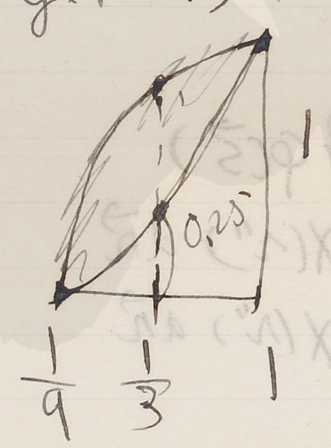
On the Theory of Collision of Neutrons with Deuterons

By Hideki Yukawa
and Shoichi Sakata

(Read March 13, 1937)

Reference: G. Breit and E. Feenberg, Phys. Rev. 50, 850, 1936.
E. Fermi, Ric. Scient. VII, 2, 1, 1936.
G. C. Wick, Rend. Linc.
Dunning, Pegram, Fink and Mitchell, Phys. Rev. 48, 265, 1935.
E. U. Condon and G. Breit, Phys. Rev. 49, 229, 1936

$\frac{1}{3}$



$\frac{8}{9}$

$\frac{2}{9}$ $\frac{8}{9}$

$\frac{3-1}{9} = \frac{2}{9}$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M'}(\Delta_r+\Delta_s)+J(r)P_{12}^M+J(r')P_{13}^M+K(r'')P_{23}^M-E\right)$$

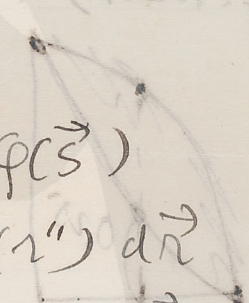
$$\times\left\{\varphi(\vec{s})\chi(r)\pm\varphi(\vec{s}')\chi(r')\right\}$$

$$=\left\{E_D-E-\frac{\hbar^2}{2M'}\Delta_s\pm K(r')\right\}\varphi(\vec{s})\chi(r)$$

$$+\left\{J(r')\pm J(r)\right\}\varphi(\vec{s}'')\chi(r'')$$

$$+\left\{K(r'')\pm E_D-E\right\}\varphi(\vec{s}')\chi(r')$$

$$\chi^*(r).$$



$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2M'}\Delta_s-(E-E_D)\right\}\varphi(\vec{s})$$

$$+\int\chi^*(r)J(r')\varphi(\vec{s}'')\chi(r'')\,d\vec{r}$$

$$\pm\int\chi^*(r)J(r)\varphi(\vec{s}'')\chi(r'')\,d\vec{r}$$

$$\vec{s}''=\cancel{2\vec{r}_1-\vec{r}_3}$$

$$\vec{s}+\frac{\vec{r}}{\sqrt{3}}=\frac{2(\vec{r}_3-\vec{r}_2)}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{r}''\qquad \frac{\vec{r}}{\sqrt{3}}-\vec{s}-\cancel{\frac{\vec{r}}{\sqrt{3}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{r}'$$

$$\sqrt{3}\vec{r}-\vec{s}=\frac{3\vec{r}_1-3\vec{r}_2-2\vec{r}_3+\vec{r}_1+\vec{r}_2}{\sqrt{3}}=\frac{2\vec{s}''}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{r}''=\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{s}+\frac{\vec{r}}{2}\qquad \sqrt{3}\vec{r}+\vec{s}=\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{s}'$$

$$\vec{s}''=\frac{3}{2}\vec{r}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{s}$$

§ Reduction of the Collision Problem
Estimation of the Collision Cross Section

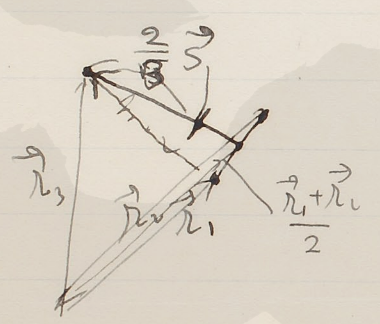
proton の coord. を $\vec{r}_1$

neutron の coord. を $\vec{r}_2, \vec{r}_3$

重心 $\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3}$

relative coord. of a proton and a neutron $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ $\quad \vec{r}' = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 \quad \Big| \quad \vec{r}'' = \vec{r}_3 - \vec{r}_2$

$\frac{2}{\sqrt{3}}$ (relative coord. of ~~the~~ a neutron ~~with respect~~ and the deuteron) $\vec{s} = \frac{2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\sqrt{3}}$ $\quad \vec{s}' = \frac{2\vec{r}_2 - \vec{r}_1 - \vec{r}_3}{\sqrt{3}} \quad \Big| \quad \vec{s}'' = \frac{2\vec{r}_1 - \vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\sqrt{3}}$



$$-\frac{\hbar^2}{2M}(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) = -\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{1}{3}\Delta_R + 2\Delta_r + 2\Delta_s\right)$$

$$\Delta_r + \Delta_s = \Delta_{r'} + \Delta_{s'} = \Delta_{r''} + \Delta_{s''}$$

