On the Reduction of Nuclear Collision Problems

By Hideki Yukawa

§1、多数の heavy particles よりなる重い nucleus と heavy particle との衝突問題を考へる。

衝突の結果として、弾性散乱、非弾性散乱、核破壊等が起り得るが、いづれの場合においても出て来る particle がやって来る particle と同一であるならば問題は one body problem に reduce し得、linear simultaneous equation を解けばよいことになる。

その最も簡単な場合は多くの人に論じられた。

然るにもっと一般的に、(やって来た particle は核に捕へられ、中から別の) ~~出てくる~~ particle が出て来るとするならば問題は大いに複雑になる。その難点は

$$\iint\tilde{\varphi}(0,2,\cdots N)\{\underbrace{H(0)+H(1,2,\cdots N)}_{W}\}\underbrace{\chi(1,2,\cdots N)}_{u(0)}\,dq_0\,dq_2\cdots dq \quad (1)$$

の如き積分が

$$=V'(1)\,u(1)$$

なる形になればいいが、V' が r_1 についてどういふ風に変化するかわからぬ点にある。勿論 $V'(1)$ は $r_1 > a$ に対しては 0 である。~~$u(1)$ は 0 でなく~~ むしろ $V'(1)u(1)$ が核内で r_1 についてゆるくかはる函数と（核外では 0 になる）考へる方が実際に近いであろう。

すると問題は linear simultaneous ~~non~~homogeneous differential equation を解くことになる。それは適当な linear transformation により

$$\Delta\Psi+(E'-V')\Psi=F'$$

なる形にされる。故に、Ψ の solution としては homogeneous diff. eq. の general solution に $F'/E'-V'$ を加へたものになる。

この term が加はつたことによつてどんな影響があらはれるかを考へよう.
最も simple な例として ~~neutron の~~ elastic な s-scattering を考へてみると, $\frac{\psi}{r}$ は

$$C'\sin k'r + \frac{F'r}{k'^2} \qquad \text{for } r < a$$

$$\sin kr + Ce^{ikr} \cancel{+ De^{-ikr}} \qquad \text{for } r > a$$

なる形になる. boundary condition は

$$C'\sin k'a + \frac{F'a}{k'^2} = \sin ka + Ce^{ika} \cancel{+ De^{-ika}}$$

$$C'k'\cos k'a + \frac{F'}{k'^2} = k\cos ka + ikCe^{ika}$$

$k'\cos k'a$

$-\sin k'a$

但し $k'^2 = E' - V'$, $k = E'$

$$\left(\frac{F'}{k'^2}\right)(ak'\cos k'a - \sin k'a) = k'\cos k'a\sin ka - k\sin k'a\cos ka$$

$$+ Ce^{ika}(k'\cos k'a - ik\sin k'a)$$

$$|C|^2 = \frac{\left\{(k'\cos k'a\sin ka - k\sin k'a\cos ka) - \frac{F'}{k'^2}(ak'\cos k'a - \sin k'a)\right\}^2}{k'^2\cos^2 k'a + k^2\sin^2 k'a}$$

$\frac{|C|^2}{k}$ は $k \to 0$ に於て常に k^{-1} に比例して大きくなる.

特に resonance の時には k^{-3} に比例して大きくなる.

~~この困難は~~ かゝることは一般的に成立たぬ筈である.

~~であるから $u(0)$ ……~~

~~i) F' なる項は核内でなければならぬ筈であるか~~

~~根本は~~

この様の原因は F' を neglect した場合には一般に $u(0)$ となつて は ~~核の内部で0になるのにし~~, k が小さくなるに従つて 核の内部

で小さな~~なければ~~なして．$F'=0$ ならば零で，従って，F' も又 k に比例して小さくならねばならぬ．故に

$$\cancel{F' = kF''} \quad F' = C'F''$$

なる形におかれねばならぬ．

$$\therefore\ \psi = C'\left(\sin k'r + \frac{F''r}{k'^2}\right) \quad \text{for } r<a$$

