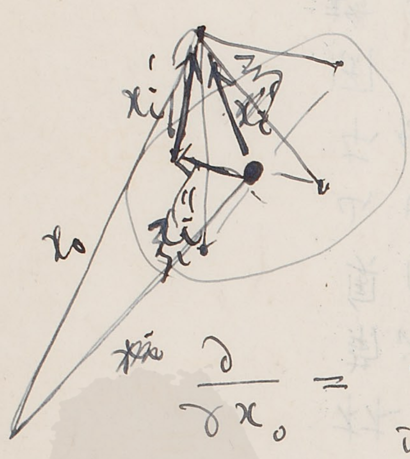
On the Reduction of Nuclear Collision Problem

$\Psi(q_0 q_1 \cdots q_N)$

i) ~~Elimination~~ Separation of Coordinates of Centre of mass, Relative (relative to nuclear centre) Coord., and Internal Coordinate

○ユ. ○ナ. ○サ. ○ワ. ○ワ, キ.

$\frac{1}{2}\{p_0^2 + p_1^2 + \cdots + p_N^2\}$



$x_i' = x_0 - x_i$

$X = \frac{x_0 + \sum x_i}{N+1}$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i'} + \frac{1}{N+1}\frac{\partial}{\partial X}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i'} + \frac{1}{N+1}\frac{\partial}{\partial X}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} = \sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial x_j'} + \left(\frac{1}{N+1}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{2}{N+1}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial X}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} + \left(\frac{1}{N+1}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{2}{N+1}\frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial X}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{1}{N+1}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \boxed{2\underbrace{\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2}}_{2N} + 2\underbrace{\sum_{i<j}\frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial x_j'}}_{n(n+1)}}$$

$\frac{n(n-1)}{2}$

$$= \frac{1}{N+1}\frac{\partial^2}{\partial X^2}$$

$\xi = x_0 - \frac{1}{N}\sum x_i = \frac{1}{N}\sum_i x_i'$

$x_N'' = \frac{N+1}{N}$

N.

$x_i' = \xi - x_i'' = \frac{1}{N}\sum_i x_i' - x_i''$

$$\boxed{x_i'' = \frac{1}{N}\sum_j x_i' - x_i'}$$

$\sum x_i'' = 0$

$(\xi, x_1'' x_2'' \cdots x_{N-1}'')$.

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} = \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\partial}{\partial x_j''} - \frac{\partial}{\partial x_i''} =$$

$\frac{\partial}{\partial x_N'} = \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\partial}{\partial x_j''}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} = \frac{1}{N^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{N^2}\sum_{\ell, j}\frac{\partial^2}{\partial x_\ell'' \partial x_j''} + \frac{\partial^2}{\partial x_i''^2} + \frac{2}{N^2}\sum_j \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_j''} - \frac{2}{N}\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_i''} - \frac{2}{N}\sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_i'' \partial x_j''}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_N'^2} = \frac{1}{N^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{N^2}\sum_{\ell, j}\frac{\partial^2}{\partial x_\ell'' \partial x_j''} + \frac{2}{N^2}\sum_j \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_j''}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i'^{2}} = \frac{1}{N}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{N}\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i''\partial x_j''} + \sum_i\frac{\partial^2}{\partial x_i''^2}$$

$$+ \cancel{\frac{2}{N}\sum_j\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial x_j''}} - \cancel{\frac{2}{N}\sum_i\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial x_i''}} - \frac{2}{N}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i''\partial x_j''}$$

$i\neq j$ $$\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i'\partial x_j'} = \frac{1}{N^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{N^2}\sum_{k,l}\frac{\partial^2}{\partial x_k''\partial x_l''} + \frac{\partial^2}{\partial x_i''\partial x_j''}$$

$$+ \frac{2}{N^2}\sum_k\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial x_{jk}''} - \frac{1}{N}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial x_i''} - \frac{1}{N}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial x_j''}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i'\partial x_N'} = \frac{1}{N^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{N^2}\sum_{k,l}\frac{\partial^2}{\partial x_k''\partial x_l''} - \frac{2}{N}\sum_k\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial x_k''}$$

$$\sum_{i<j}\frac{\partial^2}{\partial x_i'\partial x_j'} = \frac{N-1}{2N}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{N-1}{2N}\sum_{k,l}\frac{\partial^2}{\partial x_k''\partial x_l''} - \sum_{i<j}\frac{\partial^2}{\partial x_i''\partial x_j''}$$

