DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

理論物理学談話会

June 3, 1936.

DATE

NO. 1

水素核との衝突によつて遅められた中性子の速度分布の問題.

相対性理論や量子力学や核の問題は色々あるが、その中でこの前に菊池先生等のお話のあつた statistics の問題乃至、classical dynamics, ~~statis~~ kinetic theory 等の ~~法~~ 問題に最も近い中性子の速度分布の問題を論ずれば楽しいと思ふ。但し、それは今迄解かれてゐる極簡単な問題を述べて、次にもう少し一般的場合を述べ、皆さんにその解決法を考へて戴きたいと思ふ。小生自身は equation を立て、それだけでしばらくいぢくらんでみたが、簡単な解決法はないので一時中止してゐる~~問題~~です。

近頃高速度である (10^9 cm/sec) 中性子~~を~~色々な方法で作られた。例へば Radon とか Polonium の如き α-particle を出す物質と Be とを一緒にしておくと

$$^{9}_{4}Be + ^{4}_{2}He \rightarrow ^{12}_{6}C + ^{1}_{0}n$$

の如き反応によつて neutron が飛出す。

又は ~~deuteron を~~ 高速度の deuteron をふくんだ物質 例へば D_2O ~~の beam を当てて~~ にあてると、

$$^{2}_{1}D + ^{2}_{1}D \rightarrow ^{3}_{2}He + ^{1}_{0}n$$

なる反応で neutron が出る。

この neutron ~~とい~~ ~~ふもの~~ が物質を通過する際に原子核と衝突していろんな作用をおこす。その中で elastic scattering ~~をおこす。確率が一番大きい~~ はいつでも起つてゐる。この場合核の方が neutron よりずつと重ければ、neutron の velocity は大して変化しない。所が軽い proton を考へるとその質量は neutron と殆んど同じだから、neutron は一回の衝突で相当の energy を失ふ。為に衝突する内には非常に遅くなる。proton と同程度、即ち thermal energy 位の neutron が相当出来る。之が いろんな 物質に著しい作用をもつてゐる。

で slow neutron を作るには Paraffin 又は水の様な ~~fast~~ proton を 水素原子 含む物質 ~~中を~~ に当つて neutron beam を scatter させるのである。

で 中性子の 速さがどんな風におそくなるかについて理論的に論ずるために、

i) 先づ個々の neutron に目をつけて、それが何回も衝突する間に平均どんな風に遅くなつて行くか、その平均はどうであるか、確率の distribution はどうなつてゐるか。

ii) paraffin の block ~~又は水の block~~ 中の各点及び内外の空間における neutron の velocity の distrib はどうなつてゐるか。

の二つの問題に分けられる。前の方は極めて簡単である。

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 3

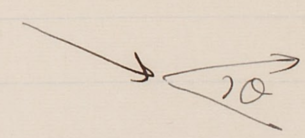
此の方程式は special な場合しか解かれてゐない。

(i)[†] 先づ一つの中性子が proton に n 個衝突した結果 energy, velocity はどう変るか。その prob. distrib. は如何といふ問題を取扱ふ。
それには single collision の時の分布を知る必要がある。現在の実験結果は曖昧であるが neutron と proton の relative motion を考へると全方向に uniform に scatter されると見てよいらしい。(之は両者の間に short range の ordinary force が働くとすれば成立する。

)

すると neutron が $(\theta, \theta + d\theta)$ の angle の deflection をする prob は

$$P(\theta)\,d\theta = 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$



何故。 $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{u}'$

$v^2 = v'^2 + u'^2$ $\quad (v+v')(v-v') = u'^2$

$(v+v')\cancel{u'} = u'^2$ $\quad (\mathfrak{v}+\mathfrak{v}'-\mathfrak{u}')\,\mathfrak{u}' = 0.$ $\quad \mathfrak{v}'\mathfrak{u}' = 0,$

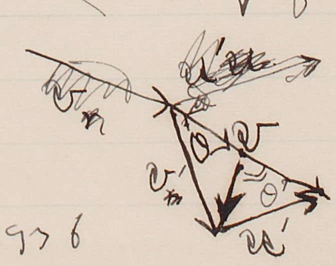
$v_r = \frac{v}{2}$ $\quad v_r' = v' - \frac{v}{2}.$

$v_r v_r' = \frac{vv'}{2} - \frac{v^2}{4}$ $\quad v_r v_r' = \frac{v}{2}\sqrt{\left(v'^2 + \frac{v^2}{4} - v'v\right)}$ $\cos\theta'$

$v_r v_r' \cos\theta' = \frac{vv'}{2}\cos\theta - \frac{v^2}{4}$ $\quad \cos\theta' = \frac{v'\cos\theta - \frac{v}{2}}{\sqrt{v'^2 + \frac{v^2}{4} - 2v'v\cos\theta}}$

ゆゑ $2\theta = \theta'.$

$$P(\theta)\,d\theta = \sin\theta'\,d\theta'$$
$$= 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta \quad)$$



† Condon and Breit, Phys. Rev. 49, 229, 1936
Goudsmit, ibid, 406, Wick, ibid, 192, Lampa, Naturw.

$x(\log x)^n = \int (\log x)^n + n(\log x)^{n-1}$

$x(\log x)^n$

$\frac{nx(\log x)^{n-1}}{x}$

$-nx(\log x)^{n-1}$

$n(n-1)x(\log x)^{n-2}$

$\int \arcsin x \, dx$

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\theta \sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta} = \frac{\frac{1}{4}\int \theta' \sin\theta' d\theta'}{\frac{1}{2}\int \sin\theta' d\theta'}$$

most prob. value は $\theta^* = \frac{\pi}{4}$, mean value $\overline{\theta} = \frac{\pi}{4}$.

次に energy の変化は

$$E_1 = E_0 \cos^2\theta$$

で、energy の prob. distribution は $dE_1 = 2E_0 \cdot \cos\theta \sin\theta \, d\theta$

$$P(E_1)\, dE_1 = P(\theta)\, d\theta = P(\theta) \frac{dE_1}{2E_0 \cos\theta \sin\theta} = \frac{dE_1}{E_0}$$

E_1^* : equally proble for all energy. $\overline{E_1} = \frac{E_0}{2}$

n 回衝突後の energy の prob. distribution は

$$P(E_n)\, dE_n = \frac{\{\log(E_0/E_n)\}^{n-1}}{(n-1)!} \frac{dE_n}{E_0}$$

である。

(∵ $n=1$ $P(E_1)dE_1 = \frac{dE_1}{E_0}$ である。

~~n から n+1 を出す~~ かくして $n+1$ 回目の衝突 $(E_{n+1}, E_{n+1}+dE_{n+1})$ に来る

prob. は $\int_{E_{n+1}}^{E_0} P(E_n)\, dE_n \cdot \frac{dE_{n+1}}{E_n} = \int_{E_{n+1}}^{E_0} \{\log(\frac{E_0}{E_n})\}^{n-1} \frac{dE_n}{(n-1)!\, E_n} \cdot \frac{dE_{n+1}}{E_0}$

$$= \frac{-1}{n!} \left[\{\log(\frac{E_0}{E_n})\}^n\right]_{E_{n+1}}^{E_0} \frac{dE_{n+1}}{E_0} = \frac{\{\log(\frac{E_0}{E_{n+1}})\}^n}{n!} \frac{dE_{n+1}}{E_0} \quad)$$