重心の運動を separate し、Heisenberg の force を考へると $\vec{r}$ 及び $\vec{s}$ のみの関数は波動方程式は次の如くなる。 $M' = \frac{M}{2}$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M'}(\Delta_r + \Delta_s) + J(r)P_{12}^M + J(r')P_{13}^M + K(r'')P_{23}^M - E\right)$$

$$\times \Psi(\vec{r}, \vec{s}) = 0.$$

incident particle が excitation or disintegration を起し得ない様な low energy のものは

$$\psi(\vec{r}, \vec{s}) = \varphi(\vec{s})\chi(r) \pm \varphi(\vec{s}')\chi(r')$$

なる形と assume し得る。

$\chi(r)$ は deuteron の wave fn.

$$-\frac{\hbar^2}{2M'}\nabla_r^2\chi + J(r)\chi = E_D\chi \qquad E_D = -2.2\,\mathrm{MEV}$$

を満たす。 ± は (固有函数の) spin の関数によってきまる。即ち

$\alpha(1)\{\cancel{\alpha(2)+}\beta(3) - \beta(2)\alpha(3)\}$
$\beta(1)\{ \quad " \quad \}$] resultant spin $\frac{1}{2}$ $({}^1S)$

or $\alpha(1)\{\alpha(2)\alpha(3)$ $\quad \alpha(1)\{\alpha(2)\beta(3)+\beta(2)\alpha(3)\}$ $\quad \alpha(1)\beta(2)\beta(3)$

$\beta(1)\alpha(2)\alpha(3)$ $\longrightarrow$ $\beta(1)\{\alpha(2)\beta(3)+\beta(2)\alpha(3)\}$ $\quad \beta(1)\beta(2)\beta(3)$

resultant spin $\frac{3}{2}$ (quartet) ~~と doublet~~

$\frac{1}{2}$ (doublet) の重なったもの.

wave eq. の両辺に $\chi^*(r)$ を掛けて積分して

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2M'}\Delta_s\varphi(\vec{s}) - (E-E_0)\right\} + \int \chi^*(r)\left(J(r')\left(\varphi(\vec{s}'')\chi(r'') \pm J(r)\,\varphi(\vec{s}')\chi(r')\right)\right)d\vec{r}$$

$$+\int \chi^*(r)\,K(r')\left(\varphi(\vec{s}')\chi(r') \pm \varphi(s)\chi(r)\right)d\vec{r}$$

$$= \left\{-\frac{\hbar^2}{2M'}\Delta_s - (E-E_0)\right\}\varphi(\vec{s}) \pm \int \chi^*(r)K(r')\chi(r)\,d\vec{r}\}\,\varphi(s)$$

$$+\int \chi^*(r)\left\{J\left(\left|\frac{\vec{r}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{s}\right|\right)\varphi\left(\frac{3}{2}\vec{r}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{s}\right)\chi\left(\frac{\vec{r}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{s}\right) \pm J(r)\right\}d\vec{r}$$

$$\pm \cancel{\int \chi^*(r)J(r)\varphi(}\quad + \int \chi^*(r)\,K(r')\varphi(\vec{s}')\chi(r')\,d\vec{r}.$$

P_{r2}

この integrodifferential equation は

$$(\Delta + k^2)\varphi = F$$

なる形である. 但し, $k = \frac{2M'}{\hbar^2}(E-E_0)$

$$F = \frac{2M'}{\hbar^2}\int \chi^*(r)\left\{(J(r')\pm J(r))\varphi(\vec{s}'')\chi(r'') + K(r')\left(\varphi(\vec{s}')\chi(r') \pm \varphi(s)\chi(r)\right)\right\}d\vec{r}$$

$$\boxed{\varphi = e^{ikz} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{ik|\vec{s}-\vec{t}|}}{|\vec{s}-\vec{t}|}F(\vec{t})\,d\vec{t}}$$

$= e^{ikz}$ $\quad s \quad \vec{r} =$

asymptotic form を求めれば $s \gg t$ として

$$\boxed{\varphi = e^{ikz} - \frac{e^{iks}}{4\pi s}\int e^{-ik\vec{s}\vec{t}}F(\vec{t})\,d\vec{t}}$$

101. これを解くかはりに

$$-\frac{\hbar^2}{2M'} D_s^2 \varphi(\vec{S}) + U(S)\varphi(\vec{S}) = (E - E_D)\varphi(\vec{S})$$

を解く問題におきかへる.

