the Theory of
On ~~the~~ Collision of Neutrons with Deuterons

§1. Introduction

§2. Estimation of the Collision Cross Section ~~for Free Deutrons~~

§3. ~~Effect~~ Collision of the Neutrons with ~~Bound~~ Deuterons.

§4. ~~General Theory of~~ Single and Double Scatterings by a Layer of Heavy Hydrogen Water

§5. General Considerations on Multiple Scattering

§6. ~~Efficiency~~ ~~Numerical Estimation of the~~ Slowing down ~~of Neutrons~~
Relative Efficiency of Light and Heavy ~~Hydrogen~~ Waters for

大阪帝國大學理學部

1882

Probability of Multiple Collision of Neutrons in Heavy Water

Heavy Hydrogen 1^{cc} 中の deuteron の数は
~~18~~ 20 gram 中に 6.06×10^{23}.
density は 1,1 [illegible]

$$n = \frac{6.06\times10^{23}}{20}\times1.1 = 0.3333\times10^{23} = \frac{10^{23}}{3}.$$

6.666

厚さ d を 5 cm とすると, absorp. coef は

$$5\times\frac{10^{23}}{3}\cdot\sigma$$

$\sigma \doteqdot 4\times10^{-24}$ (fast), 1.71 (slow)

$$= \frac{5\times1.71 \text{ or } 5\times4}{30}$$

1回衝突する prob は平均

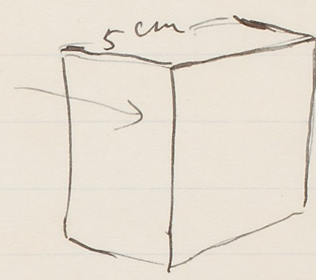
$$k_1(1-e^{-nd\sigma})$$

n回衝突する prob は平均

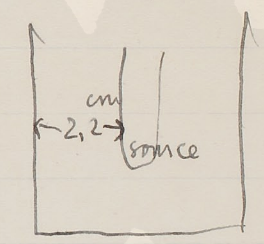
$$k_1k_2\cdots k_n(1-e^{-nd\sigma})^n.$$

しかし五回の衝突によって energy が初めの $\frac{1}{9^4}$ になるものは 1.15×10^{-4}

しかない。
初めに 2×10^6 eV の中性子ならば、五回の衝突によって そのうち 1.15×10^{-4} 丈が
$2\times10^6\times\frac{1}{9^4} \doteqdot 300$ eV に下がる。
300 eV に下がるものはない。



Dunning, Phys. Rev., Aug. 1935.



$\frac{5}{9}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{18}$, $\frac{9}{18}$

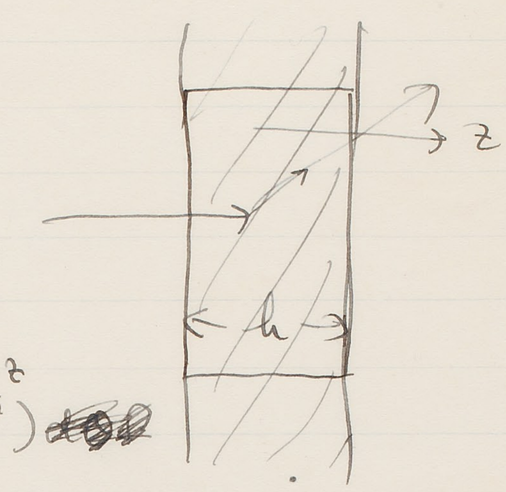
81
81
648
6561) 2000000 (0.003

H₂O の場合は 10^{-1} 位は 9^{-4} に下がってる
なお その他は 10, 1000 : 1 である。
なお Dunning の場合は最初から相当 neutron があったのだと見ねばならぬ。

Oxygenによるものをneglectして
dz なる厚さの間で $(d\varphi, d\theta)$の方向に
scatterされる prob.を

$\frac{dz}{\lambda}p(\theta)\,d\omega \qquad d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

とすると. ~~方向~~ θ方へ scatterされて
出て行く neutronの数は



1) $2\pi p(\theta)\sin\theta d\theta \int_0^h \frac{dz}{\lambda_0} e^{-\frac{z}{\lambda_0}} (\cancel{1-}\, e^{-\frac{h-z}{\lambda_\theta\cos\theta}})$

for $\theta \le \frac{\pi}{2}$

2) $2\pi p(\theta)\sin\theta d\theta \int_0^h \frac{dz}{\lambda_0} e^{-\frac{z}{\lambda_0}} (\cancel{1-}\, e^{\frac{z}{\lambda_\theta\cos\theta}})$.