であるから

$$\cancel{E_n^* = 0} \quad \cancel{E_n} = \frac{\partial}{\partial E^*}(\log \frac{E_0}{E^*})^{n-1} \cancel{[illegible]} = 0$$

$\cancel{-(n-1)(\log \frac{E_0}{E^*})^{n-2} \frac{1}{E^*}}$

$E^* = 0$ $\quad \overline{E} = \frac{1}{(n-1)!}\int \{\log(\frac{E_0}{E_{n}})\}^{n-1} \frac{E_n}{E_0} dE_n$

$$= \frac{(-1)^{n-1} E_0}{2 \cdot 2^{n-1} (n-1)!} \int_0^1 (\log x)^{n-1} dx = \frac{E_0}{2^n} \frac{(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{E_0}{2^n}.$$

$x\{(\log x)^n + (\log x)^{n-1}\}$

$x(\log x)^{n-1}$)

m

$$E_n = E_0(1-\alpha x_1)(1-\alpha x_2)\cdots(1-\alpha x_n)$$

$$\alpha = \frac{4mM}{(m+M)^2}$$

$$\cos\varphi = 1-2\alpha$$

$$v_n'^2 = v^2\left(1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)\right)$$

$$= v^2\left\{\frac{m^2+M^2}{(m+M)^2} + \frac{2mM}{(m+M)^2}\cos\varphi\right\}$$

$$m\mathbf{v} = m\mathbf{v}' + M\mathbf{V} \qquad \mathbf{U} = \frac{m\mathbf{v}}{m+M},$$

$$mv^2 = mv'^2 + MV^2 \qquad (\mathbf{v}-\mathbf{U})(\mathbf{v}'-\mathbf{U})$$

$$m^2(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2 = M(v^2-v'^2) \qquad = \mathbf{v}\mathbf{v}'$$

$$\cancel{\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}'}{vv'}} =$$

$$\mathbf{v}\mathbf{v}' = (\mathbf{v}-\mathbf{U})(\mathbf{v}'-\mathbf{U}) \pm (\mathbf{v}-\mathbf{U})\mathbf{v}' \pm U^2$$

$$= \frac{Mv}{m+M}|\mathbf{v}'-\mathbf{U}|\cos\varphi - \frac{m}{m+M}\mathbf{v}\mathbf{v}' - \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 v^2$$

$$\cancel{m+M}\left(\mathbf{v}'-\mathbf{U} \pm \frac{M\mathbf{v}}{m+M}\right)^2 = M(v^2-v'^2)$$

$$\frac{m(\mathbf{v}'-\mathbf{U})^2}{m+M} + \frac{mM^2}{(m+M)^2}v^2 - \frac{mM(\mathbf{v}'-\mathbf{U})\mathbf{v}}{m+M} = Mv^2 - Mv'^2$$

$$+\frac{mM^2}{(m+M)^2}v^2 \pm \frac{2M|\mathbf{v}'-\mathbf{U}|v}{m+M}\cos\varphi = Mv^2 - Mv'^2$$

$$|\mathbf{v}'-\mathbf{U}| = kv$$

$$v^2\left(-\frac{m}{M}k^2 - \frac{mM}{(m+M)^2} + 1\right)v^2 \pm \frac{2Mk}{m+M}\cos\varphi\Big| = v'^2$$

$$k = \frac{M}{m+M}.$$

$$1 - \frac{m M^2}{(m+M)^2} - \frac{mM}{(m+M)^2} = \frac{(m+M)^2 - m^2M - mM}{(m+M)^2} = \frac{m^2+M^2}{(m+M)^2}.$$

$$\left(\mathbf{v}' - \frac{m\mathbf{v}}{m+M}\right)^2 = \frac{M^2v^2}{(m+M)^2} \Leftarrow v'^2 + \frac{m^2-M^2}{(m+M)^2}v^2 = \frac{2m(\mathbf{v}\mathbf{v}')}{m+M}$$

$$-2m\mathbf{v}\mathbf{v}' + mv^2 + mv'^2 = Mv^2 - Mv'^2 \rightarrow \frac{2m(\mathbf{v}\mathbf{v}')}{m+M} = v'^2 + \frac{m-M}{m+M}v^2$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........
NO. 5

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^E \left\{\log\left(\frac{E_0}{E_n}\right)\right\}^{n-1}\frac{dE_n}{E_0} \qquad \frac{E_n}{E_0}=x$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x \left(\log\frac{1}{x}\right)^{n-1}dx \quad \cancel{\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^x \log}$$

$\cancel{\log}$ $x=e^{-y}$ $\qquad dx=-e^{-y}dy$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_{\log\frac{1}{x}}^{\infty} y^{n-1}e^{-y}dy$$

Incomplete Gamma Function.

$$\overline{x^s}=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 x^s\left(\log\frac{1}{x}\right)^{n-1}dx=\int_0^\infty e^{-(s+1)y}\,y^{n-1}dy$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\Gamma(n)\Big/(s+1)^n=\frac{1}{(s+1)^n}$$

$$\overline{x}=2^{-n}.$$

$x = \frac{E_\alpha}{E_0}$

$1-\alpha x_i = e^{-u_i}$　　$u = \sum u_i$　　$x = e^{-u}$,

$dx_1 dx_2 \cdots dx_n = e^{-u} du_1 du_2 \cdots du_n$,

u が $(u, u+du)$ にある prob. は ~~x_1, x_2~~

$u_1, u_2, \cdots$ が $(0, a)$ の間の値を equally probable

$a = \log(1-\alpha)^{-1}$, n 個をとってそれらの和 $\sum u_i$ が

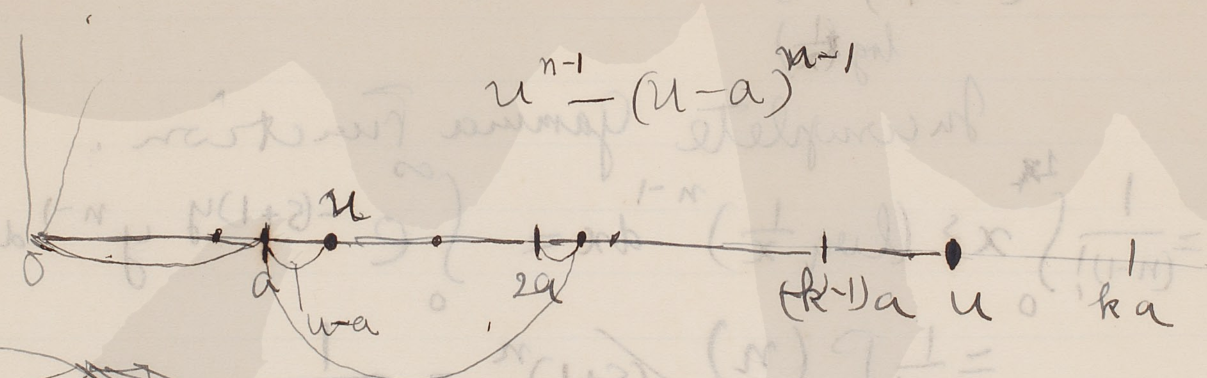
$(u, u+du)$ にある chance は e^{-u} を含まないものである。