$1 - \frac{1}{N}$

$\frac{N-1}{N^2}$

$i \neq j \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial x_j'} = \frac{1}{N^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{N^2}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_k'' \partial x_l''} + \frac{\partial^2}{\partial x_i'' \partial x_j''} + \frac{2}{N^2}\sum_k \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_k''}$

$\cancel{\frac{N(N-1)(N-2)}{2}}$ $\pm \frac{1}{N}\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_i''} \pm \frac{1}{N}\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_j''} - \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_i'' \partial x_k''} - \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_j'' \partial x_k''}$

$\frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial x_N'} = \frac{1}{N^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{N^2}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_k'' \partial x_l''} + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_N}} + \frac{2}{N^2}\sum_k \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_k''}$

$(N-1)^2$ $\pm \frac{1}{N}\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_i''} - \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_i'' \partial x_k''}$

$\sum_{i<j} \frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial x_j'} = \frac{N-1}{2N}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{N-1}{2N}\sum_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial x_k'' \partial x_l''} + \sum_{i<j} \frac{\partial^2}{\partial x_i'' \partial x_j''}$

$+ \frac{N-1}{N}\sum_k \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_k''} - \cancel{\frac{N-1}{N}\sum \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_k''}} - \frac{N-1}{N}\sum_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial x_k'' \partial x_l''}$

$= \frac{N-1}{2N}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\cancel{N-1}}{N}\sum_{i<j} \frac{\partial^2}{\partial x_i'' \partial x_l''} - \frac{N-1}{2N}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i''^2}$

$\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} = \frac{1}{N}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{N}\sum_{i<j} \frac{\partial^2}{\partial x_i'' \partial x_l''} - \cancel{\frac{N}{2N}} + \frac{N-1}{N}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i''^2}$

$2\sum_{i<j} \frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial x_j'} + 2\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} = \frac{N+1}{N}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{N}\sum_{i<j} \frac{\partial^2}{\partial x_i'' \partial x_l''}$

$+ \frac{N-1}{N}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i''^2}$

$2N-2-N+1$

$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{1}{N+1}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{N+1}{N}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{N-1}{N}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i''^2} - \frac{2}{N}\sum_{i<j} \frac{\partial^2}{\partial x_i'' \partial x_l''}$

ii) Relative Orientation of the nucleus ~~and~~ with respect to the ~~out~~ external particle.

ここでは coord の origin の移動ばかり行ってきた。即ち (x_i, y_i, z_i) の comp 毎にいつも linear な transformation をやったのである。~~又~~ coordinate axis の方向は何でもよかった。
nucleus の angular momentum は collision がおこらぬ限り const.
~~故、その方向を~~ であり、その vector を [illegible] とする。これは nucleus の
~~(the origin の位置には関係しない)~~
centre of mass を origin としている。nucleus の方

iii) 上述のごとく、kinetic energy ~~の~~ Operator は

$$-\frac{\hbar^2}{4\pi^2}\left\{\frac{1}{2m(N+1)}\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right)+\frac{N+1}{2mN}\Delta+f\left(\frac{\partial}{\partial x_i''},\cdots\right)\right\}$$

なる形をとる。即ち $m(N+1)$ なる mass の全体の重心の kinetic energy と $\frac{2mN}{N+1}$ なる reduced mass を有し、nucleus の中心に対する external particle の relative motion の ~~coord.~~ kin. energy 及び $3(N-1)$ の degree of freedom の internal motion の kinetic energy にわけられる。
次に potential energy は relative coord. $x_i' = x_0 - x_i$ の函数である。いま、

$$\xi = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i'$$

$$x_i'' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i' - x_i' \qquad i=1,\cdots N-1$$

or $x_i' = \xi - x_i''$ $\qquad i=1,\cdots N-1$

$$\frac{1}{N}x_N' = \xi - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} x_i' = \frac{1}{N}\xi + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} x_i'' = \frac{1}{N}(\xi - x_N'')$$

$x_j - x_i = x_i' - x_j' = x_j'' - x_i''$

$$V(x_1', x_2', \cdots ; x_j - x_i, \cdots)$$
$$= V(\xi - x_1'', \xi - x_2'', \cdots ; x_j'' - x_i'', \cdots)$$

~~$\chi(\xi)$~~ $u(\xi)\,X(x_i'')$

$u(\xi)\,V(\xi)\cdot X\,X(\xi)$

このようにして、nucleus と external particle よりなる system の Hamiltonian は

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m(N+1)} + \frac{N+1}{2mN}\vec{p}^{\,2} + \sum V(\vec{\xi}-\vec{x}_i'') + H'(\vec{x}_i'', \vec{p}_i'')$$

なる形になる。但し H' は nucleus に於ける internal motion の Hamiltonian である。

$\left.\begin{array}{l}\vec{P} \text{ は } \vec{X} \\ \vec{p} \text{ は } \vec{\xi} \\ \vec{p}_i'' \text{ は } \vec{x}_i''\end{array}\right\}$ の ~~cony~~ canonical conjugate

external particle と nucleus との interaction

$$\sum V(\vec{\xi}-\vec{x}_i'')$$

を neglect すれば、solution は

$$u(\vec{\xi})\chi(\vec{x}_i'')$$

なる形になる。互 V があれば此の近似解として molecule の時と同じ方法をとる。

!!! 即ち nucleus 中での internal particle の ~~motion の~~ velocity は external particle のそれに比して大きいとし、従って

$$\sum V(\vec{\xi}-\vec{x}_i'') + H'(\vec{x}_i'', \vec{p}_i'')$$

なる Hamiltonian を満足する eigenfunction を求めると

$$\chi(\vec{x}_i'', \vec{\xi})$$

なる解が、~~そこで~~ $\vec{\xi}$ を parameter として含んで居る。

そこで $u(\vec{\xi})\,\chi(\vec{x}_i'', \vec{\xi})$

なる形を assume し、

$$H\,u(\vec{\xi})\chi(\vec{x}_i'' \vec{\xi}) = E\,u(\vec{\xi})\chi(\vec{x}_i'' \vec{\xi})$$

とおいて、両辺に $\bar{\chi}(\vec{x}_i'' \vec{\xi})$ をかけて積分すると。$\chi(\vec{x}_i'' \vec{\xi})$ は $\vec{\xi}$

!!! の変化に対して大して変化しないとすれば、

$$\left(\frac{N+1}{2MN}\vec{p}^{\,2} + W(\vec{\xi})\right)u = E\,u$$

$$W(\vec{\xi}) \cong W + V_e'(\vec{\xi})$$

が得られる。

○ 喰は excitation, disintegration の probability が得られる場合には 積分方程式が得られる.

○ ~~これ~~ これは external particle はどこまでも external particle として scattering されるとしたが、実際は eigenfunction の symmetry の性質をも考慮せねばならぬ。すると ~~~~ external particle と internal particle とがいれかわる可能性が生ずる（symmetry の性質を考へなくても之は勿論ありうる）その場合には例へば $\vec{x}_0$ ~~~~ と $\vec{x}_1$ とがいれかはったとすると、

$\vec{X}, \vec{P}$ は元の通り. $\xi = x_0 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ のかはりに $\frac{1}{N}x_1$

$$\bar{\xi} = x_1 - \frac{1}{N}\sum_{i=2}^{N} x_i - \frac{1}{N}x_0 = \xi + \frac{N+1}{N}(x_1 - x_0) = \xi - \frac{N+1}{N}x_1'$$

$i>1$ $\quad \bar{x}_i' = x_1 - x_i = (x_0 - x_i) - (x_0 - x_1) = x_i' - x_1'$

$i=0$ $\quad \bar{x}_0' = x_1 - x_0 = -x_1'$

$$\bar{x}_i'' = \frac{1}{N}\sum_{i=0,2,\cdots N} \bar{x}_j' - \bar{x}_i' \qquad j = 0, 2, \cdots N-1$$

$i \geq 1$
$$= \frac{1}{N}\left(-x_1' + x_2' + \cdots + x_{N-1}' - (N-1)x_1'\right) - \bar{x}_i'$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=2,\cdots N-1,N} x_j' - x_1' - x_i' + x_1'$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1,2,\cdots N} x_j' - x_i' - \frac{1}{N}x_1' + x_i' - x_1' - x_i' + x_1'$$

$$= x_i'' - \frac{1}{N}x_1'$$

$$= x_i'' + x_i' - \frac{N+1}{N}x_1' = \cancel{x_i'' + \xi - x_i'' - \frac{N+1}{N}x_1'}$$