~~rearrangement collision~~

$$= \sin kr + Ce^{ikr} \quad \text{for } r>a$$

とおくと，

$$\left\{\left(k'\cos k'a + \frac{F''}{k'^2}\right)\cancel{\frac{F'a}{k}}\sin ka - \left(\sin k'a + \frac{F'a}{k'^2}\right)\cancel{k}\cos ka\right\}^2$$

$$= |C|^2\left\{\left(k'\cos k'a + \frac{F''}{k'^2}\right)^2 \cancel{\cos k'a} + k^2\left(\sin k'a + \frac{F'a}{k'^2}\right)^2\right\}$$

∴ resonance は

$$k'\cos k'a + \frac{F''}{k'^2} = 0$$

の所でおこる．

しかし一般に F'' は大して大きいものではないであらうと考へられる．上記の事柄をもう少し正確にいへば，(1)は核外では0，核内では，$u(1)$ の平均値に（余），slowly varying function がかゝつたものと考へられる．故にそれは $C'F''$ なる形とassumeしてよいであらう．

しかし，上記の形をassumeして diff. eq. に入れると

$$C'(k'^2 - E + V')\sin k'r + \frac{F''}{k} = F''$$

§2, 以上の simple case に於ける考察をもつと一般的な場合に extend する. 特に symmetry の性質を最初から考慮することにする.

それは

$$\psi(0,1,2,\cdots N) = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i u_0(i)\, \chi_0 (i+1, \cdots N, 0, 1, \cdots i-1) \cancel{(0,1,\cdots i-1, i+1, \cdots N)}$$

$$+ \sum_{\alpha=1,2,\cdots} (-1)^i u_\alpha(i)\, \chi_\alpha (i+1, \cdots N, 0, \cdots i-1) \cancel{(0,1,\cdots i-1, i+1 \cdots N)}$$

$$+ \sum_\alpha v'_\alpha(i)\, \chi'_\alpha (i+1, \cdots N, 0, 1, \cdots i-1) \cancel{(0,1,\cdots i-1, i+1, \cdots N)}$$

なる形になる. 但し, χ_0, χ_α φ_α は残りの N 個の particles について anti-symmetric な形になつて居るとする.

上の function ψ は N+1 の particles について anti である.

で

$$P_{jk}\psi = \sum u_0(0)\, \chi_0(1, 2 \cdots k \cdots j \cdots N) = -\chi_0(0, 2, \cdots i \cdots j \cdots N)$$

$$+ u_0(1)\, \chi_0(0, 2, \cdots) \quad \chi(k+1, \cdots N, 0, 1 \cdots k-1)$$

$$+ (-1)^j u_0(k)\, \chi_0 \cancel{(0,1,2,\cdots i \cdots)}\, \chi(j+1, \cdots k \cdots N, 0, 1 \cdots j-1)$$

$$+ (-1)^k u_0(j)\, \chi_0 \cancel{(0,1,2,\cdots \hat{j} \cdots)}\, \chi$$

次に ~~Hamilton 函数~~は

$$H(0,1,2,\cdots N) = H(0) + H'(1\, 2 \cdots N) + V(0; 1, 2, \cdots N)$$

$$= H(1) + H'(0\, 2 \cdots N) + V(1; 0, 2, \cdots N)$$

$$= \cdots$$

となる. そこで,

$$H'(1\, 2 \cdots N)\, \chi_\alpha(1, 2, \cdots N) = W_\alpha\, \chi_\alpha(1, 2, \cdots N)$$

$$H'(1\, 2 \cdots N)\, \chi'_\alpha(1, 2, \cdots N) = W'_\alpha\, \chi_\alpha(1, 2, \cdots N)$$

とし,

$$H(0,1,2,\cdots N)\, \psi(0,1,2,\cdots N) = W\psi(0,1,2,\cdots N)$$

に上記の expansion を入れると.