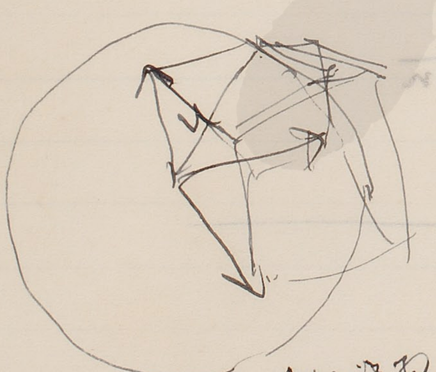
その結果は

$$f_n(u)du = \frac{1}{a^n(n-1)!}\left\{u^{n-1} - \binom{n}{1}(u-a)^{n-1} + \binom{n}{2}(u-2a)^{n-1} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\{u-(n-1)a\}^{n-1}\right\}$$

但し、$u<ka$ なる ~~…~~ k の時は 0 である。

$u^{n-1} - (u-a)^{n-1}$





1, 2, 3, ………… n

1k, 2 3 4 …… k

1, 2, 3, … k が皆出る場合　それぞれ少くとも

1が出ない数, $\mu^n - (\mu-1)^n$

1がない, 2がない数 $(\mu-1)^n - (\mu-2)^n$

1がない・2がない数

$\mu^n - k(\mu-1)^n + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}(\mu-2)^n + \cdots\cdots$

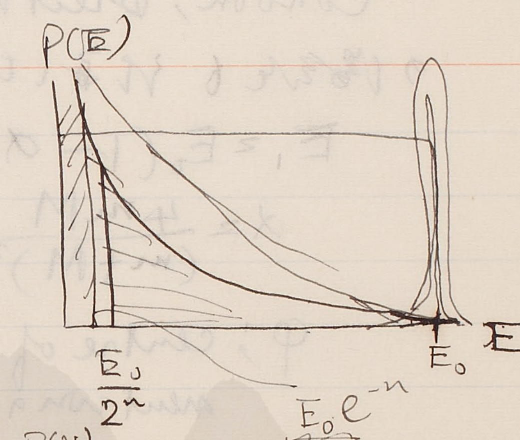
DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

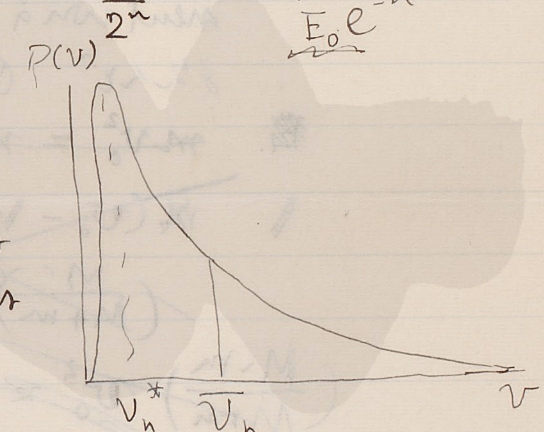
DATE
NO. 6

~~同様な結果を~~ 之を velocity distribution に直すと、

$$P(v_n)dv_n = \frac{2^n\{\log(\frac{v_0}{v_n})\}^{n-1}}{(n-1)!}\frac{v_n dv_n}{v_0^2}$$

$$v_n^* = v_0/e^{n-1} \qquad \bar{v}_n = v_0/(\tfrac{3}{2})^n$$

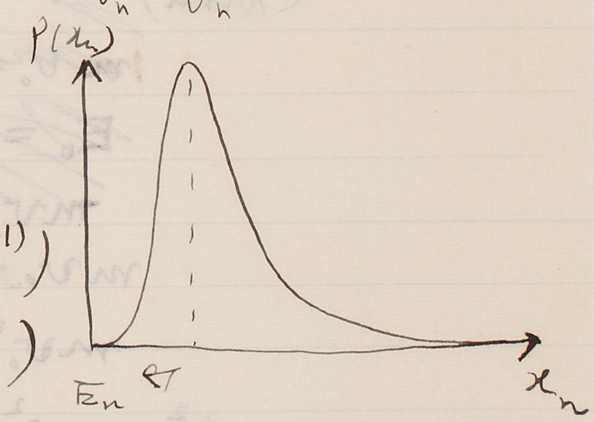




この場合にして n個の衝突後の ~~vel~~ energy は平均として元の 2^{-n} である。しかし most probable value は 0。vel. について v^* と $\bar{v}$ とは相当に違う。

そこで $x_n = \log\frac{E_0}{E_n}$ をとると。

$$P(x_n)dx_n = \frac{e^{-x_n}x_n^{n-1}}{(n-1)!}dx_n$$



$$x_n^* = n-1 \qquad (\text{or } E_n^* = E_0 e^{-(n-1)})$$
$$\bar{x}_n = n \qquad (\text{or } \bar{E}_n = E_0 e^{-n})$$

この場合は distribution が sharp で、且 mode と mean とが大体一致する

この意味に於て「n回の衝突によって energy は平均元の e^{-n} になる」といふこともできるが、2^{-n} になるといった方が穏当である。

$E_{20} \gtrsim \frac{E_0}{10^2} \quad E_{10} \gtrsim \frac{E_0}{100}$

† Condon, Breit は proton に対の nucleus との衝突の場合をも計算した。この時には

$E_1 \approx E_0(1-\alpha x) \qquad x = \sin^2\frac{\varphi}{2} \longrightarrow \alpha \doteqdot \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$\alpha = \frac{4mM}{(m+M)^2} \qquad \cos\varphi = 1-2x \qquad M = 12m, \quad E_1 \geq \frac{2E_0}{3}$

φ; centre of mass or rest にある system に関しての neutron の deflection の angle. m<<M ならば之は殆んど θ に等しい。