但し, $U(S) = -U$ (const) for $s < b$
$= 0$ for $s > b$.

かくして求めた $\varphi(\vec{S})$ は元の φ とは異る. ~~φ のある~~ 重心のまはりのせまい範囲で φ を平均したものである.

しかし, さう考へては何も出来ないから, 先 (+) の場合には U を (b) H^3 の binding energy ($8.3\,MV - 2.2\,MV$) をよく出すやうに定める.

b としては deuteron の大いさ $b = 4.36 \times 10^{-13}$ cm 又は $b = 5.2 \times 10^{-13}$ cm とすると $U = 16.4$ MV, 13.8 MV となり

$$\sigma^{(+)}_{l=0} = \left.\begin{matrix}3.0\\3.6\end{matrix}\right\} \times 10^{-24}\,cm^2$$

(−) の場合の U は estimation が難しい. しかし, 弱い attraction 又は 弱い repulsion と考へられるから

例へば $U^{(-)} = \frac{1}{2}U^{(+)}$ とすると

$$\sigma^{(-)}_{l=0} = 11 \times 10^{-24}\,cm^2$$

又 $U^{(-)} = -U^{(+)}$ とすると

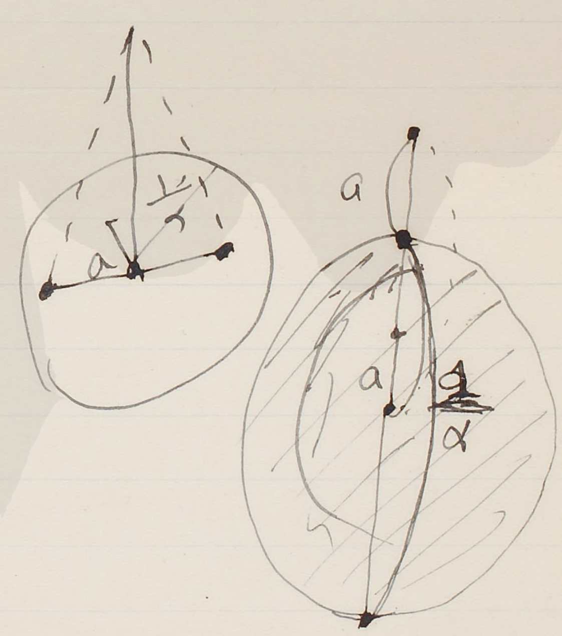
$$\sigma_{l=0} = 1.4 \times 10^{-24}\,cm^2$$

この中間の適当の値をとり, level が ~~stable or virtual~~ 出来ない, virtual level が出来ない程の それ等 平均をとると

$$\frac{1}{4}\sigma^{(+)} + \frac{3}{4}\sigma^{(-)}$$

が $3 \times 10^{-24}\,cm^2$

程度の値をとるであらう, と考へられる.



$$\frac{\sqrt{3}}{2} s \leq a + \frac{1}{2\alpha}$$

$$s \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\left(a + \frac{1}{2\alpha}\right)$$

$$\frac{2 + 4.36}{1.7}$$

$$1.7\overline{)6.36}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2a + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{4 + 4.36}{1.73}$$

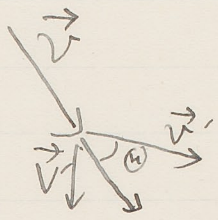
$$1.73\overline{)8.36}$$

(−)-state の virtual level はずつと上にあり，従つて resonance からは殆ど遠いであらうと考へられる．従つて capture の cross section は proton の時よりずつと小さいであらうと考へられる．

猶 Heisenberg の force を考へると多くの問題は複雑になる．capture の process は勿論 H. force を考へないといけない．

§ Effect of Chemical Binding of Deutrons on the Scatter Cross Section.

前節に述べた様に deuteron が free ならば neutron との衝突に関して isotropic に scatter されるとすると energy momentum の保存より



$$m\vec{v} = M\vec{V}' + m\vec{v}'$$

$$mv^2 = MV'^2 + mv'^2$$

$$u'^2 = \cancel{\left(\frac{M+m}{M}\right)v'^2 + \left(\frac{m}{M}\right)^2 v^2 - \frac{2m(M+m)}{M^2}\vec{v}\vec{v}'}$$