for $\theta \ge \frac{\pi}{2}$

之等は夫々

1) $2\pi p(\theta)\sin\theta d\theta \{ \cancel{1-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}} = \frac{e^{-\frac{h}{\lambda_\theta\cos\theta}}}{\lambda_0}\frac{1-e^{-(\frac{h}{\lambda_0}-\frac{h}{\lambda_\theta\cos\theta})}}{\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda_\theta\cos\theta}} \}$

$\lambda_\theta = \lambda_0$ とおけば

$2\pi p(\theta)\sin\theta d\theta \{ \cancel{1-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}}\ \frac{1-e^{-\frac{h}{\lambda_0}(1+\frac{1}{\cos\theta})}}{1+\frac{1}{\cos\theta}} \}$

$\frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0\cos\theta}}-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}}{1-\frac{1}{\cos\theta}} \}$

$= 2\pi p(\theta)\sin\theta d\theta \{ \cancel{1-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}}\ \frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0}}-e^{-\frac{h}{\lambda_0\cos\theta}}}{\frac{1}{\cos\theta}-1} \}$

2) $2\pi p(\theta)\sin\theta d\theta \{ \cancel{1-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}}\ \frac{1}{\lambda_0}\cdot\frac{1-e^{-(\frac{h}{\lambda_0}-\frac{h}{\lambda_\theta\cos\theta})}}{\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda_\theta\cos\theta}} \}$

$\lambda_\theta = \lambda_0$

$= 2\pi p(\theta)\sin\theta d\theta \{ \cancel{1-e^{-\frac{h}{\lambda_0}}}\ \frac{1-e^{-\frac{h}{\lambda_0}(1-\frac{1}{\cos\theta})}}{1-\frac{1}{\cos\theta}}$

3) 二回の scattering をする prob. は

$\theta \leq \frac{\pi}{2}$ $\quad 2\pi p(\theta)\sin\theta\, d\theta \int_0^h \frac{dz}{\lambda_0} e^{-\frac{z}{\lambda_0}} (1-e^{-\frac{h-z}{\lambda_0\cos\theta}})$ $= p_2(\theta)\sin\theta\, d\theta$

$\theta \geq \frac{\pi}{2}$ $\quad 2\pi p(\theta)\sin\theta\, d\theta \int_0^h \frac{dz}{\lambda_0} e^{-\frac{z}{\lambda_0}} (1-e^{\frac{z}{\lambda_0\cos\theta}})$ $=$

~~これを~~ 全体として 二回(以上) の scattering をする neutron の total fraction は

$$W_2 = \int_0^{\pi} p_2(\theta)\sin\theta\, d\theta$$

~~かくのものの中 更に 二回の scattering をするものの数は 近似的に~~

~~W_2^2 とはならない。何となれば neutron の場所及び 二回の scattering~~ (場所に関して $e^{-\frac{z}{l}}$ 的に distributed となって)

二回 scatter した後の 方向の distribution は isotropic と考え

z から更に scattering をする prob. は

$$\frac{1}{2h}\left\{\int_{z=0}^{h}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\lambda} e^{-\frac{z}{l}} (1-e^{-\frac{h-z}{\lambda_0\cos\theta}})\sin\theta\, d\theta\, dz + \int_{z=0}^{h}\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\frac{z}{l}} (1-e^{+\frac{z}{\lambda_0\cos\theta}})\sin\theta\, d\theta\, dz\right\}$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\int_0^h\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-e^{-\frac{h-z}{\lambda_0\cos\theta}})\sin\theta\, d\theta\, dz\right.$$

$$\frac{1}{2l(1-e^{-\frac{h}{l}})}\left\{ l(1-e^{-\frac{h}{l}})\right.$$

$$-\int_0^1 \frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0 x}}(e^{\frac{h}{\lambda_0 x}-\frac{h}{l}}-1)\,dx}{\frac{1}{\lambda_0 x}-\frac{1}{l}} + l(1-e^{-\frac{h}{x}}) - \int_0^1 \frac{1-e^{-\frac{h}{\lambda_0 x}-\frac{h}{l}}}{\frac{1}{\lambda_0 x}+\frac{1}{l}}\,dx$$

$$= 1 - \frac{1}{2l(1-e^{-\frac{h}{l}})} \int_0^1 \left\{ \frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0 x}}\left(e^{\frac{h}{\lambda_0 x}-\frac{h}{l}}-1\right)}{\frac{1}{\lambda_0 x}-\frac{1}{l}} + \frac{1-e^{-\frac{h}{\lambda_0 x}-\frac{h}{l}}}{\frac{1}{\lambda_0 x}+\frac{1}{l}} \right\} dx$$