$\mathbb{V} = \frac{m v_0}{M+m}$

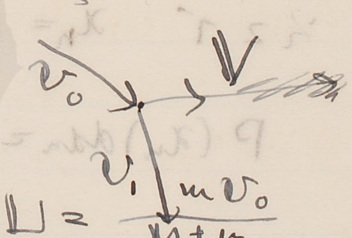
$\cancel{m v_0^2 = m v_1^2 + MV^2}$

$\cancel{m(v_0 - V)^2 = m(v_1 - V)^2 =}$

$\cancel{\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 v_0^2 = v_1^2 + \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 v_0^2 + \frac{2m v_1 v_0}{M+m}}$

$\left(\frac{M-m}{M+m}\right) v_0^2 = v_1^2 + \frac{2m}{M+m}$

$\cancel{E_0 = E_1 + E'}$



$\mathbb{U} = \frac{m v_0}{M+m}$

$m v_0 = m v_1 + MV$

$m v_0^2 = m v_1^2 + MV^2$

$\cos\varphi = \frac{(v_0 - \mathbb{U})(v_1 - \mathbb{U})}{|v_0 - \mathbb{U}||v_1 - \mathbb{U}|}$

$= \frac{\frac{M}{M+m} v_0 \cdot \left(v_1 - \frac{m v_0}{M+m}\right)}{\frac{M v_0}{M+m}\sqrt{v_1^2 + \left(\frac{m v_0}{M+m}\right)^2 - 2\cdots}}$

$m^2(v_0 - v_1)^2 = Mm(v_0^2 - v_1^2)$

$M^2 - m^2 + 2m^2$

$m v_0^2 + m v_1^2 - 2m v_0 v_1 = M v_0^2 - M v_1^2$

$\frac{v_0 v_1}{} = \cos\theta = \frac{M+m}{2m}\left(\frac{v_1}{v_0}\right) - \frac{M-m}{2m}\left(\frac{v_0}{v_1}\right)$

$\cos\varphi = \frac{\cos\theta - \frac{m}{M+m}\frac{v_0}{v_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{m}{M+m}\frac{v_0}{v_1}\right)^2 - 2\frac{m}{M+m}\cos\theta}}$

$\cos\varphi = \frac{M+m}{2m}\left(\frac{v_1}{v_0}\right) - \frac{M^2+m^2}{2m(M+m)}\left(\frac{v_0}{v_1}\right)$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

10^{-24}
「slow neutron では 0.3−0.5 cm の程度」

DATE
NO. 7

最初 energy が 10^6 eV であるとする。10回衝突すると、10^3 eV. 20回衝突すると 約 1 eV, 更に ~~5回衝突すると~~ も衝突すると 常温の thermal motion の energy $(kT) \sim \frac{1}{40}$ volt 程度になる。

この場合注意すべきことは collision の prob. 即ち cross section (or mean free path) が velocity によって変ることである。例へば 大体 paraffin, 水 等で 10 cm の程度である。 −20cm

であるから thermal velocity になるまでには 数米しか進まない わけである。 勿論 neutron の energy が kT に近くなると proton の thermal energy も無視出来なくなるが、そこまでになる途中は大体上の如くである。

併して非常に遅くなってくると neutron と proton とが一緒になって deuteron になる cross section が効いてくる。
なほ low speed の neutron の数は上に述べた計算されたよりは少いであろう。

以下*で湯川 実験の hydrogen を含む 物体中の neutron の vel. distribution を求めて見る。

Fermi は上と同様に

a) slowing down は Elastic Scattering のみによるとし、mean free path を $\lambda(v)$ とする。

b) Centre of gravity を fix してる system に関して scatter は各方向に uniform に distribute してる。

c) proton の thermal energy は negligible

* Fermi, P. Zeeman Verhandelingen, 1935.

$$\cos\varphi = 1 - 2x,$$

$$x = \frac{1-\cos\varphi}{2}, = \frac{1}{2}$$

$$E_1 = E_0(1-\alpha x)$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 8

$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta' = \frac{1}{2}\left(-\cos\theta' \Big|_1^{-1}\right)$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
$= 2\cos^2\theta - 1$

次に d) neutron の source から毎秒 Q 個の neutron が medium 中に project される。それらの velocity は皆 v_0 とする。
e) neutron は nucleus によって capture され、v なる velocity の neutron が capture される迄の mean life time を $\tau(v)$ とする。
さて、先 v_0 なる velocity の neutron の密度 n_0 とすると、之は毎秒 Q 丈増すと共に、$n_0\left(v_0/\lambda_0 + 1/\tau_0\right)$ 丈減る。
∴ statistical equil. にすれば

$$Q = n_0\left(\frac{v_0}{\lambda_0} + \frac{1}{\tau_0}\right)$$

次に $(v, v+dv)$ の間の neutron の数を $n(v)\,dv$ とすると、毎秒

$$n(v)\left[\frac{v}{\lambda(v)} + \frac{1}{\tau(v)}\right]$$

丈減り、他方 $v' > v$ なる neutron の scattering のために毎秒

$$n(v')\,dv'\,\frac{v'}{\lambda(v')}\,\frac{2v}{v'^2}\,\dagger$$

丈生ずる。之に source から出た v_0 なる neutron の scatt. によるものを入れると、次の equilibrium cond. を得る

$$n(v)\left(\frac{v}{\lambda(v)} + \frac{1}{\tau(v)}\right) = 2v\int_v^{v_0} \frac{n(v')\,dv'}{v'\lambda(v')} + \frac{2v\,n_0}{v_0\lambda_0}$$

($\dagger$ $\int_0^{\pi} 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$
$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) = \cos^2\theta = \left(\frac{v}{v'}\right)^2$
$(v \;—\; 0)$

$\frac{2v\,dv}{v'^2}$
$(v, v+dv)$)

いれて，之の

$+\ v = v_0$ と~~於て 上の等式~~ に入れると

$$\cancel{n_0 = C\, m \cdot \frac{v_0\lambda_0}{v_0 + \frac{\lambda_0}{\tau_0}}}$$

$$\therefore C = \frac{n_0}{v_0\lambda_0}\left(v_0 + \frac{\lambda_0}{\tau_0}\right)$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..............

NO. 9

† vが大きい所では、λ は ~~…~~ v に比例すると見なし得る。$\frac{1}{v^2}$ に

$E_{\text{~~max~~}crit} = \frac{\hbar^2}{2m\lambda_{crit}^2}$

$4\pi\lambda_{crit}^2 \fallingdotseq \sigma_{scat.}$

$= \frac{2.6}{\sigma_{el}}$ M.V.

$\tau v \sim \frac{1}{v} v$

$\tau \sim \frac{1}{v}$ const.