から して. $\cancel{(m+M)}$ 重心の momentum は

$$(m+M)\vec{U} = m\vec{v} = (m+M)\vec{U}' = m\vec{v}' + M\vec{V}' . \quad \therefore \vec{U} = \vec{U}'$$

relat. velocity は

$$\vec{u} = \vec{v} \qquad \vec{u}' = \vec{v}' - \vec{V}' = \frac{M+m}{M}\vec{v}' - \frac{m}{M}\vec{v} \qquad \underline{u' = u}$$

relat. ~~cos~~ coord に於ける ~~neutron~~ の scattering の angle φ は

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\vec{u}'}{uu'} = \cancel{\frac{\quad}{v}} \qquad \boxed{\cos\Theta = \frac{\vec{v}\vec{v}'}{vv'}}$$

$$\vec{u}\vec{u}' = \vec{v}\vec{v}' - \vec{v}\vec{V}' = \vec{v}\vec{v}' - \frac{m(M+m)}{2M}(v^2 - v'^2)$$

$$(m\vec{v} - M\vec{V}')^2 = m^2v'^2 = m^2v^2 - MmV'^2 .$$

$$2m\,\vec{v}\vec{V}' = (M+m)V'^2 = \frac{m(M+m)}{M}(v^2 - v'^2)$$

$$(m\vec{v} - m\vec{v}')^2 = M^2V'^2 = Mm(v^2 - v'^2)$$

$$2m\vec{v}\vec{v}' = (M+m)v'^2 - (M-m)v^2$$

$$uu' = v\sqrt{v'^2 + V'^2 - 2\vec{v}'\vec{V}'}$$

$$= v\sqrt{v'^2 + \frac{m}{M}(v^2 - v'^2) - \frac{M+m}{M}(v^2 - v'^2)}$$

$$= v\sqrt{v'^2 \frac{M+M+m-m}{M} v'^2 - 2v'^2 - v^2}$$

$$= vv'\sqrt{2 - \frac{v^2}{v'^2}} .$$

$$\vec{u}\vec{u}' = \vec{v}\vec{v}' - \vec{v}\left(\cancel{\vec{v}} \frac{m\vec{v}}{M} - \frac{m\vec{v}'}{M}\right) = \frac{M+m}{M}\vec{v}\vec{v}' - \frac{mv^2}{M}$$

$$uu' = v^2 \cancel{v'}$$

$$\frac{\vec{u}\vec{u}'}{uu'} = \frac{M+m}{M}\frac{\vec{v}\vec{v}'}{vv'}\left(\frac{v'}{v}\right) - \frac{m}{M} .$$

$$\cancel{m}\underline{u'^2 = m u^2}$$

~~従って~~ $$\cos\Theta = \frac{(M+m)v'^2 - (M-m)v^2}{2m\,vv'} = \frac{M+m}{2m}\left(\frac{v'}{v}\right) - \frac{M-m}{2m}\left(\frac{v}{v'}\right)$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{3+2x^2}{2\sqrt{3+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\sqrt{3+x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{3}{\sqrt{3+x^2}}\,dx$$

$$= 2$$

$$\frac{M+m}{\cancel{m}}\left(\frac{v'}{v}\right)^2 - 2m\cos\Theta\left(\frac{v'}{v}\right) - (M-m) = 0.$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{m\cos\Theta \pm \sqrt{m^2\cos^2\Theta + M^2 - m^2}}{M+m}$$

$$= \frac{m\cos\Theta \pm \sqrt{M^2 - m^2\sin^2\Theta}}{M+m}.$$

$$M^2 - m^2\sin^2\Theta > m^2\cos^2\Theta$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{M^2-m^2\sin^2\Theta} + m\cos\Theta}{M+m}.$$

$$\cos\varphi = \frac{m\cos\Theta + \sqrt{M^2-m^2\sin^2\Theta}}{M}\cos\Theta - \frac{m}{M}$$

$$d(\cos\varphi) = \frac{2\overset{m}{}\cos\Theta + \sqrt{M^2-m^2\sin^2\Theta} + \frac{m^2\cos^2\Theta}{\sqrt{M^2-m^2\sin^2\Theta}}}{M}\, d(\cos\Theta)$$

$$= \frac{2m\cos\Theta\sqrt{M^2-m^2\sin^2\Theta} + M^2 - m^2\sin^2\Theta + m^2\cos^2\Theta}{M\sqrt{M^2-m^2\sin^2\Theta}}$$

$$= \frac{2m\cos\Theta + (M^2-m^2\sin^2\Theta + m^2\cos^2\Theta)\sqrt{M^2-m^2\sin^2\Theta}}{M(M^2-m^2\sin^2\Theta)}\, d(\cos\Theta)$$

$\frac{M}{m} = n.$

$$d(\cos\varphi) = \frac{2\cos\Theta\sqrt{n^2-1+\cos^2\Theta} + n^2 - 1 + 2\cos^2\Theta}{n\sqrt{n^2-1+\cos^2\Theta}}\, d(\cos\Theta)$$