$l = \infty$:
$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{1-e^{-\frac{h}{\lambda_0 x}}}{\frac{1}{\lambda_0 x}}\, dx$$

$$\frac{h}{\lambda_0 x} = t, \qquad dx = -\frac{h\,dt}{\lambda_0 t^2}$$

$$1 - \frac{1}{h}\int_{\frac{h}{\lambda_0}}^{\infty} (1-e^{-t}) \frac{h}{t} \cdot \frac{h}{\lambda_0 t^2}$$

$$= 1 - \frac{h}{\lambda_0}\int_{\frac{h}{\lambda_0}}^{\infty} \frac{dt}{t^3} + \frac{h}{\lambda_0}\int_{\frac{h}{\lambda_0}}^{\infty} e^{-t}\, \frac{dt}{t^3}$$

$$= 1 - \frac{h}{\lambda_0} \left. \frac{1}{2t^2} \right|_{\infty}^{\frac{h}{\lambda_0}} +$$

$$= 1 - \frac{\lambda_0}{2h} + \frac{h}{\lambda_0}\left\{ \left. e^{-t}\frac{1}{2t^2} \right|_{\infty}^{\frac{h}{\lambda_0}} - \int_{\frac{h}{\lambda_0}}^{\infty} e^{-t}\frac{dt}{2t^2} \right\}$$

$$= 1 - \frac{\lambda_0}{2h} + \frac{\lambda_0}{2h} e^{-\frac{h}{\lambda_0}} - \frac{h}{2\lambda_0}\left\{ \left. e^{-t}\frac{1}{t} \right|^{\frac{h}{\lambda_0}} - \int_{\frac{h}{\lambda_0}}^{\infty} e^{-t}\frac{dt}{t} \right\}$$

$$\varepsilon\left(\frac{h}{\lambda_0}\right) = 1 - \frac{\lambda_0}{2h} + \frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0}}}{2}\left\{ 1 - \frac{\lambda_0}{h} \right\} + \frac{h}{2\lambda_0}\left(-Ei\left(-\frac{h}{\lambda_0}\right)\right)$$

すると丁度 n 回衝突する確率は大体 ε^n であらはされることになる. n 回衝突して出てくる確率は $\varepsilon^n(1-\varepsilon)$

従って二回以上衝突して出てくる neutron の velocity distribution (Energy) (primary energy を E_0 とすれば)
は大体 (~~transmission~~ reflection を合せて)

$$p_2 \cdot \sum_{n=2} \cancel{f_{n-2}\left(\frac{E}{E_0}\right)} \varepsilon^{n-2}(1-\varepsilon)\, \cancel{d\left(\frac{E}{E_0}\right)}\, d\left(\frac{E}{E_0}\right) \int_{\frac{E'}{E}>1}^{\frac{E_0}{E}} f_{n-2}\left(\frac{E}{E'}\right) p_2\left(\frac{E'}{E_0}\right) d\frac{E'}{E}$$

で与へられるであらう.

$$\frac{h}{\lambda_0} \ll 1: \quad \cancel{\varepsilon = 1 - \frac{\lambda_0^2}{2h^2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{h}{\lambda_0}\right)}\left(1-\frac{\lambda_0}{h}\right)$$

$$\cancel{+\frac{h}{2\lambda_0}}$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{2h}\left\{\int_0^1 \cancel{\left(1-\frac{h}{\lambda_0 x}\right)\left(\frac{h}{\lambda_0 x} + \frac{h^2}{2\lambda_0^2 x^2}\right)\left(-\frac{h^2}{2\lambda_0^2 x^2}\right)} \frac{1}{\lambda_0 x} + \frac{1}{\lambda_0 x}\right\} dx$$

$$= 1 - \frac{1}{2h}.$$

$$\varepsilon\left(\frac{h}{\lambda_0}\right) = 1 - \frac{\lambda_0^2}{2h^2} - \frac{e^{-\frac{h}{\lambda_0}}}{2}.$$

$$\varepsilon(y) = 1 - \frac{1}{2y} + \frac{e^{-y}}{2}\left(\frac{1}{y}-1\right) + \frac{y}{2}\left(-Ei(-y)\right)$$

$y =$	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0
$-Ei(-y) =$	1.8229	1.2227	0.5598	0.2194	0.04890
$\varepsilon(y) =$	0.1627	0.2601	0.4433	0.6097	0.7651
$\overline{(n-2)} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$:	0.194	0.35	0.8	1.56	3.3

0.194
0.8373) 0.16270
8373
78970
75357
36330

0.35
0.7399) 0.2601
22197
38130

0.8
0.5567) 0.4433
4

1.56
3903) 6097
3903
21940
19515
24250

3.3
2349) 7651
7047
6040

$y=0.1$ $\quad \varepsilon(0.1) = 1 - \frac{1}{0.2} + \frac{0.9048}{2}\times 9 + \frac{0.1}{2}\times 1.8229$

$$\begin{array}{r} 5.0000 \\ -\,4.1627 \\ \hline 0.8373 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2)\,8.1432 \\ 4.0716 \\ 0.0911 \\ \hline 4.1627 \end{array}$$