$-x_i' + x_1'$

$$\bar{x}_0'' = \frac{1}{N}\sum_{i=0,2,\cdots N} \bar{x}_j' - \bar{x}_0' - \frac{1}{N}x_1'$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=2,\cdots N}(x_j' - x_1') + x_0' = \cancel{\frac{1-N}{N}x_0'} + \frac{1}{N}\sum_{j=1,\cdots N-1} x_j'$$

$$-\frac{N-1}{N}x_1' - \frac{1}{N}x_1'$$

$$\cancel{+ \ldots x_1'} = \cancel{\frac{1-N}{N}x_0' + \xi} \quad x_1'' + \frac{1-N}{N}(x_0' \ldots)$$

$$\frac{-N+1}{N} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N} + 1$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1,2,\cdots N-1} x_j' - x_1' + x_1' = x_1'' + \frac{N+1}{N}x_1'$$

甚だ御迷惑ながら、本年度も大体前年度の通り、下記の順序で御講演を御願ひ致しますから、豫め御承知置下さい、

岡谷　様
渡瀬　様
岡部　様
青木　様
伏見　様
坂田　様
浅田　様
大森　様
澤田　様
吉永　様
八木　様
石黒　様
湯川
林　様
菊池　様
奥田　様
山口
東出　様
関　様
橋元　様

$$\frac{1\ \cancel{0.2\times10^{22}}}{0.2\times10^{20}\times5\times10^{3}} = \times10^{-23}$$

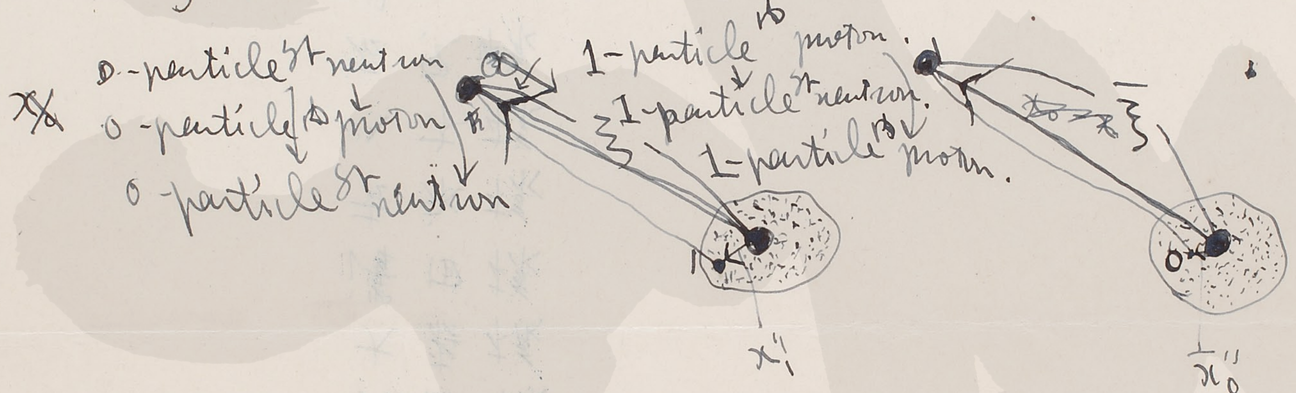
幹事　山口、湯川

$$\begin{cases} \bar{\xi} = \xi - \frac{N+1}{N}x_1' = \frac{1}{N}\xi + \frac{N+1}{N}x_1'' & x_1' = \xi - x_1'' \\ \bar{x}_i'' = x_i'' - \frac{1}{N}x_1' = x_i'' - \frac{\xi}{N} + x_1'' & i = 2, \cdots N-1 \\ \bar{x}_0'' = x_1'' + \frac{N-1}{N}x_1' = x_1'' + \frac{N-1}{N}\xi + \frac{N-1}{N}x_1'' \end{cases}$$

x_0 が p へ入り、x_1 が n へ来る時の transition prob. は $x_1' = x_0 - x_1$ が nuclear radius の order の所だけが contribute する。

$$\iint \tilde{u}(\bar{\xi})\,\tilde{X}'(\bar{x}_0'', \bar{x}_i'' \cdots)\,u(\xi)\,X(x_1'', x_i'' \cdots x_{N-1}'')\,dx_1'' \cdots dx_{N-1}''$$

$$= \quad f(\xi) = f\left(\bar{\xi} + \frac{N+1}{N}x_1'\right) = f\left(\bar{\xi} - \frac{N+1}{N}\bar{x}_0'\right)$$



$$\tilde{u}'(\xi) = u'(\xi) - \frac{N+1}{N}x_1'\frac{du'(\xi)}{d\xi}$$

$$\tilde{X}'(\bar{x}_0'' \cdots \bar{x}_{N-1}'') = X'(x_1'' x_i'' \cdots x_{N-1}'') - \frac{1}{N}x_1'\sum_{i=2}^{N-1}\frac{\partial X'}{\partial x_i''} + \frac{N-1}{N}x_1'\frac{\partial X'}{\partial x_1''}$$

$|\sum \bar{x}_i''| \leq a$

$X' \neq 0$ only for $|\bar{x}_0''|, |\bar{x}_i''|, \cdots |\bar{x}_{N-1}''| \lesssim a$

$X \neq 0$ only for $|x_1''|, |x_i''|, \cdots |x_{N-1}''| \lesssim a$.

$\left|\frac{\xi}{N}\right| \lesssim 3a$

$\sum x_i'' \leq a$. $\quad a + \frac{\xi}{N} \geq x_i'' + x_1'' \geq \frac{\xi}{N} - a$.

$-a \leq x_i'' + x_1'' - \frac{\xi}{N} \leq a \qquad 3a > \frac{\xi}{N}$

$-a \leq x_1'' + \frac{N-1}{N}\xi + \frac{N-1}{N}x_1'' \leq a$

$a - \frac{N-1}{N}\xi \geq \frac{2N-1}{N}x_1'' \geq -a - \frac{N-1}{N}\xi$

$\frac{N-1}{N}|\xi| \lesssim 3a$

$$\Psi = \left(\sum_n + \int\right) u_n(q_0)\,\psi_n(q_1 \cdots q_N)$$

$$= \left(\sum_n + \int\right) u_n(q_0)\,\psi_n(q_0 \cdots q_N)$$

ψ_m^* $\quad H\Psi = E\Psi. \qquad H = H_0 + H_0' + V.$

$$H_0\, u_n(q_0) + W_n\, u_n(q_0) + \int \psi_n^* V \Psi\, dq_1 \cdots dq_N = E\, u_n(q_0)$$

$$V = \sum_{i=1}^{N} \delta(r_0, r_i)$$

$$\iint dq_1 \cdots dq_N\, \psi_m^*(r_1 r_2 \cdots r_N \cdots)\, \delta(r_0 r_1) \left(\sum_n + \int\right) u_n(q_0)\,\psi_n(q_1 \cdots q_N)$$

$$= \iint dq_2 \cdots dq_N\, \psi_m^*(r_0\, r_2 \cdots r_N \cdots) \left(\sum_n + \int\right) (u_n(r_0 \cdots)\,\psi_n(r_0 \cdots))$$

$\int$ continuum な所では $\psi_n(r_1 \cdots)$ なる函数は $r_1 r_2 \cdots$ の中の少くとも一つについては空間全体に拡がった函数である。然るに $r_2 \cdots r_N$ について、~~(0, a)~~ の $1/a$ の範囲で積分したものは非常に小さい。又、n が discrete な範囲では binding 強い所 積分の値は小さいと考へられる。

これは ~~$u_n(q_1)$~~ 第二の expansion に対しても同一の式が成立つ。

両者の間の関係が問はれる。

Letter to the Editor

Reduction of Nuclear Collision Problem

Among various processes caused by the collision of the heavy particle with the nucleus

甚だ御迷惑乍ら、本年度も大体前年度の通り、下記の順序で御講演を御願ひ致しますから、豫め御承知置下さい。

岡谷様
渡瀬様
岡部様
青木様
伏見様
坂田様
淺田様
大森様
澤田様
吉永様
八木様
石黒様
湯川
林様
菊池様
奥田様
山口
東出様
関様
橋元様

幹事　山口、湯川、