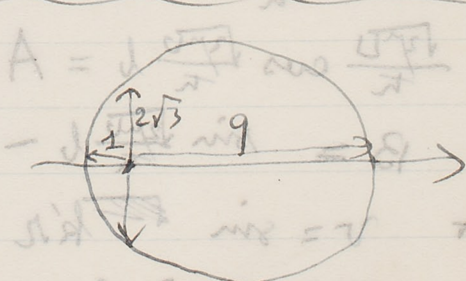
$n = 2,$

$$d(\cos\varphi) = \frac{2\cos\Theta\sqrt{3+\cos^2\Theta} + 3 + 2\cos^2\Theta}{2\sqrt{3+\cos^2\Theta}}\, d(\cos\Theta)$$

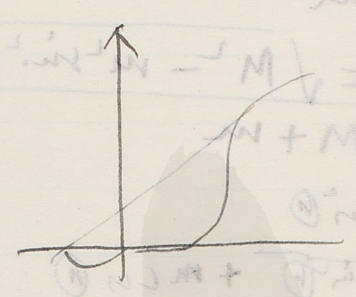
$\Theta = 0$: $\frac{4+3+2}{4} = \frac{9}{4}$

$\Theta = \frac{\pi}{2}$: $\frac{2\cdot 3}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{4}$

$\Theta = \pi$: $\frac{-4+3+2}{4} = \frac{1}{4}$



$$\overline{g(r)\psi}$$

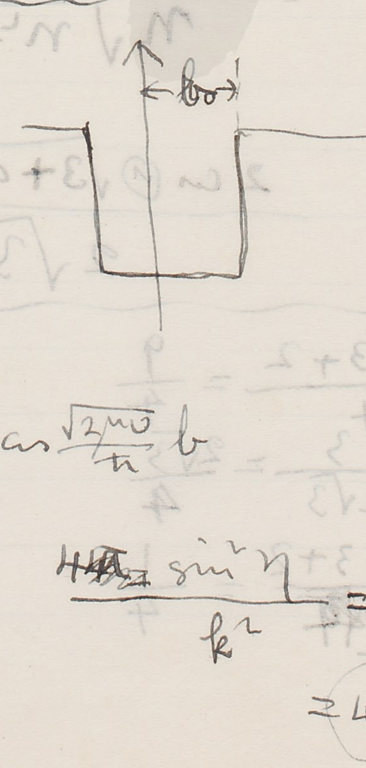


$$\frac{h^2}{8\pi\mu}\chi$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\chi - U\chi$$

$$\chi'' + \frac{2}{r}\chi' = \frac{2\mu}{\hbar^2}g(r)\chi$$

$$\chi = \frac{v}{r}, \qquad \underline{\frac{d^2v}{dr^2} = \frac{2\mu}{\hbar^2}U v}$$



$r < b$: $v = \sin\frac{\sqrt{2\mu U}}{\hbar} r$ $\quad k_0$

$r > b$: $v = Ar + B$

$\sin\frac{\sqrt{2\mu U}}{\hbar}b = Ab + B$

$\frac{\sqrt{2\mu U}}{\hbar}\cos\frac{\sqrt{2\mu U}}{\hbar}b = A$

$B = \sin\frac{\sqrt{2\mu U}}{\hbar}b - \frac{\sqrt{2\mu U}}{\hbar}b\cos\frac{\sqrt{2\mu U}}{\hbar}b$

$B = \frac{A\eta}{k}$

$\eta = \frac{Bk}{A}$

$v = \sin kr$

$v = \frac{A}{k}\sin(kr + \eta)$

$\frac{4\pi\sin^2\eta}{k^2} = 4\pi\frac{\sin^2\frac{Bk}{A}}{k^2}$

$= 4\pi\left(\frac{B}{A}\right)^2 =$

$\frac{B}{A} =$ $\quad 4\pi$

一般の nucleus の解き。

扨て Fermi によると 1つの陽子と neutron と ~~deuteron~~ の場合に extend すると、

$$-\frac{h}{2\pi i}\dot{\psi} = -\frac{h^2}{8\pi^2}\left(\frac{1}{m}\Delta\psi + \frac{1}{M}\Delta_X\psi\right) + U\psi + g(r)\psi$$

$$r = |\vec{x}-\vec{X}|$$

$$\overline{\psi}(\vec{x}\vec{X}) = \frac{1}{4\pi R^3}\iiint \psi(\xi-\cancel{x}, \vec{X})\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

$$-\frac{h}{2\pi i}\dot{\overline{\psi}} = -\frac{h^2}{8\pi^2}\left(\frac{1}{m}\Delta\psi + \frac{1}{M}\Delta_X\psi\right) + U\overline{\psi} + \overline{g(r)\psi}.$$

