 v_1}-\frac{2v_2}{v_0^2}$

$\therefore \frac{v_2^2}{v_1^3}=\frac{v_1}{v_0^2} \qquad v_1^2=v_0v_2.$



energy distributionについて，

$$\frac{h^2}{\lambda_0\lambda_1}\frac{dE_2}{E_0\sqrt{2mE_2}}\left(\sqrt{2mE_0}-\sqrt{2mE_2}\right)$$

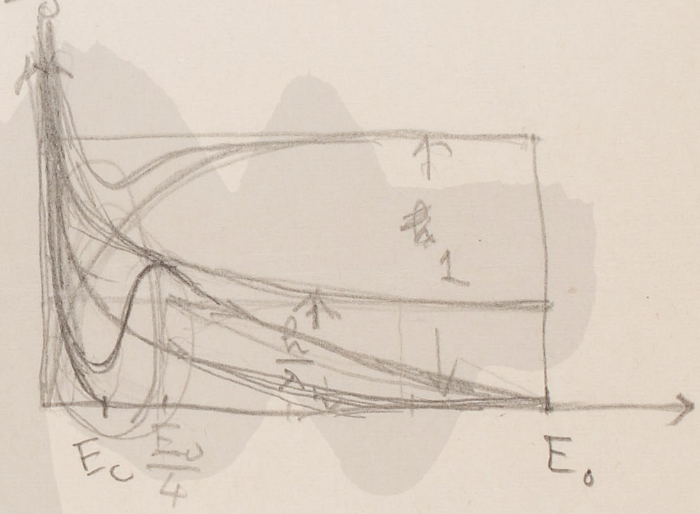
$$mv_2dv_2 = dE_2$$

$$dv_2 = \frac{dE_2}{\sqrt{2mE_2}}$$

$$= \frac{h^2}{\lambda_0\lambda_1}\frac{dE_2}{E_0}\left\{\left(\frac{E_0}{E_2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right\}$$

for $E_2 > \frac{E_0}{4}$, 　$\lambda_0, \frac{\lambda_1}{2} \gg h$.

$$< \frac{h^2}{\lambda_0\lambda_1}\frac{dE_2}{E_0}$$



$$\frac{d}{dE_2}\left\{\left(\frac{E_0}{E_2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right\} = -\frac{1}{2}\frac{E_0^{\frac{1}{2}}}{E_2^{\frac{3}{2}}}$$

○次に方向分布 large angle collisionをとり，$\lambda_1\cos\theta_1 \ll h$ となっているとすると，$\lambda_1, \lambda_2 \ll \lambda_0$ とするなら，

$$\frac{1}{\frac{1}{\lambda_1\cos\theta_1}-\frac{1}{\lambda_2\cos\theta_2}}\left[\frac{1-e^{-\frac{h}{\lambda_2\cos\theta_2}}}{\frac{1}{\lambda_2\cos\theta_2}}-\frac{1}{\frac{1}{\lambda_1\cos\theta_1}}\right]$$

$$\times\frac{\cos\gamma_1 d\omega_1}{\pi\lambda_0}\frac{\cos\gamma_2 d\omega_2}{\pi\lambda_1\cos\theta_1} = \frac{1}{1-\frac{\lambda_1\cos\theta_1}{\lambda_2\cos\theta_2}}\left[\left(1-e^{-\frac{h}{\lambda_2\cos\theta_2}}\right)\lambda_2\cos\theta_2-\lambda_1\cos\theta_1\right]$$

$$\times\frac{\cos\gamma_1 d\omega_1\cos\gamma_2 d\omega_2}{\pi^2\lambda_0}$$

θ_1が $\frac{\pi}{2}$ に近いなら．θ_2の $\frac{\pi}{2}$ に近い所を ~~γ_2の0に近い所で，これ~~ ~~除かなければならない~~ neglectすると $\lambda_1\cos\theta_1 \ll \lambda_2\cos\theta_2$ と見なしうるから，

$$\cong\left(1-e^{-\frac{h}{\lambda_2\cos\theta_2}}\right)\lambda_2\cos\theta_2\,\frac{\cos\gamma_1 d\omega_1\cos\gamma_2 d\omega_2}{\pi^2\lambda_0}$$

χ_1 について $(0, 2\pi)$　χ_2 について $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ の間で積分すると、

$$\frac{h}{\lambda_0} \quad \frac{2\nu_1 d\nu_1}{\nu_0^2} \, \frac{\nu_2 d\nu_2}{\nu_1^2}$$

ν_1 について、ν_2 から ν_c まで積分すると

$$\frac{h}{\lambda_0} \frac{2\nu_2 d\nu_2}{\nu_0^2} \log\left(\frac{\nu_c}{\nu_2}\right)$$

となる。

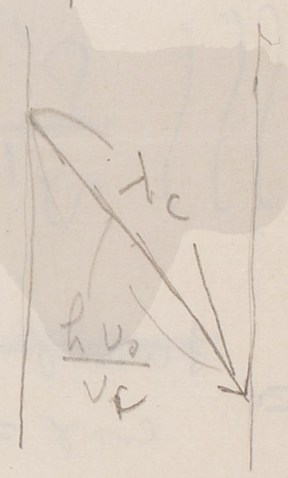
ν_c を estimate すれば、small.

$$h = \lambda_c \frac{\nu_c}{\nu_0} \quad \text{or} \quad \nu_c = \nu_0 \frac{h}{\lambda_c}$$

ととると、

$$\cong \frac{h}{\lambda_0} \frac{2\nu_2 d\nu_2}{\nu_0^2} \log\left(\frac{h\nu_0}{\lambda_c \nu_2}\right)$$

for $\nu_2 \ll \nu_c$



$$\begin{pmatrix} \cos\theta' \sin\gamma \pm \sin\theta' \cos\gamma \cos\chi & \sin\theta' \sin\gamma \sin\chi \\ -v' \sin\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

$$d\theta' dv' \, d\gamma \, d\chi$$

$$= v' \sin^2\gamma \, \sin\theta' \sin\chi \, d\theta' dv' d\gamma d\chi$$

$$\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} \quad \frac{\tan\gamma}{\sin\chi} = d\theta' dv' \sin\theta \, d\theta \, dv$$

$$\iiint \frac{\rho' dt \frac{\cos\gamma}{\cancel{\tan\gamma}} \, dv' d\theta' \sin\theta \, dv \, d\theta \, d\varphi}{v' \sin\chi \sin\gamma} \times \frac{v' dt}{\pi \lambda(v')}$$

$$\cos\gamma = \frac{v}{v'}$$

$$\sin\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v'}\right)^2}$$

$$\frac{v' dv'}{v} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v'}\right)^2}$$

$$\cos\chi = \frac{\cos\theta - \frac{v}{v'}\cos\theta'}{\sin\theta' \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v'}\right)^2}}$$

$$\sin\chi = \pm\sqrt{1 - \frac{(\cos\theta - \frac{v}{v'}\cos\theta')^2}{\sin^2\theta' \left(1 - \left(\frac{v}{v'}\right)^2\right)}}$$

for $\chi \gtrless 0$, $2\pi > \chi > \pi$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2\theta' \left(1 - \left(\frac{v}{v'}\right)^2\right) - \left(\cos\theta - \frac{v}{v'}\cos\theta'\right)^2}}{\sin\theta' \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v'}\right)^2}}$$