$$\sum_\alpha \sum_i \{H(i) + W_\alpha + \underbrace{V(0;1,2\cdots i-1,i+1,\cdots N)}_{-W}\}(-1)^i u_\alpha(i)\chi_\alpha(0\,1\,2\cdots i-1,i+1\cdots N)$$

$$\cancel{+\sum_\alpha \sum_i \{H(i) + W'_\alpha + \underbrace{V(i;1,2,\cdots i-1,i+1,\cdots N)}_{-W}\}(-1)^i u_\alpha(i)\chi'_\alpha(0\,1\cdots i-1,i+1\cdots N)}$$

$= 0$、

両辺に ~~χ_βをかけて積分~~ $\chi_\beta(1,2,\cdots N)$をかけて積分すると

$$\{H(0) + W_\beta + V_{\beta\beta}(0) - W\}u_\beta(0)$$

$$+\sum_{\alpha\neq\beta} V_{\beta\alpha}(0)u_\alpha(0) + \sum_\alpha\sum_{i\neq 0}(-1)^i \int \chi_\beta(1\,2\cdots N)\{H(i) + \overbrace{W_\alpha + V(i;\cdots)}^{-W}\}\overbrace{\chi_\alpha(0,1\cdots i-1,i+1\cdots)}^{u_\alpha(i)}$$

$$\times dq_1 dq_2 \cdots dq_N$$

$= 0$

問題は 色々の項があるが、その中 Vに関するものは近似すれば

$$V(i;0,1,2,\cdots i-1,i+1,\cdots N) = \sum_{j\neq i} A(\sigma_i\sigma_j)\delta(x_i x_j)$$

なる形におけるとすると、

$$\sum\iiint \chi_\beta(1\,2\cdots N)V(i;0,1,2,\cdots i-1,i+1,\cdots N)u_\alpha(i)\chi_\alpha(0\cdots)$$

$$\times dq_1\cdots dq_N \quad \chi_\beta(1\,2\cdots x_i\cdots)\ U(\sigma_i\sigma_j)\ \chi_\alpha(x_0\cdots x_i\cdots N)$$

$$= \sum_{j\neq i}\sum_{\sigma_1\cdots\sigma_N}\iiint \chi_\beta(1\,2\cdots N)A(\sigma_i\sigma_j)\delta(x_i x_j)u_\alpha(i)\chi_\alpha(0,\cdots N)$$

$$\times dx_1 dx_2\cdots dx_N$$

なほ $j=0$ の所丈が 0でなく、 $i=1,2,\cdots N$ と N個ある。

$$= \sum_{\sigma_1\cdots\sigma_N}\iiint \chi_\beta(1\,2,\overset{i}{x_0},\cdots N)A(\sigma_i\sigma_0)u_\alpha(0)\chi_\alpha(0,1\cdots i-1,i+1,N)\,dx_1\cdots dx_{i-1}dx_{i+1}\cdots dx_N$$

$$= \sum_{\sigma_1\cdots\sigma_N} A(\sigma_i\sigma_0)U_{\beta\alpha}(\sigma_0\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_N)u_\alpha(x_0,\sigma_0)$$

$$= \sum Y_{\beta\alpha}(x_0,\sigma_0)u_\alpha(x_0,\sigma_0)(\sigma_0|Y_{\beta\alpha}(x_0)|\sigma'_0)u_\alpha(x_0,\sigma'_0)$$

次に $\sum_\alpha \int X_\rho(1,2,\dots N)\{H(i)-W+W_\alpha\}\chi_\alpha(0,1\dots i-1,i+1\dots N)\,dq_1\dots dq_N$ 〔$u_\alpha(i)$〕

であるが、 $\int\cdots\int X_\rho(1,2,\dots N)\chi_\alpha(0,1\dots i-1,i+1\dots N)\,dq_1\dots dq_{i-1}dq_{i+1}\dots dq_N$

$= f(0,i)$ は

とすると、これは nucleus の外では0. 中では 複雑に変化するであろう。しかして、核中では大体

$$H(i)\,u_\alpha(i) \cong \text{const}\; u_\alpha(i)$$

なる関数、上式第5項は

$$\text{const}\int f(0,i)\,u_\alpha(i)\,dq_i$$

なる形となる。又は 核内の u_α なる eigenfunction のある意味の平均値に比例する。そこで これを $F_{\rho\alpha}\overline{u_\alpha}$ とかくことにすると、

$F_{\rho\alpha}(0)$ は x_0 の関数でゆるく変化する函数であろう。

~~である。~~ $i=1,2,\dots N$ とすると $\sum(-1)^i\cdot(-1)\,F_{\rho\alpha}\,\bar{u}_\alpha$

$\int u_\alpha(i)\,dq_i\iint X_\rho(1,2\dots i\dots j\dots N)\,\chi_\alpha(0,1\dots j-1,j+1\dots N)\,dq_1\dots dq_{j-1}dq_{j+1}\dots dq_N$

$= \int u_\alpha(i)\,dq_i\iint X_\rho(1\cdot 2\dots j\dots i\dots)\,\chi_\alpha(0,1\dots j-1,j+1\dots N)\,dq_1\dots dq_{i-1}dq_{i+1}\dots dq_N$

$= \int u_\alpha(i)\,dq_i\iint$

$= \text{const}\int f(0,i)\,u_\alpha(i)\,dq_i$

若し交換で同様な項が N 個出てくる。

$$N\,F_{\rho\alpha}\,\bar{u}_\alpha\,.$$

である。$\{H(0)+W_\alpha+V_{\rho\rho}(0)-W\}\,u_\rho(0)$

$$+\sum_{\alpha\neq\rho}V_{\rho\alpha}(0)\,u_\alpha(0)+\sum_\alpha N\left(Y_{\rho\alpha}(0)\,u_\alpha(0)+F_{\rho\alpha}(0)\,\bar{u}_\alpha\right)=0$$

なる形になる。
これは、u_α が $\alpha=0,1,2,$ 　をきめるに必要な simultaneous differential equation である。

§3.
上式を ~~diagonal form にすると~~ separate すると、

$$v_\alpha = a_{\alpha\beta} u_\beta$$

$$H_\alpha v_\alpha = \sum_\beta F_{\alpha\beta} \bar{v}_\beta$$

なる形になるであろう。
それで $H_\alpha v_\alpha = 0$
の general solution を求めると、SS-process とちがってから 核内で v_α: $C'_\alpha \frac{\sin k'_\alpha r}{r} + C_\alpha D'_\alpha$
なる形になるであろう。核外でも やはり、$\frac{C_\alpha e^{ik_\alpha r}}{r} + \frac{D_\alpha e^{-ik_\alpha r}}{r}$
の如き形であろう。かかる形を assume して、上式を満たし且 boundary condition を満たす如き C, D を求めればよい。
それは一般に可能である。
上の形を assume して simultaneous equations に入れると

$$\int_0^a \sin k' r \qquad \frac{(\cos k' a - 1)}{k'}$$

$$(k'^2_\alpha + V_\alpha) C'_\alpha \frac{\sin k'_\alpha r}{r} + V_\alpha D'_\alpha = \sum_\beta F_{\alpha\beta}(D'_\beta + C'_\beta \bigcirc)$$

$$k'^2_\alpha = -V_\alpha \ (r<a) \qquad r<a$$

$$k^2_\alpha = -V_\alpha (r>a) \qquad r>a.$$

$$V_\alpha D'_\alpha = \sum_\beta F_{\alpha\beta}(D'_\beta + C'_\beta \bigcirc)$$

Boundary Condition 　この如きは $C_\alpha D_\alpha$ の間には n 個の関係が存在するが、その indep なものは n 個である。
は $r=a$ の所で $2n$ 個あり、infinity で n 個ある。これは
$C_\alpha\ D_\alpha,\ C'_\alpha$ なる $3n$ 個の constants を unique に決定する。

◎ Example

$$H = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + V(r_{12}) + V'(\vec{r}_1) + V'(\vec{r}_2)$$

$$\psi(1,2) = u_0(1)\chi_0(2) - u_0(2)\chi_0(1)$$

$$\left\{\frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + V'(\vec{r}_2)\right\}\chi_0(2) = W_0\chi_0(2)$$

$$\tilde{\chi}_0(2)\quad \left\{\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + V(r_{12}) + V'(\vec{r}_1) - (W-W_0)\right\} u_0(1)\chi_0(2)$$

$$-\left\{\frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + V(r_{12}) + \underset{\tilde{\chi}_0(\vec{r}_1)\,\chi_0(\vec{r}_1)}{V'(\vec{r}_2)} - (W-W_0)\right\} u_0(2)\chi_0(1) = 0$$

$$\left\{\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + V(r_{12}) + V'(\vec{r}_1) - (W-W_0)\right\} u_0(1)$$

$$-\left\{\frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m}\quad\{\qquad\right\}\chi_0(1) = 0,$$

$$-\quad V(r_1)\,u_0(1) + \{\quad\}\,\overline{u}_0$$

$$V(r_{12})$$

$$W_0\quad (W-2W_0)\int\tilde{\chi}_0(2)\chi_0(1)\,u_0(2)\,dq_2$$

$$-\int V(r_{12})\,\tilde{\chi}_0(2)\chi_0(1)\,u_0(2)\,dq_2$$

$$\left\{\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + V'(\vec{r}_1) - (W-W_0)\right\} u_0(1)$$

$$+(W-2W_0)\int\tilde{\chi}_0(2)\chi_0(1)\,u_0(2)\,dq_2 = 0.$$

$$F\quad\cdot\quad\overline{u}_0$$

§3. Method of Quantized Wave

我々は N+1 個の particles よりなる system がある適当な
(一種の self consistent な common field 中で動くと考へる;
~~原子核の全ての座標及び運動量~~ ~~relative~~
その potential を $V(\vec{x}, \sigma, \rho)$ とする. すると各 particle
の wave function は

$$\left(\frac{\vec{p}^2}{2m}+V-E\right)\psi=0$$

を満足せねばならぬ. この式の互々なる eigenwert に属する
solution を ψ_α と表はし,

$$\psi=\sum_\alpha a_\alpha \psi_\alpha$$

とおき, ψ, a_α を q-number とすると, $N_\alpha=a_\alpha^* a_\alpha$ が
0, 1 のいづれの値をとるかに従って ψ_α なる state は occupy (空いてるか又は)
されてゐることになる.
今 N+1 個の state 丈が occupy されてゐて, その中 N 個までは
bound state にあり, のこる 1 個丈が free (like) state にある
とする. この場合核の全体の運動を考へねばならぬが, N 個の
eigenfunction は凡て

$$e^{\frac{2\pi i}{h}\vec{P}_\alpha\left(\vec{X}+\frac{\vec{x}}{N+1}\right)}u_\alpha(\vec{x}-\vec{X})$$

なる形をしてゐる. u_α は 0 に近き有限範囲外では 0 とする.
(V はやはり $\vec{x}-\vec{X}$ の函数で 0 附近以外で 0 とする)
残る一つの state は 無限遠で

$$e^{\frac{2\pi i}{h}\vec{P}_\alpha\left(\vec{X}+\frac{\vec{x}}{N+1}\right)}\left(e^{ikz}+\frac{Ce^{ikr}}{r}\right)$$

の如き形をとるとする. ~~この様な形の solution をもつ様な~~
問題は V をどう決めるかである.

又 見方をかへると
全 systemに対する Hamiltonianは

$$H = \sum_{m,n} a_m^* H_{mn} a_n + \sum_{kl,m,n} a_k^* a_l^* V_{mn}^{kl} a_m a_n$$

なる形にかける
但し,

$$N = \sum_m N_m = \cancel{\mathrm{const}}\, a_m^* a_m = \mathrm{const.}$$

之にかけれ,