$$\chi = \frac{v}{r}.$$

$$\psi(\vec{x}\vec{X}) = \overline{\psi}(\vec{x}\vec{X})\chi(r).$$

$$r' = |\vec{\xi}-\vec{X}|$$

$$\chi'' + \frac{2}{r}\chi' = \frac{8\pi^2}{h^2}\frac{mM}{m+M}g(r)\chi(r).$$

$$\overline{g(r)\psi} = \frac{3}{4\pi R^3}\iiint_{(\xi-x)} g(r)\overline{\psi}(\vec{x}\vec{X})\chi(r')\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

$$= \frac{4\pi\overline{\psi}(\vec{x}\vec{X})}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_0^\infty g(r)v(r)r\,dr$$

$$\int_0^\infty g(r)v(r)r\,dr \approx \cancel{\int_0^\infty g(r)v(r)} = -\frac{h^2 a}{8\pi^2\mu}$$

$$\overline{g(r)\psi} = -\frac{1}{\frac{4\pi}{3}\pi R^3}\cdot\frac{h^2 a}{2\pi\mu}\cdot\overline{\psi}(\vec{x},\vec{X}). \quad r \le R$$

$$= 0 \quad r \ge R.$$

$$u_m e^{\frac{2\pi i}{h}\vec{p}} \to u_n e^{\frac{2\pi i}{h}\vec{p}'}.$$

$$\cancel{u_m^* u_n}$$

$$\frac{4\pi^2}{h}\cdot\left(\frac{h^2 a}{2\pi\mu}\right)^2\cdot\frac{\overset{dw}{p'}\,m}{h^3}\cdot\frac{1}{v}\left|\iint u_m^*(\vec{X})e^{-\frac{2\pi i}{h}\vec{p}\vec{x}}u_n(\vec{X})e^{\frac{2\pi i}{h}\vec{p}'\vec{x}}\,d\vec{x}\,d\vec{X}\right|^2 \quad \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{3}\pi R^3}\right)$$

$$\frac{\overset{dw}{4\pi p'^2 dp'}}{h^3} = \frac{\overset{dw}{4\pi p' m}}{h^3}dE \quad = \frac{m^2 a^2}{\mu^2}\cdot\frac{v'}{v}\left|\iiint u_m^*(\vec{X})u_n(\vec{X})\,d\vec{X}\right|^2$$

$$e^{-\frac{2\pi i}{h}\vec{p}\vec{X} + \frac{2\pi i}{h}\vec{p}'\vec{X}}$$

$$\frac{p\,dp}{m} = dE,$$

$$\frac{m^2}{\mu^2} = \left(\frac{M+m}{M}\right)^2 = 4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$\left(\frac{v'}{v}\right) d(\cos\Theta)$$

$$\frac{v'}{v} = \int_{-1}^{+1} \frac{x+\sqrt{n^2-1+x^2}}{n+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{n+1}\int_{-1}^{+1}\sqrt{(n^2-1)+x^2}\,dx = \frac{1}{2(n+1)}\left\{2n+(n^2-1)\log\frac{n+1}{n-1}\right\}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{x\sqrt{(n^2-1)+x^2}+(n^2-1)\log\left(x+\sqrt{(n^2-1)+x^2}\right)\right\}$$

$$= \sqrt{(n^2-1)+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{\ \ ,,\ \ }} + \frac{(n^2-1)}{x+\sqrt{\ \ ,,\ \ }}\left\{1+\frac{x}{\sqrt{\ \ }}\right\}$$

$$= \sqrt{(n^2-1)+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{(n^2-1)+x^2}} + \frac{\{(n^2-1)+x^2-x^2\}\{\sqrt{\ \ }+x\}}{\sqrt{(n^2-1)+x^2}}$$

$$= \sqrt{\ \ \ \ } + \frac{x^2+\{(n^2-1)+x^2\}-x^2}{\sqrt{\ \ \ \ }}$$

$$= 2\sqrt{\ \ ,,\ \ }$$

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\frac{1}{2}$$

$$\sigma_{m,n}\,dw = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 a^2 \frac{v'}{v}\,dw \left|\iiint u_m^* u_n e^{\frac{2ai}{\hbar}(\vec{p}'-\vec{p})\vec{x}}\,d\vec{x}\right|^2$$

i) free deuteron.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 a^2 \frac{v'}{v}\,dw$$

$$\sigma_f = \int_{\cos\Theta=-1}^{1} 2\pi\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 a^2 \left(\frac{v'}{v}\right) d(\cos\Theta)$$