$\varepsilon(0.1) = 1. - 0.8373 = 0.1627$

$y=0.2$ $\quad \varepsilon(0.2) = 1 - \frac{1}{0.4} + \frac{0.8187}{2}\left(\frac{1}{0.2}-1\right) + 0.1\times 1.2227$

$= 1 - 2.5 + 1.6374 + 0.1227 = 0.2601$

$$\begin{array}{r} 2.7601 \\ -\,2.5 \\ \hline 0.2601 \end{array}$$

$y=0.5$. $\quad \varepsilon(0.5) = 1 - 1 + \frac{0.6065}{2} + \frac{0.5}{2}\times 0.5598$

$= 0.30325 + 0.13995$

$= 0.4433$

$y=1.0$ $\quad \varepsilon(1.0) = 0.5 + \frac{1}{2}\times 0.2194 = 0.6097$

$y=2.0$ $\quad \varepsilon(2.0) = 0.75 - \frac{0.5}{2}\times 0.13534 + 0.04890$

$= 0.75 - 0.0338 + 0.04890$

$= 0.7651$

$$\begin{array}{r} 0.79890 \\ 0.0338 \\ \hline 0.7651 \end{array}$$

これは[illegible]仮定した ものが多いそれにより[illegible] 何回計算すれば[illegible]

$\frac{\partial}{\partial n}\left\{\varepsilon^{n-2}(1-\varepsilon)\right\} = 0.$

$e^{(n-2)\log\varepsilon}(1-\varepsilon)\left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon} + \frac{1}{(1-\varepsilon)} - \frac{2}{(1-\varepsilon)}\right\}$

$$\bar{n} = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-2)\varepsilon^{n-2}(1-\varepsilon)}{\sum_{n=2}^{\infty}\varepsilon^{n-2}(1-\varepsilon)} = \frac{(1-\varepsilon)\left\{\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} + \cancel{\frac{2}{1-\varepsilon}}\right\}}{\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon}} = \frac{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}{\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

$= \cancel{\frac{2+\varepsilon-\varepsilon^2}{1-\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$!!!

l: finite. $\frac{h}{\lambda_0} = y$, $\frac{l}{\lambda_0} = z$.

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{2\left(\frac{z-y}{y}\right)(1-e^{-\frac{y}{z}})} \int_0^1 e^{-\frac{y}{x}} \left\{ \frac{e^{-\frac{y}{z}} - e^{-\frac{y}{x}}}{\frac{y}{x} - \frac{y}{z}} + \frac{1 - e^{-\frac{y}{z} - \frac{y}{x}}}{\frac{y}{x} + \frac{y}{z}} \right\} dx$$

$$= 1 - \frac{}{2hy}$$

$\frac{y}{x} = \xi$　$\frac{y}{z} = \zeta$.

$$\varepsilon = 1 - \frac{y^2}{2\left(\frac{y}{z}\right)(1-e^{-\frac{y}{z}})} \int_y^\infty \left\{ \frac{e^{-\xi} - e^{-\zeta}}{\xi - \zeta} + \frac{1 - e^{-\xi-\zeta}}{\xi + \zeta} \right\} \frac{d\xi}{\xi^2}$$

$$= 1 - \frac{y^2}{2\, z (1 - e^{-\frac{y}{z}})} \int_y^\infty \left\{ \frac{}{\xi - } \right.$$

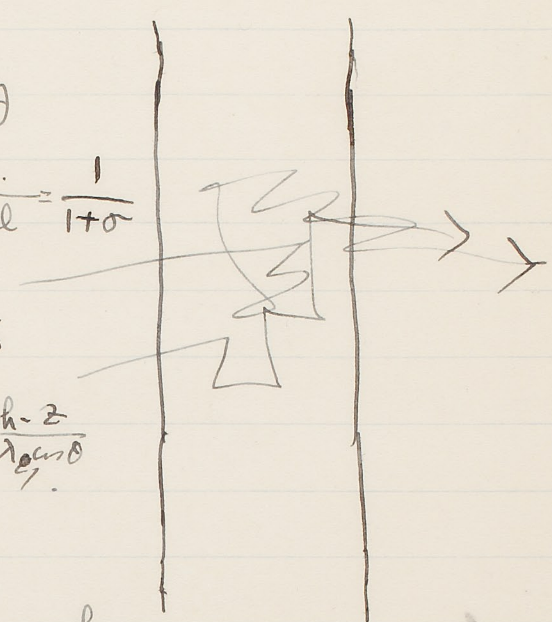
$l = \lambda_0$:　$z = 1$

$$\varepsilon = 1 - \frac{y^2}{2(1-e^{-y})} \int_y^\infty \left(\frac{e^{-y} - e^{-\xi}}{\xi - y} + \frac{1 - e^{-\xi - y}}{\xi + y} \right) \frac{d\xi}{\xi^2}$$

~~Elementary Calculations on~~ the Diffusion of Slow Neutrons ~~in~~ through the paraffin Plate

Multiple Scattering Accompanied by Capture

Mean free path λ_e (scattering and absorption)



$\sigma = \dfrac{\text{absorption cross section}}{\text{scattering} \quad 〃 \quad 〃}$ $\qquad \dfrac{\text{scatt.}}{\text{total}} = \dfrac{1}{1+\sigma}$

1) 一回 collision をやって出て行く数.

$$2\pi p(\theta)\sin\theta\, d\theta \int_0^h \frac{dz}{(1+\sigma)\lambda_e} e^{-\frac{z}{\lambda_e}} e^{-\frac{h-z}{\lambda_e\cos\theta}}$$

$$= \frac{2\pi p(\theta)\sin\theta\, d\theta}{1+\sigma} \cdot \frac{e^{-\frac{h}{\lambda}} - e^{-\frac{h}{\lambda\cos\theta}}}{\frac{1}{\cos\theta} - 1} \qquad \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi p(\theta)\sin\theta\, d\theta}{1+\sigma} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{h}{\lambda} + \frac{h}{\lambda\cos\theta}}}{1 - \frac{1}{\cos\theta}} \qquad \theta \ge \frac{\pi}{2}$$

scattering が ~~homogeneous~~ isotropic とすると,

~~2) 二回の collision をやると出れば~~

$\cancel{2\pi p(\theta)\sin\theta \int_0^h dz}$

$p(\theta) = \frac{1}{4\pi}$

$$\frac{\sin\theta\, d\theta}{2(1+\sigma)} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{h}{\lambda} + \frac{h}{\lambda\cos\theta}}}{1 - \frac{1}{\cos\theta}} \qquad \theta \ge \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\sin\theta\, d\theta}{2(1+\sigma)} \cdot \frac{e^{-\frac{h}{\lambda}} - e^{-\frac{h}{\lambda\cos\theta}}}{\frac{1}{\cos\theta} - 1} \qquad \theta \le \frac{\pi}{2}$$

また scatter されて出て行く.

$\frac{h}{\lambda}=y$, ~~$\frac{1}{\cos\theta}=x$~~. $\cos\theta=x$ とおけば

$$\frac{dx}{2(1+\sigma)} \quad \frac{1-e^{-y+\frac{y}{x}}}{1-\frac{1}{x}} \qquad -1<x<0$$

$$\frac{dx}{2(1+\sigma)} \quad \frac{e^{-y}-e^{-\frac{y}{x}}}{\frac{1}{x}-1} \qquad 0<x<1$$

2) 一回のcollisionによってcaptureされる数は

$$\frac{\sigma}{2(1+\sigma)}\int_0^h \frac{dz}{\lambda}e^{-\frac{z}{\lambda}}$$

$$=\frac{\sigma}{(1+\sigma)}(1-e^{-y})$$

3) 一回のcollision ~~によって生ず~~ 直ぐ後にはneutronのangular distributionはisotropicである。
~~之が為には 一回のcollisionを起すprob.は~~ 場所に関しては $e^{-\frac{z}{\lambda}}$ なる割合に従ってる $\frac{z}{\lambda}=\xi$
$=e^{-\xi}$
~~その位置は その中~~で その中位置から、それが進むに従って capture される割合が減るによって異なる故、出て行くものの angular distribution は ~~一様でない~~ 前方に強く(?)。
~~これが為~~ 之に依し、その後 ~~each点~~ 何回か衝突した結果 ~~で~~ 生まれた neutron が isotropic に四方に進んで行くと仮定することは出来ない。
故に、それが中で更に衝突する ~~prob~~ prob. は

$$\varepsilon(y)$$

で与へられる。
その中で $\frac{\sigma}{1+\sigma}$ 丈は capture される故、
$\frac{1}{1+\sigma}\varepsilon(y)$
丈が更に四方に isotropic に進んで行く。而して外へ出て除くものは $\frac{1}{1+\sigma}\varepsilon(y)\{1-\varepsilon(y)\}$

0) 一回も衝突しないで出て行く確率 e^{-y}

i) 一回の衝突をやる確率. $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\cancel{2(1+\sigma)}}(1-e^{-y}) = \cancel{1+\sigma}\, 1-e^{-y}$

$P_1 =$

一回の衝突によって capture される確率.

$$C_1 = \frac{\sigma}{(1+\sigma)}(1-e^{-y}) = \frac{\sigma P_1}{1+\sigma}$$

一回の衝突のみで transmit する確率

$$T_1 = \frac{1}{2(1+\sigma)}\int_0^1 \cancel{\frac{1-e^{-y+\frac{y}{x}}}{1-\frac{1}{x}}}\ \frac{e^{-y}-e^{-\frac{y}{x}}}{\frac{1}{x}-1}\,dx$$

一回の衝突のみで reflect される確率

$$R_1 = \frac{1}{2(1+\sigma)}\int_{-1}^0 \frac{1-e^{-y+\frac{y}{x}}}{1-\frac{1}{x}}\,dx$$

ii) 二回の衝突をやる確率

$$P_1-(C_1+T_1+R_1)$$

一回の衝突後 ~~$1-e^{-y}$~~ P_1-C_1 は isotropic に

$$= \frac{1-e^{-y}}{1+\sigma} \neq \frac{P_1}{1+\sigma}$$

n 回すれば進んで行く.

その中で $\varepsilon(y)$ 丈が更に collision をやる. 故に

二回の collision をやる確率は

$$P_2 = \frac{P_1\varepsilon}{1+\sigma}$$

∴ 二回の collision によって capture される確率は

$$C_2 = \frac{\sigma P_1\varepsilon}{(1+\sigma)^2}$$

二回の collision の後に外へ出る確率

$$T_2+R_2 = \frac{P_1\varepsilon(1-\varepsilon)}{(1+\sigma)^2}$$

iii) 残り $\dfrac{P_1\varepsilon}{(1+\sigma)^2}$ の中, ε 丈が更に collision を起す,

故に $\qquad P_3 = \dfrac{P_1\varepsilon^2}{(1+\sigma)^2}$

$$C_3 = \frac{\sigma P_1\varepsilon^2}{(1+\sigma)^3}.$$

$$\vdots$$

$$P_n = \frac{P_1\varepsilon^{n-1}}{(1+\sigma)^{n-1}}$$

$$C_n = \frac{\sigma P_1\varepsilon^{n-1}}{(1+\sigma)^{n}}$$

$$T_n + R_n = \frac{P_1\varepsilon^{n-1}(1-\varepsilon)}{(1+\sigma)^n}$$

従って capture される総数は

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} C_n = \frac{\sigma P_1}{(1+\sigma)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{1+\sigma}\right)^n$$

$$= \frac{\sigma P_1}{1+\sigma}\,\frac{1}{1-\dfrac{\varepsilon}{1+\sigma}}$$

$$= \frac{\sigma(1-e^{-y})}{1+\sigma}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\varepsilon}{1+\sigma}}$$

$\sigma \gg 1$: $\quad C = (1-e^{-y})$

$\sigma \ll 1$: $\quad C = \dfrac{\sigma(1-e^{-y})}{1-\varepsilon}.$

衝突しないで出て行く数 e^{-y}.
captureされる数 C
を除いた残りは

$$C = (1-e^{-y})\left\{\frac{(1+\sigma)\left(1-\frac{\varepsilon}{1+\sigma}\right)-\sigma}{(1+\sigma)\left(1-\frac{\varepsilon}{1+\sigma}\right)}\right.$$

$1+\sigma-\varepsilon-\sigma \quad 1-\varepsilon$

$$1-e^{-y}-C = (1-e^{-y})\left(1-\frac{\sigma}{1+\sigma}\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1+\sigma}}\right)$$

$$= \left\{\frac{1}{1+\sigma}+\frac{\sigma}{1+\sigma}\left(1-\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1+\sigma}}\right)\right\}(1-e^{-y})$$

$$= \left\{\frac{1}{1+\sigma}-\frac{\sigma}{1+\sigma}\left(\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1+\sigma}}-1\right)\right\}(1-e^{-y})$$

$$\frac{1-1+\frac{\varepsilon}{1+\sigma}}{1-\frac{\varepsilon}{1+\sigma}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(T_n+R_n) = \frac{P_1(1-\varepsilon)}{(1+\sigma)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{(1+\sigma)^n}$$

$$= \frac{P_1(1-\varepsilon)}{(1+\sigma)}\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1+\sigma}}$$

$$= (1-e^{-y})\left\{\frac{1}{1+\sigma}-\frac{\varepsilon}{(1+\sigma)}\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1+\sigma}}\right\}$$

$$= (1-e^{-y})\left\{\frac{1}{1+\sigma}-\frac{\varepsilon}{(1+\sigma)}\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1+\sigma}}\right\}$$

$$= \frac{P_1(1-\varepsilon)}{(1+\sigma)}\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1+\sigma}}$$

$$\frac{T_1}{R_1} = \frac{\int_0^1 \frac{e^{-y}-e^{-\frac{y}{x}}}{\frac{1}{x}-1}dx}{e^{y}\int_0^1 \frac{1-e^{-y-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}+1}dx} = e^{-y}\cdot\frac{\int_0^1 \frac{1-e^{-\frac{y}{x}+y}}{\frac{1}{x}-1}dx}{\int_0^1 \frac{1-e^{-y-\frac{y}{x}}}{\frac{1}{x}+1}dx}$$