両辺を $2v$ で割つて v について微分すると、

$$\frac{d}{dv}\left[\frac{n(v)}{2}\left\{\frac{1}{\lambda(v)} + \frac{1}{v\tau(v)}\right\}\right] + \frac{n(v)}{v\lambda(v)} = 0$$

この式は $n(v)$ について、容易にとかれる。

$$n(v) = C \cdot \frac{v\lambda(v)}{v + \frac{\lambda(v)}{\tau(v)}} e^{2\int_v^{v_0} \frac{dv}{v + \frac{\lambda(v)}{\tau(v)}}}$$

const. C は ~~…~~ 上の積分式に入れると、

$$n(v)\left[\frac{v}{\lambda(v)} + \frac{1}{\tau(v)}\right] \fallingdotseq 2vC \cdot \int_v^{v_0} \frac{dv' \, e^{2\int_{v'}^{v_0} \frac{dv''}{v'' + \frac{\lambda(v'')}{\tau(v'')}}}}{v' + \frac{\lambda(v')}{\tau(v')}}$$

$$\frac{v + \frac{\lambda}{\tau}}{\lambda} + \frac{2vn_0}{v_0\lambda_0}$$

$Cv.$

$$= (+\tfrac{1}{2})\left(e^{2\int_v^{v_0} \frac{dv'}{v' + \frac{\lambda(v')}{\tau(v')}}} - 1\right)$$

$$C = \frac{2n_0}{v_0\lambda_0} = \frac{2Q}{v_0\left(v_0 + \frac{\lambda_0}{\tau_0}\right)}$$

更に、neutronの speed が一定以下になると（~~…~~ 少くとも、de Broglie wave length が nuclear dimension ~~…~~ よりも大きいとすると）λ, τ は大体 v に indep と見なし得、

$$n(v) = \text{Const.} \frac{v}{\left(v + \frac{\lambda}{\tau}\right)^3}$$

となる。（$\int_v^{v_0}$ の積分中 vの大きい所では λ, τ は Const. ではないかも知れぬが、その部分は無視しうるものと ~~…~~ すると、少くとも vの小さい所ではこの式が成立する）

τ ∼ 一定 const.

T slow neutron に対しては
Φ_{scatt}, Φ_c は $\propto \lambda$, $\propto \tau v$ の order

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 10

となる most proble velocity は

$$v_p = \frac{\lambda}{2\tau}$$

である。即ち elastic collision の mean free path λ が capture process の mean free path $v_p\tau$ の二倍の速さが most probable になる。T

~~しかし、之れは粒子の衝突は τ が大きくなるので proton vel. が neglect で出来ない為のためにならない。~~

Fermi は neutron-proton system の virtual or loose binding の ^1S state を考へ、magnetic moment の間の interaction により ^3S なる deuteron の normal state への transition によって capture がおこると考へて、elastic scattering の mean free path λ と capture の mean life time とを計算して、λ=0.5 cm とすると $\tau = \frac{1}{5.2\times10^{5}}$ sec となり、之は実験とよく一致することを見出して居る。之を採用すれば v_p は thermal energy に下りる。

(capture cross section $10^{-25}\,\mathrm{cm}^2$ とすると $\frac{1}{v\tau} = 10^{23}\cdot10^{-25}$ $\frac{1}{\tau} = \frac{v}{10^2}$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

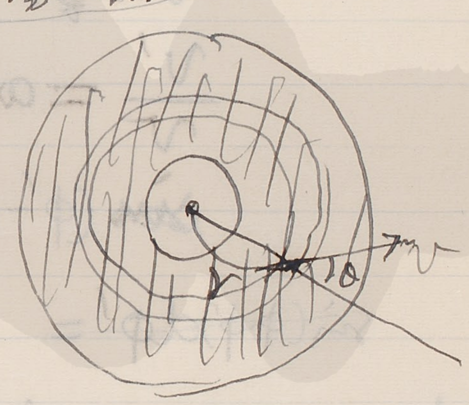
DATE

NO. 11

以上の取扱ひでは、~~i) を体~~ を（に考へた neutron 流の velocity distribution）一様と仮定したとすると、i) は之の中性子を（流）に関数の解を出る場合ではいゝと結果が出るが、
ii) は場所~~によって~~及び方向による velocity distribution の相違を考に入れぬ点が具合悪い。

（従って此の取扱ひ方は適当でない）

実際問題として、spherical shell 状の scattering substance の中央に小さな source をおいた場合である。



この場合 velocity distribution は (r, v, θ) 丈の函数とみなし得る。
従って、$(r, r+dr)(v, v+dv)(\theta, \theta+d\theta)$ の間にある neutron の数を時刻 t に

$$\rho(r, v, \theta, t)\, dr\, dv\, d\theta$$

とすると、~~$(r, r+dr)$ の内の薄い shell~~ $t+dt$ なる時刻迄には
($v\,dt \ll dr$ 位に dt を小さくとる) capture のために

$$(-)\ \frac{dt}{\tau(v)}\,\rho(r, v, \theta, t)\, dr\, dv\, d\theta$$

丈減る。 $\tau(v)$: capture の mean life time.
又 scattering のために

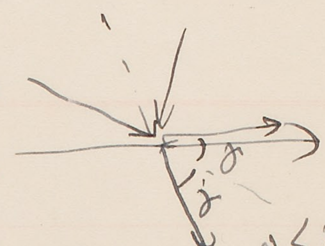
$$(-)\ \int_0^{v}\int_{\theta_0(v')}^{\theta_1(v')} \frac{dt\; dv'\, d\theta'}{\lambda(v, \theta; v', \theta')}\,\rho(r, v, \theta, t)\, dr\, dv\, d\theta$$

丈減少する。

$$\frac{dv' dv'}{\lambda(v, v')} = \frac{2v' dv'}{v \lambda(v)} = \frac{2\cos\gamma \cdot \cancel{v} \, dv'}{\lambda(v) \, v \, d(\cos\gamma)}$$

$v \rightarrow$ v'

$\gamma = \arccos \frac{v'}{v}$



$0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2}$

$v_0 \; \theta + \gamma$

$$\iiint \frac{\chi(v; \theta') \, dv' d\theta' d\phi'}{\lambda(v'; v)}$$

$\theta + \gamma$

$\theta - \gamma \sim \gamma - \theta.$

$v \quad \theta'(\text{?}) \phi'(v, \theta, \phi; v', \theta')$

$\cancel{d(\cos\theta)}$

$\theta \sim \cancel{\ }\gamma \quad 2\pi$

$$\frac{v'}{v} = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi' - \phi)$$

$$\cancel{\cos} (\phi' - \phi) = x$$

$$\sin(\phi' - \phi) d\phi' = \frac{\frac{v'}{v} - \cos\theta \cos\theta'}{\sin\theta \sin\theta'}$$

$$dx = \cos(\phi' - \phi) d\phi =$$

$$d\phi = \frac{\sin\theta \sin\theta' \, dx}{\frac{v'}{v} - \cos\theta \cos\phi'}$$

$-\pi, +\pi.$

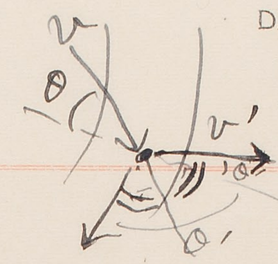
$$x = \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{v'}{v} - \cos\theta \cos\theta'\right)^2}{\sin^2\theta \sin^2\theta'}} \ge \cancel{\sin\theta \sin\theta'}$$

$0 \cancel{\le} \phi' - \phi \; \cancel{\ge 0}$

E26 011 P06 裏

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 12



$dt\, dv' d\theta'$

dt 時間に

但し、$\lambda(v,\theta; v',\theta')$ は (v,θ) なる neutron が衝突して $(v', v'+dv')$ の間の neutron になる確率 (θ' は v' から ~~unique に定まる~~) $(\theta', \theta'+d\theta')$

従って、(v',θ') なる neutron の scattering によって dt 時間に $(v, v+dv)$, $(\theta, \theta+d\theta)$ の neutron になる数は

$$\frac{dt\, dv\, d\theta}{\lambda(v',\cancel{\theta'}; v\cancel{\theta})}$$

~~故~~ 結局. dt 時間に

$$(+)\quad \int_v^{v_0}\int_0 \frac{\cancel{dt\cdot dv\, d\theta}}{\lambda(v'\cancel{\theta'}; v\cancel{\theta})}\rho(v' v' \theta' t)\, dv' d\theta'$$

$dt\, dv\, d\theta$

丈増加する。

又 r の内側の boundary を通って出入することによる増加は

(+) $\rho(r, v, \theta, t)\, dv\, d\theta \cdot v\cos\theta\, dt$

外側の boundary を通っての流出は

(−) $\rho(r+dr, v, \theta, t)\, dv\, d\theta \quad v\cos\theta\, dt$.

stationary distribution に対しては之等を引いて0の筈である,

$$-\frac{\rho(r,v,\theta)}{\tau(v)} - \iint_{0\ \theta'}^{v} \frac{dv' d\theta'}{\lambda(v,\cancel{\theta}; v'\cancel{\theta'})}\cdot\rho + \iint_{v\ \theta'}^{v_0} \frac{\rho' dv' d\theta'}{\lambda(v'\cancel{\theta'}; v\cancel{\theta})} - \frac{\partial\rho}{\partial r} v\cos\theta = 0.$$

$$\frac{v}{\lambda(v)} \qquad 2v\int_v^{v_0}\int_\theta \frac{\rho'\cdot dv' d\theta'}{v'\lambda(v')}$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

$v^2 = v'^2 + u'^2$

$v \cos = v'\cos\gamma + u'\sin\gamma$

$0 = v'\sin\gamma - u'\cos\gamma.$

$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$

$\boxed{v\cos\gamma = v'}$

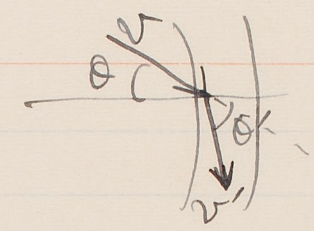
$\lambda(v, v')$

DATE

NO. 13 $\boxed{15}$

$\cos\theta$

(v, θ, ϕ)
(v', θ', ϕ')



この式の particular solution は

$$\rho = \rho_r \chi(v,\theta)$$

と おくと,

$$\frac{1}{\rho_r}\frac{d\rho_r}{dr} = \frac{1}{v\cos\theta}\int_v^{v_0}\int \frac{\chi' dv' d\theta'}{\lambda(v'\theta'; v\theta)}$$

$$= \frac{1}{v\cos\theta}\left\{\frac{1}{\chi}\int_v^{v_0}\int_{\theta(v')} \frac{\chi' dv' d\theta'}{\lambda(v'\theta'; v\theta)} - \int_0^v\int_{\theta'(v')} \frac{dv' d\theta'}{\lambda(v\theta; v'\theta')} - \frac{1}{\tau(v)}\right\} = -\mu.$$

$$\rho_r = e^{-\mu r}$$

$$\tau \cdot \int_0^v \int_{\theta'} \frac{dv' d\theta'}{\lambda(v\theta; v'\theta')} = 1; \quad v\tau = \lambda(v).$$

$$\lambda(v) = \frac{v}{\int_0^v\int_{\theta'} \frac{dv' d\theta'}{\lambda(v\theta; v'\theta')}} \quad \text{: mean free path.}$$

その中, $v'<v$, 以上 prob. は $\left(\frac{v'}{v}\right)^2$ 故

$$\int_0^{v}\int_{\theta'} \frac{dv' d\theta'}{\lambda(v,\theta; v'\theta')} = \frac{v'^2}{v^2} \cdot \frac{v}{\lambda(v)} = \frac{v'^2}{v\lambda(v)}$$

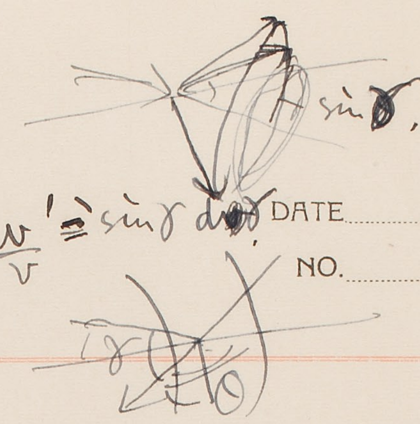
$$\therefore \int_{\theta(v')} \frac{d\theta'}{\lambda(v,\theta; v'\theta')} = \frac{2v'}{v\lambda(v)}$$

同様に

$$\int_v \frac{d\theta}{\lambda(v'\theta'; v\theta)} =$$

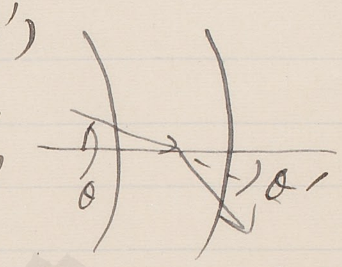
DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 14



$\frac{dv'}{v} = \sin\gamma\, d\theta$,

この式のθ'についての積分をもう少し詳しく考へてみる。
元来 衝突前後の (v, θ, ϕ) (v', θ', ϕ') の中 5個は independent にきまる。
例へば、$v, \theta, \phi, v', \theta'$ は任意にとりうる。その中 ϕ はどうとってもよいことで、これについての積分は既に終っていると考へてよい。



$(v, \theta) \to (v', \theta')$ の時には θ' は

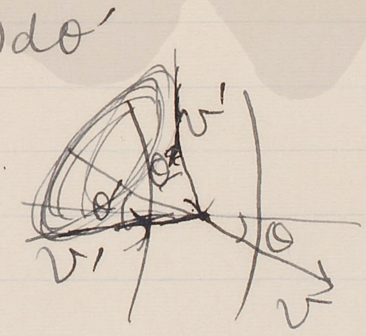
$$\theta - \gamma \leq \theta' \leq (\theta + \gamma) \text{ or } 2\pi - \theta - \gamma.$$

の間の値。但し、 $\cos\gamma = \frac{v'}{v}$,

$$0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}, \quad \theta + \gamma \text{ or } 2\pi - \theta - \gamma.$$

∴ 第二項は $\int_0^{v} \frac{v\, dv'}{\lambda(v, v')} \int_{\theta - \gamma} g(v, \theta)\, d\theta'$

$$= \frac{dv'}{\lambda(v, v')} \cancel{\sin\gamma}.$$



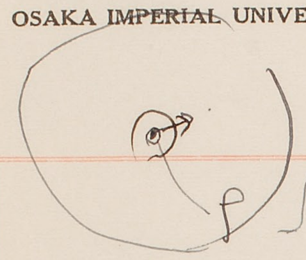
$$\iint_{\theta(v', v, \theta)}^{v} \frac{\rho(v', \theta')\, dv' d\theta'}{\lambda(v', v)} =$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} v \cos\theta + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{v}{\lambda}\right)\rho \pm \iint \frac{\rho(v', x')\, dv' dx'}{\lambda(v', v)} = 0$$

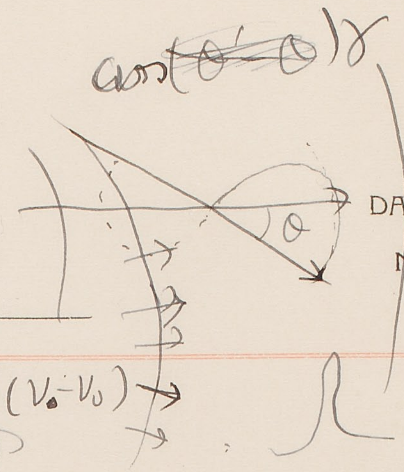
DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 15



$\boxed{r^2 e^{-\mu r}}$



$\rho(0,\nu,\theta) = \delta(\nu_0-\nu_0)\,\delta(\theta)$

exact solutionは困難故. Fermiのsolutionが大体あてはまる. 即ち 大体isotropicで ~~大体~~ νと共にあまりかはらないとする.

$$\rho(r,\nu,\theta) = \cancel{r^2}\left\{ c\,\frac{\nu\lambda}{\nu+\frac{\lambda}{\tau}}\,e^{2\int_\nu^{\nu_0}\frac{d\nu}{\nu+\frac{\lambda(\nu)}{\tau(\nu)}}}\right\}$$

$$+ \cancel{\phi}\ \Psi\} \quad +\psi(\nu,\theta)$$

とする.

$$\frac{1}{\nu\cos\theta}\left\{\frac{1}{\rho}\iint_\nu^{\nu_0}\frac{\rho'\,d\nu'\,d\theta'}{\lambda(\nu',\nu)} - \left(\frac{\nu}{\lambda}+\frac{1}{\tau}\right)\right\} = -\mu.$$

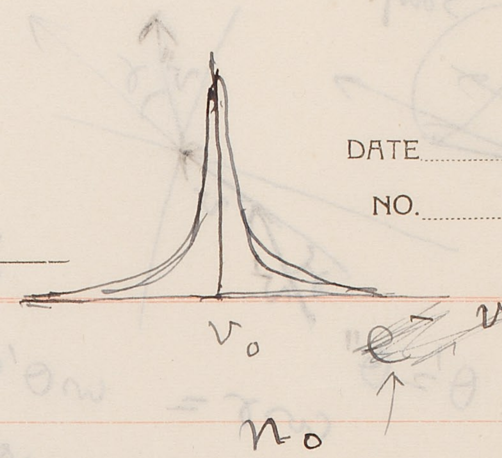
or
$$\iint\frac{\rho'\,d\nu'\,d\theta'}{\lambda(\nu',\nu)} - \left(\frac{\nu}{\lambda}+\frac{1}{\tau}\right)\rho + \mu\nu\cos\theta\cdot\rho = 0.$$

$$\rho = \underbrace{c\cdot\frac{\nu\lambda}{\nu+\frac{\lambda}{\tau}}\,e^{2\int_\nu^{\nu_0}\frac{d\nu}{\nu+\frac{\lambda}{\tau}}}}_{\rho_0} + \psi$$

$$\iint\frac{\psi'\,d\nu'\,d\theta'}{\lambda(\nu',\nu)} - \left(\frac{\nu}{\lambda}+\frac{1}{\tau}\right)\psi + \mu\nu\cos\theta\,\rho_0 = 0.$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO. 16



Boundary Conditions

$r=0$ に於て　　$\rho(0, v, \theta) \to n_0\,\delta(v-v_0)\cdot\delta(\theta)$

~~$r\to\infty$ に於て　　$\rho(\infty, v, \theta) \to f(v)\,\delta(\theta)$~~

~~integro-diff. equation~~
及び條件から定まる。それによって

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial r}\right|_0 \quad \left.\frac{\partial^2\rho}{\partial r^2}\right|_0 \quad \ldots\ldots$$

が定まり、從って r の任意の値に於ける ρ が定まる。

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} v\cos\theta = \iint_v^{v_0} \frac{\rho' dv' d\theta'}{\lambda(v', v)} - \left(\frac{1}{\tau}+\frac{v}{\lambda}\right)\rho$$

$$2v \int_v^{v_0}\!\!\int \frac{\rho' dv' d\theta'}{v'\lambda(v')}$$

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial r}\right|_{r=0} \cos\theta = 2v\cdot\frac{n_0}{v_0\lambda_0} \qquad v<v_0$$

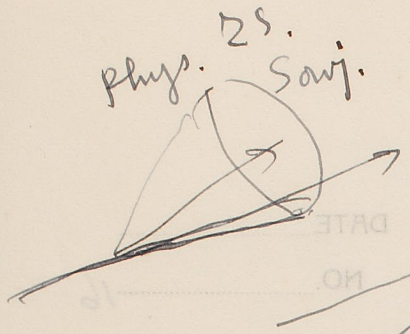
$$-\frac{1}{\tau}$$

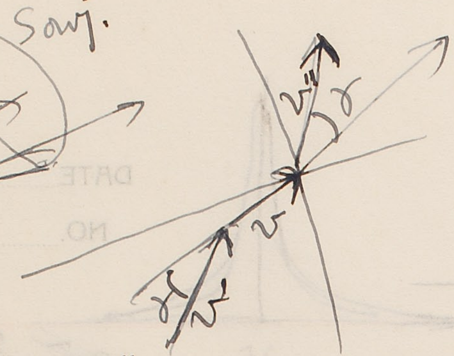
$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial r}\right|_{\substack{r=0\\ v=v_0}} v_0\cos\theta = -\left(\frac{1}{\tau}+\frac{v_0}{\lambda_0}\right) n_0\,\delta(v-v_0)\,\delta(\theta)$$

$$\left.\frac{\partial^2\rho}{\partial r^2}\right|_{r=0} v\cos\theta = \iint_v^{v_0} \frac{\frac{\partial\rho'}{\partial r}\, dv' d\theta'}{\lambda(v', v)} - \left(\frac{1}{\tau}+\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\partial\rho}{\partial r}$$

$$= 2v\,\frac{\qquad}{v_0}$$

Phys. 25. Sowj.





$$\frac{v'}{v'} = \frac{v''}{v}$$

$$\lambda(v', v) = \lambda(v, v'')$$

$$\theta' = \theta''$$

$$\cos\gamma = \cos\theta'\cos\theta + \sin\theta'\sin\theta\cos(\phi'-\phi)$$
$$= \cos\theta\cos\theta'' + \sin\theta\sin\theta''\cos(\phi-\phi'')$$
$$\cos(\phi'-\phi) = \cos(\phi-\phi'')$$

$$\theta = \theta''$$

$$\phi' = \phi''$$

$$\iiint \frac{\rho(v',\theta',\phi') - \rho(v,\theta,\phi)}{\cancel{\lambda(v',v)}} dv' d\theta' \cancel{d\phi'}$$

$$\lambda(v', v) = \frac{2v}{v'^2\lambda(v')}$$

$$\lambda(v) = \iint_0 \frac{dv''d\theta''}{\lambda(v', v'')} = \iint_v^\infty \frac{\frac{v^2 dv'}{v'^2} d\theta'}{\lambda(v', v)}$$

$$= 2\left(\frac{v}{v'}\right)\frac{1}{v'\lambda(v')}$$

$$\frac{dv''}{\lambda(v, v'')} = 2\left(\frac{v''}{v}\right)\frac{dv''}{v\lambda(v)} \quad \frac{2v}{v'\lambda} \quad \frac{2v}{v'^2\lambda(v)}.$$

$$b = d\sin\theta'$$

$$a = \cancel{d}\cos\cancel{\alpha}$$

$$a\cos\theta' + b\sin\theta' = c$$

$$d\cos(\theta'-\alpha) = c$$

$$\theta' - \alpha = \arccos\frac{c}{d},$$

$$\iint\left(\frac{2v}{v'}\right)\left\{\frac{\rho(v',\theta',\phi')}{\cancel{v}\lambda(v')} - \frac{\rho(v,\theta,\phi)}{\cancel{v}\lambda(v)}\right\} dv' d\theta'$$

$$\tan\alpha = \tan\theta\cdot\cos(\phi'-\phi)\iint\frac{2dv'd\theta'}{\cancel{v'}} = 1.$$

$$\cos(\theta' - \alpha') = \frac{\frac{v}{v'}}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2(\phi'-\phi)}}$$

$$\theta' = \arctan(\tan\theta\cdot\cos(\phi'-\phi)) + \arccos\left(\frac{v}{v'}\frac{1}{\sqrt{\quad}}\right)$$

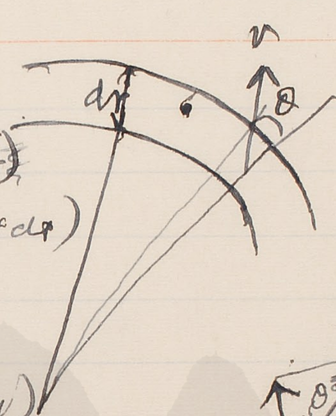
$$\int_0^{2\pi}$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

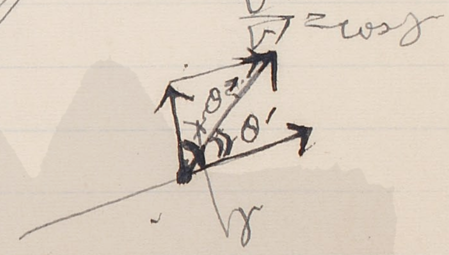
DATE

NO. 17

dt 時間に (r, v, θ) の neutron
は $\left(r + v\cos\theta\, dt,\ v,\ \theta - \frac{v\sin\theta\, dt}{r}, t+dt\right)$
になる。



それ故 ~~distribut~~ $(r, v, \theta, t+dt)$ の neutron
の数の変化は
$f\left(r + v\cos\theta\, dt,\ v,\ \theta + \frac{v\sin\theta\, dt}{r},\ t\right)$
$- f(r, v, \theta, t)$



$\frac{v'}{v} = \cos\gamma$

$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi') = \frac{xx' + yy'\cos(\phi-\phi')}{r r'}$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\left(\frac{v}{\lambda} + \frac{1}{\tau}\right)\rho + \iint \frac{\rho'\, dv' d\theta'}{\lambda(v', v)}$$

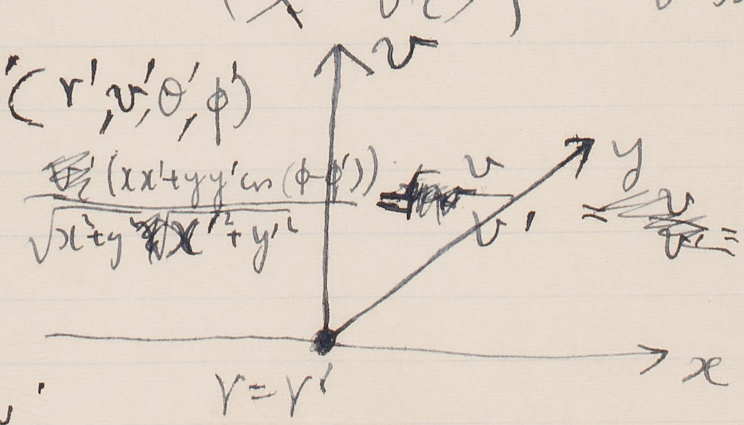
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + v\cos\theta\frac{\partial\rho}{\partial r} - \frac{v\sin\theta}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta} = -\left(\frac{v}{\lambda} + \frac{1}{\tau}\right)\rho + \iint \frac{\rho'\, dv' d\theta'}{\lambda(v', v)}$$

$r\cos\theta = x \qquad r\sin\theta = y.$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x} = -\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{v\tau}\right)\rho + \frac{1}{v}\iint \rho'\, dv' d\theta'$$

$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \rho$ $\quad \rho'(r', v', \theta', \phi)$

$\frac{\rho'\, dr' dv' d\theta'}{\lambda(v', v)}$ $\quad \frac{(xx' + yy'\cos(\phi-\phi'))}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$



$\rho' = \delta(r' - r)$
$dx' dy' dv'$