$$= 2\pi\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 a^2 \cdot \int_{-1}^{1} \frac{m\,\cancel{\cos}\,x \pm \sqrt{M^2-m^2+m^2x^2}}{M+m}\,dx$$

$$= 2\pi\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 a^2 \cdot \frac{1}{(1+n)} \int_{-1}^{+1} \left(x \pm \sqrt{n^2-1+x^2}\right) dx$$

$$= 2\pi\left(\frac{1+n}{n^2}\right) a^2 \int_{-1}^{+1} \left(x+\sqrt{(n^2-1)+x^2}\right) dx$$

$$= 2\pi a^2\left(\frac{1+n}{n^2}\right) \cancel{\log}\ \frac{1}{2}\left(x\sqrt{(n^2-1)+x^2} \pm (n^2-1)\log\left(x+\sqrt{(n^2-1)+x^2}\right)\right)$$

$$= 2\pi a^2\left(\frac{1+n}{n^2}\right)\cdot \left\{n + \frac{(n^2-1)}{2}\log\frac{1+n}{n-1}\right\}$$

$$= 2\pi a^2\left(\frac{1+n}{n}\right)^2 \left\{\frac{n}{1+n} + \frac{n-1}{2}\log\frac{n+1}{n-1}\right\}$$

$$= 4\pi a^2\left(\frac{1+n}{n}\right)^2 \frac{1}{2}\left\{\frac{n}{1+n} + \frac{n-1}{2}\log\frac{n+1}{n-1}\right\}$$

ii) strongly bound ~~electron~~ deuteron.

$$\sigma_b = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 a^2 \cdot 4\pi.$$

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_f} = \frac{2}{\frac{n}{1+n} + \frac{n-1}{2}\log\frac{n+1}{n-1}}$$

$n=1$: $\frac{\sigma_b}{\sigma_f} = 4$

$n=2$: $\frac{\sigma_b}{\sigma_f} = \frac{2}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\log 3} = \frac{1}{0.333 + \frac{1.0986}{4}}$

$= \frac{1}{0.608} = 1.7$

$\sigma_f = \left(\frac{3}{2}\right)^2 4\pi a^2$

$\sigma_f = \left(\frac{1}{2}\right)^2 4\pi a^2$

$\left(\times \frac{1}{2}\frac{1}{13} + \frac{1}{2}\right)$

$\left(\log 3\right)$

$n=12$: $\frac{\sigma_b}{\sigma_f} = \frac{2}{\frac{12}{13} + \frac{11}{2}\log\frac{13}{11}}$

$= \frac{2}{\frac{12}{13} + \frac{11}{2}\left(\frac{2}{11} - \frac{2^2}{2(11)^2}\right)}$

$= \frac{2}{2 - \left(\frac{1}{13} + \frac{2}{(11)^2}\right)} \cong 1.$

Dunning etc. fast slow

D_2O. $1.71 \times 10^{-24}\,cm^2$ $4.0 \times 10^{-24}\,cm^2$.

その中幾らかは binding の影響を受けている.

slow (bound) ~~slow~~ free (~~x~~)

D_2: 8.0×10^{-24} $8. \times 0.608 \times 10^{-24}$

O: 3.3×10^{-24} 3.3×10^{-24}

D_2O: 11.3×10^{-24}; 8.1×10^{-24}

$\frac{11.3}{8.1} = \underline{1.4}$

8 3

C-group では strongly ~~8.0 の中では~~ bound と考へなければならないとすると、ありうる

$\frac{\sigma_{c\,group}}{\sigma_f} = 1.5$ とすると.

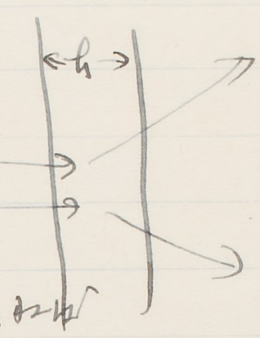
$\frac{8.0}{1.5} = 5.3 + 3.3 = 8.6$

$\frac{11.3}{8.6} = \underline{1.3}$

3

2.7

§ ~~Single and Double~~ Scattering of Neutrons by a Layer of Heavy Water



Single Scattering 丈考へると、その~~結果~~

normal incidence の時は その儘透過する prob. は

$$T_0 = e^{-y}. \qquad y = hn, \quad \mu = \sum_i n_i \sigma_i$$

一回 scatter して透過する確率は ~~daughter~~ を考へれば

$$T_1 = 2\pi p(\theta)\sin\theta\, d\theta\, \frac{\cancel{e^{-\frac{h}{\lambda}} - e^{-\frac{h}{\lambda\cos\theta}}}\; e^{-y} - e^{-\frac{y}{\cos\theta}}}{\frac{1}{\cos\theta} - 1} \qquad \theta \le \frac{\pi}{2}$$

一回 scatter して reflect back される確率は

$$R_1 = 2\pi p(\theta)\sin\theta\, d\theta\, \frac{1 - \cancel{e^{-\frac{h}{\lambda} + \frac{h}{\lambda\cos\theta}}}\; e^{-y + \frac{y}{\cos\theta}}}{1 - \frac{1}{\cos\theta}} \qquad \theta \ge \frac{\pi}{2}$$

但し、$p(\theta)$ としては C-group に対しては

$$p(\theta) = \frac{1}{4\pi}$$

しかるときは

$$p(\theta) = C\, \frac{2\cos\theta\sqrt{3+\cos^2\theta} + 3 + 2\cos^2\theta}{2\sqrt{3+\cos^2\theta}}\, d(\cos\theta)$$

$$\frac{1}{2\pi C} = \int_{-1}^{1}\left(x + \frac{3}{2\sqrt{3+x^2}}\right)dx$$

$$= 2 + \frac{3}{2}\log 3 - \frac{3}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$$

$$= 2 + \frac{3}{2}\log 3 - \frac{3}{2}\log\left(x + \sqrt{3+x^2}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= 2$$

$$p(\theta) = \frac{2\cos\theta\sqrt{3+\cos^2\theta} + 3 + 2\cos^2\theta}{8\pi\sqrt{3+\cos^2\theta}}\, d(\cos\theta).$$

その velocity v $\quad v' = v\dfrac{\sqrt{3+\cos^2\theta}+\cos\theta}{3}$

$\dfrac{dv'}{v} = \dfrac{\qquad}{3}$

$z = \dfrac{v'}{v}$

$3+\cos^2\theta = \dfrac{9z^2}{4} + \dfrac{1}{4z^2} + \dfrac{3}{2} + 3 = \left(\dfrac{3z}{2}+\dfrac{1}{2z}\right)^2$

$\cos\theta = \dfrac{3z}{2} - \dfrac{1}{2z} = \dfrac{(3z^2-1)}{2z}$

$d(\cos\theta) = \dfrac{dz}{2}\left(3 - \dfrac{1}{z^2}\right)$

$2\pi\, p(\theta)\, d(\cos\theta) = \dfrac{2\left(\frac{3z}{2}-\frac{1}{2z}\right)\left(\frac{3z}{2}+\frac{1}{2z}\right) + \frac{3}{2} + \left(\frac{3z}{2}-\frac{1}{2z}\right)^2}{4\cdot\left(\frac{3z}{2}+\frac{1}{2z}\right)}$

$18z^4$

$\times \dfrac{dz}{4}\left(3 - \dfrac{1}{z^2}\right)$ $\qquad (3z^2-1)\,6z^2$

$= \dfrac{(3z^2-1)\,dz\left\{(3z^2-1)(3z^2+1) + 6z^2 + (3z^2-1)^2\right\}}{4\times 2\,(3z^2+1)\,z^3}$

$= \dfrac{(3z^2-1)\,9z\,dz}{4(3z^2+1)} = \dfrac{9(3\varepsilon-1)}{8(3\varepsilon+1)}\,d\varepsilon$

$\dfrac{E'}{E} = \varepsilon$, $d\varepsilon = 2z\,dz$ $\qquad$ 綺麗な energy distribution !!!

二回の collision を起せば
$P_2 = (1-e^{-y})\,\varepsilon$

三回の collision を起せば
$P_3 = (1-e^{-y})\,\varepsilon^2$,

. . . .

同様な衝突に於けるenergy distributionは Condon, Breit によって計算せられた。夫れに依れば、5回衝突した後でenergyがはじめの $\frac{1}{q^4}$ 以下($\frac{1}{q^5}$ 以上)になるものは 凡そ 1.15×10^{-4} 程度である。

従って h 程厚さの paraffin を通過する際に出来る slow neutron でその $\frac{1}{q^4}$ 以下のenergyのものは

$$(1-e^{-y})\,\varepsilon^4\times1.15\times10^{-4}$$

程度である。

全体厚さ5粍とすると、

$$e^{-\frac{5\times10^{23}}{3}\times\frac{4}{1.7}\times10^{-24}}=e^{-\frac{2}{3}}\ \text{or}\ e^{-\frac{1.7}{6}}$$

$$=0.5117,\ \text{or}\ 0.87558$$

$$(1-e^{-y})=0.49\quad\text{or}\quad0.24$$

$$\varepsilon\cong0.44\quad\text{or}\quad0.3$$

oxygen による scattering を考慮すれば少し大きくなる。

28

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY