(1)

次の積分の計算

$$f_n = \frac{(2\alpha\log 2)^n}{2} e^{-\alpha l} \int_0^l dl' \int_0^y dy'\, e^{\alpha l'} \frac{l'^n (l-l')^{n-1}(y-y')^{n-1}}{n!\,(n-1)!\,(n-1)!}\, \varpi(l'+n, y')$$

但し

$$\varpi(l'+n, y') = \int_0^{y'} \frac{e^{-t}\, t^{l'+n-1}}{\Gamma(l'+n)} dt$$

先ず $t$ と $y'$ との積分の順序をかへて $y'$ で積分すると

$$f_n = \frac{(2\alpha\log 2)^n}{2} e^{-\alpha l} \int_0^l dl'\, \frac{e^{\alpha l'} l'^n (l-l')^{n-1}}{n!\,(n-1)!\,(n-1)!} \int_0^y \frac{e^{-t}\, t^{l'+n-1} (y-t)^n dt}{\Gamma(l'+n)}$$

先ず

$$※ = \int_0^y e^{-t}\, t^{l'+n-1} (y-t)^n dt$$ を求める際.

積分記号内をよく見ると $t=0$ で zero. $t=\infty$ で zero で $t=(0, y)$ の内に Sharp max. のある事がわかる.
それ故, 積分の上限 $y$ を $\infty$ と, とり変つても大差のない事は殆ど確かである。そうすれば ※ は $\Gamma$ function の一次形式であらはされる事は明らかである.
特に簡単のため $n=1$ とする

$$※_{n=1} = \int_0^\infty e^{-t} t^{l'} (y-t)\, dt = y\Gamma(l'+1) - \Gamma(l'+2)$$

故に

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t} t^{l'} (y-t)}{\Gamma(l'+1)} dt = \frac{y\Gamma(l'+1) - \Gamma(l'+2)}{\Gamma(l'+1)} = y - l' - 1$$

結局

$$f_1 = \alpha\log 2\, e^{-\alpha l} \int_0^l e^{\alpha l'} l' (y - l' - 1)\, dl'$$

$$= \log 2\left[\left(y + \frac{2}{\alpha} - 1\right) l - l^2 + \frac{(1-e^{-\alpha l})}{\alpha}\left(1 - y - \frac{2}{\alpha}\right)\right] \quad (A)$$

(A)より解る通り原点近傍では $l^2$ 迄取るとすれば

$f_1 \sim (y+\frac{2}{\alpha})l^2$ で、正に明らかに $l^2$ に比例し、$l$ の項も常数項も消失する。

$n$ が一般の時も同様に行はれるが、更らに複ザツになる。