$$\frac{T_n}{R_n} \simeq$$

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-\frac{y}{x}+y}}{\frac{1}{x}-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\xi}}{\frac{\xi}{y}} \frac{\frac{1}{y}\,d\xi}{\left(\frac{\xi}{y}+1\right)^2}$$

$$\frac{y}{x}-y=\xi.$$

$$x=\left(\frac{\xi}{y}+1\right)^{-1},\quad dx=\frac{-\frac{1}{y}\,d\xi}{\left(\frac{\xi}{y}+1\right)^2}$$

$$= y^2\int_0^\infty \frac{(1-e^{-\xi})\,d\xi}{\xi\,(\xi+y)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-\frac{y}{x}-y}}{\frac{1}{x}+1}\,dx = y\int_{2y}^\infty \frac{(1-e^{-\xi})\,d\xi}{\xi\,(\xi-y)^2}$$

$$\frac{y}{x}+y=\xi$$

$$= \cancel{\int \frac{\quad}{\xi \quad \xi+y}}$$

$$= y^2\int_0^\infty \frac{(1-e^{-\xi-2y})\,d\xi}{(\xi+2y)(\xi+y)^2}$$

$$\frac{T_1}{R_1} = e^{-y}\,\frac{\int_0^\infty (1-e^{-\xi})\frac{d\xi}{\xi(\xi+y)^2}}{\int_0^\infty (1-e^{-\xi-2y})\frac{d\xi}{(\xi+2y)(\xi+y)^2}}$$

$$= e^{-y}\cdot k(y).$$

$y\to 0.\quad k(y)=1$

$y\to\infty\quad k(y)= \dfrac{\int_0^\infty (1-e^{-\xi y})\frac{d\xi}{\xi(\xi+1)^2}}{\int_0^\infty (1-e^{-\xi y-2y})\frac{d\xi}{(\xi+2)(\xi+1)^2}}$

>0

Captureされる数，　$C = \dfrac{\sigma(1-e^{-y})}{1+\sigma\left(1-\frac{\varepsilon}{1+\sigma}\right)}$.

transmitする数，　$T = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n$

$$T = e^{-y}\left(1 + \frac{k(y)}{1+\underset{(e^{-y})}{k(y)}} \frac{P_1(1-\varepsilon)}{(1+\sigma)} \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1+\sigma}}\right)$$

reflectされる数

$$R = \frac{k(y)}{1+e^{-y}k(y)} \frac{P_1(1-\varepsilon)}{(1+\sigma)} \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1+\sigma}}$$

$y \to \infty$.　$\varepsilon \to k(\infty)$

$$\cancel{R = \frac{k(y)P_1(1-\varepsilon(\infty))}{\cancel{(1+\sigma)}\sigma\left(1-\frac{\varepsilon(\infty)}{1+\sigma}\right)}}$$

$$\varepsilon = \frac{\left\{\int_{z=0}^{h}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{z}{\lambda}}\left(1-e^{-\frac{h-z}{\lambda\cos\theta}}\right)\sin\theta\,d\theta\,dz + \int_{z=0}^{h}\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\frac{z}{\lambda}}\left(1-e^{\frac{z}{\lambda\cos\theta}}\right)\sin\theta\,d\theta\,dz\right\}}{2\lambda\left(1-e^{-\frac{h}{\lambda}}\right)}$$

$$= 1 - \underbrace{\{}_{\frac{1}{2\lambda(1-e^{-\frac{h}{\lambda}})}}\int_0^1 \frac{e^{-\frac{h}{\lambda x}}\left(e^{\frac{h}{\lambda x}-\frac{h}{\lambda}}-1\right)}{\frac{1}{\lambda x}-\frac{1}{\lambda}}dx - \int_0^1 \frac{\left(1-e^{-\frac{h}{\lambda x}-\frac{h}{\lambda}}\right)}{\frac{1}{\lambda x}+\frac{1}{\lambda}}dx\}$$

$$= 1 - \frac{y^2}{2(1-e^{-y})}\int_y^\infty \left(\frac{e^{-y}-e^{-\zeta}}{\zeta - y} + \frac{1-e^{-\zeta-y}}{\zeta+y}\right)\frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

$$= 1 - \frac{y^2}{2(1-e^{-y})}\int_0^\infty \left\{\frac{e^{-y}(1-e^{-\zeta})}{\zeta(\zeta+y)^2} + \frac{1-e^{-\zeta-2y}}{(\zeta+2y)(\zeta+y)^2}\right\}d\zeta$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{(1-e^{-\zeta})d\zeta}{\zeta(\zeta+y)^2}, \quad \int_0^\infty \frac{(1-e^{-\zeta-2y})}{(\zeta+2y)(\zeta+y)^2}d\zeta}$$

$$\frac{1}{\zeta(\zeta+y)^2} = \frac{A}{\zeta} + \frac{B\zeta + C}{(\zeta+y)^2} = \frac{A\zeta^2 + 2A\zeta y + Ay^2 + B\zeta^2 + C\zeta}{\zeta(\zeta+y)^2}$$

$B = -A \qquad C = -2Ay. \qquad A = y^{-2}.$

$$= \frac{1}{\zeta y^2} - \frac{\zeta - 2y}{(\zeta+y)^2 y^2} = \frac{1}{\zeta y^2} - \frac{1}{(\zeta+y)y^2} + \frac{3}{(\zeta+y)^2 y}$$

$$\int_0^\infty \frac{(1-e^{-\zeta})}{\zeta(\zeta+y)^2}d\zeta = \frac{1}{y^2}\int_0^\infty \frac{1-e^{-\zeta}}{\zeta}d\zeta$$

$$\frac{(1-e^{-\frac{\zeta}{y}})d\zeta}{\zeta(\zeta}$$

$$\boxed{\frac{1}{y^2}\int_0^\infty \frac{(1-e^{-\frac{x}{y}})dx}{x(x+1)^2}, \quad \frac{1}{y^2}\int_0^\infty \frac{(1-e^{-\frac{x}{y}-2})}{(x+2)(x+1)^2}dx}$$

$y=1.$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x(x+1)^2}\,dx$

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-x-2}}{(x+2)(x+1)^2}\,dx$

$$T = e^{-y}\left(1+\frac{k(y)}{1+e^{-y}k(y)}\frac{\Omega}{2\pi}\frac{(1-e^{-y})(1-\varepsilon)}{1+\sigma}\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1+\sigma}}\right)$$

$$\cong e^{-y}\left(1+\underset{\left(\frac{1-e^{-y}}{1+e^{-y}}\right)}{\frac{\Omega}{2\pi}}\frac{1-\varepsilon}{1+\sigma}\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1+\sigma}}\right)$$

$\sigma \ll 1$ $$T \cong e^{-y}\left(1+\frac{\Omega}{2\pi}\frac{1}{1+\sigma}\Big\}\frac{1-e^{-y}}{1+e^{-y}}\right)$$

$\sigma \gg 1$ $$T \cong e^{-y}\left(1+\frac{\Omega}{2\pi}\frac{1-\varepsilon}{1+\sigma}\Big\}\frac{1-e^{-y}}{1+e^{-y}}\right)$$

~~$\sigma \cong 1.$~~

εあり多くない限り

$$e^{-y}\left(1+\frac{\Omega}{2\pi}\frac{1}{1+\sigma}\frac{1-e^{-y}}{1+e^{-y}}\right) \text{ !!!}$$

$$\|$$

$$I(x) = e^{-\mu x}\left(1+\frac{\Omega}{2\pi}\frac{\sigma_s}{\sigma_s+\sigma_c}\frac{1-e^{-\mu x}}{1+e^{-\mu x}}\right)$$

$$\mu = n(\sigma_s+\sigma_c)$$

$$\log I(x) = -\mu x + \log(\quad) \quad n(\sigma_s+\sigma_c)$$

$$\cong -\mu x + \frac{\Omega}{2\pi}\frac{\sigma_s}{\sigma_s+\sigma_c}\frac{\mu x}{2} = -\mu x\left(1-\frac{\Omega}{4\pi}\frac{\sigma_s}{\sigma_s+\sigma_c}\right)\text{!!!}$$

	0	1	2	3	4
$\frac{1-e^{-x}}{x(x+1)^2}$	1	$\frac{1-0.3679}{4} = 0.1580$	$\frac{1-0.13534}{2\times 9} = 0.04804$	$\frac{1-0.04979}{48} = 0.01979$	$\frac{1-0.01832}{4\times 36} = 0.00682$
$\frac{1-e^{-x-2}}{(x+2)(x+1)^2}$	$\frac{1-0.13534}{2} = 0.43233$	$\frac{1-0.04979}{3\times 4} = 0.07918$	$\frac{1-0.01832}{4\times 9} = 0.02729$	$\frac{1-0.006738}{5\times 16} = 0.0125$	$\frac{1}{6\times 25} = 0.008$

$$\int_5^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2x^2}\Big|_5 = 0.02$$

$$\int_4^\infty \frac{dx}{(x+1)^3} = 0.02$$

$k(1) \cong \cancel{1}.2$

$\varepsilon(1) \cong 1 - \frac{1}{2(1-0.3679)} \times 0.8 = 0.35$ $(= 0.36)$

$\frac{0.6321}{2} \quad 1.2642)\overline{10000}$ 0.7

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY