

日本数学物理学会誌原稿用紙

—字を一割に—式は大きく明瞭に—分數、 $f$ ,  $\Sigma$ ,  $\Pi$  等は二行にまたがつて

E30 010 A02 1

特  
九  
和  
紙

4 総合報告

5 邊<sup>2</sup>の中性子の理論 (II)

湯川秀樹

手  
合  
込  
り

中  
9



§5. 束縛された水素原子と中性子の衝突

前二節に於て中性子が水素を含む物質中を通過する際個々の陽子と衝突して散乱又は捕獲される過程を論じたが、その場合陽子は全く自由で且つ最初静止して居ると假定した。實際に於ては水素原子は他の原子例へば炭素又は酸素原子に化学的に結合されて居り、平衡の位置のまはり<sup>に</sup>ある振動数<sup>で</sup>振動して居るのである。故に中性子の勢力  $E$  が  $\lambda$  に比して大きい限りに於て上記の假定は成立するが然らざる場合にはかゝる結合の影響を無視出来ない。この問題は最近 Fermi にまつて詳しく論せられた<sup>(17)</sup>。こゝにその概要を述べる。\* 尚分子の回転乃至格子振動等の影響もある筈であるが、Fermi もこの點には深く入つてゐない。

拘て中性子の波長  $\lambda$  は勢力  $E$  を eV を単位として表はすと

$$\lambda = \frac{2.85 \times 10^{-9}}{\sqrt{E}} \text{ cm}$$

であるから、相當に遠い中性子に對しては  $\lambda$  は中性子陽子間の力の作用半径  $a$  に比して非常に大きい。又前二節で求めた様に衝突断面積は  $10^{-23} \text{ cm}^2$  程度であるから衝突半径  $\rho$  は  $10^{-12} \text{ cm}$  程度で  $\lambda$  よりおつと小さい。(  $\rho$  の正確な定義は後に述べる ) 従つて

\* 原論文が手近に御好意により翻譯の原稿を借覽することが出来た。こゝに厚く感謝の意を表す。該翻譯は卓晚理研彙報に掲載される筈であるから、詳細はそれを見照されたい。

$$\lambda \gg R_0 \gg \rho, a \quad (51)$$

なる関係を満足する  $R_0$  なる長さが存在する。

拘て  $\rho$  と同様の假定の下に、更に水素原子を他の原子に束縛する力のポテンシャル  $U(\vec{r}_2)$  を附加した場合の波動方程式を求め、スピンの関する部分を消去すると、

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2M} (\Delta_1 + \Delta_2) \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) - V(r) \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0 \quad (52)$$

( $U$  の相互作用のポテンシャルで、両者)

となる。但し  $V(r)$  は中性子と陽子のスピンの平行か反平行かによって

$$-V(r) = J_M(r) \pm J_H(r) \quad (53)$$

となる。

所で  $U(\vec{r}_2)$  は  $10^{-8}$  cm 程度の狭い範囲に擴がった緩く変る函数で、 $V(r)$  は  $r < a$  で急に大きくなる函数であるから、 $r > R_0$  の領域では前者が、 $r < R_0$  では後者が夫

々主に利いて来るであろう。相對運動の角運動量が 0 である  $P, D$  等の状態は遠心力が為

可波動函数

めに  $r \ll \lambda$  といふ小さい故,  $r < R_0$  ( $\ll \lambda$ ) の領域での S 状態を考慮すればよい。故に先づ

$$\frac{d^2\varphi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi(r)}{dr} - \frac{MV(r)}{\hbar^2} \varphi(r) = 0 \quad (54)$$

この式の解を求め、 $\varphi(r) = \frac{v(r)}{r}$  とおくと、

$$\frac{d^2v}{dr^2} = \frac{MV}{\hbar^2} v \quad (55)$$

なり故,  $r > a$  での  $v(r) = p + r$  なる形に取ると、遠方では  $\varphi(r) = 1$  となる。  $r=0$  で  $\varphi$  が有限といふ条件から  $p$  を求めると、 $\rho$  と同様にして、中性子と陽子のスピンの平行の場合には

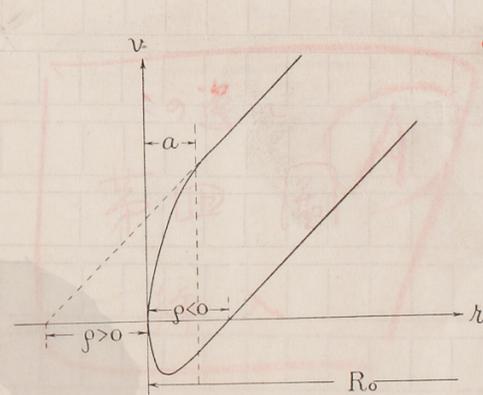
$$\rho \approx -\frac{1}{\alpha} = \frac{-\hbar}{\sqrt{MW}}, \quad (56)$$

反平行の場合には、安定な S 状態が存在するか否かに従つて

$$\rho \approx \mp \frac{\hbar}{\sqrt{M|W|}} \quad (57)$$

と與へられる。初めに述べた衝突半径は此等の  $\rho$  の絶対値

\*  $\varphi(r)$  は運動エネルギー 0 の S 状態の波函数に他ならぬ。



若田図

めに  $\ell \ll \lambda$   $\bar{r}$  は小さい故,  $\ell < R_0 (\ll \lambda)$  の領域  $\bar{r}$  は S 状態を考慮すればよい. 故に先づ

$$\frac{d^2\varphi(\ell)}{d\ell^2} + \frac{2}{\ell} \frac{d\varphi(\ell)}{d\ell} - \frac{MV(\ell)}{\hbar^2} \varphi(\ell) = 0 \quad (54)$$

なる式の解を求め,  $\varphi(\ell) = \frac{v(\ell)}{\ell}$  とおくと,

$$\frac{d^2v}{d\ell^2} = \frac{MV}{\hbar^2} v$$

なる故,  $\ell > a$   $\bar{r}$  は  $v(\ell) = p + \ell$  なる形に取ると, 遠方  $\ell \rightarrow \infty$  で  $v$  が有限といふ条件から  $p$  を求めると,  $\delta$  と同様にして, 中核  $\ell < a$  の領域  $\bar{r}$  は

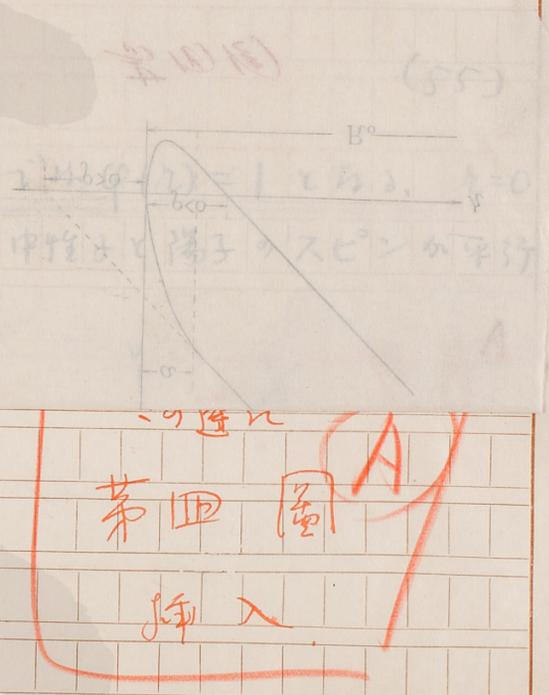
$$p \approx -\frac{1}{\alpha} = \frac{-\hbar}{\sqrt{MW}}, \quad (56)$$

反平行の時は安定な S 状態が存在するか否かに従つて

$$p \approx \mp \frac{\hbar}{\sqrt{M|W|}} \quad (57)$$

$\bar{r}$  に入らる. 初めに述べた衝突半径  $\ell$  比等の  $p$  の絶対値で定義する  $\bar{r}$  の数  $\ell$  以下

\*  $\varphi(\ell)$  は運動エネルギー 0 の S 状態の波函数に他ならぬ.



第四圖

挿入

の中性子に対しては  $\lambda \gg |\rho|$  の関係は満足されてゐる。

そこで  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  の  $r_2$  の値に対して成立する解を

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = f(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \varphi(r) \quad (58)$$

なる形を取ると,  $f$  は鉛直所で緩く変化する函数である。従つて  $\vec{r}_1$  なる点を中心とし半径  $R_0$  なる球に就いての  $\psi$  の平均値を  $\bar{\psi}$  とすると, この球の中では  $f$  は殆んど変化せず, 又  $\varphi$  の平均値は大體 1 であるから, (第五圖参照)

$$\bar{\psi}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{3}{4\pi R_0^3} \iiint_{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \leq R_0} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d\vec{r}_1 \quad (59)$$

$$\cong f(\vec{r}_1, \vec{r}_2),$$

即ち 
$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cong \bar{\psi}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \varphi(r) \quad (60)$$

となる。又 (52) 式を上述の球に就いて平均すると  $\bar{\psi}$  は

$$i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2M} (\Delta_1 + \Delta_2) \bar{\psi} - \bar{V}\bar{\psi} - U\bar{\psi} = 0 \quad (61)$$

なる方程式の解となればなるだけと容易にわかる。この式に対して  $\sqrt{V}\bar{\psi}$  を計算するに

は  $\vec{r}' = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$  とおき、(60) を考慮すると、

$$\overline{V\psi} \cong \frac{3}{4\pi R_0^3} \iiint_{|\vec{r}_1, \vec{r}_2| \leq R_0} V(r) \overline{\psi}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \varphi(r') d\vec{r}'$$

となる。(第五圖参照) 右邊の積分が0でないのは  $r \leq R_0$  なる場合に限り、その場合には(55)に依り

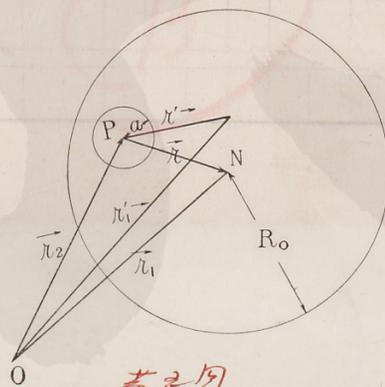
$$\begin{aligned} \overline{V\psi} &\cong \frac{3}{4\pi R_0^3} \overline{\psi}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot \frac{4\pi\hbar^2}{M} \int_0^\infty \frac{dv}{dr^2} r dr \\ &= \frac{3}{4\pi R_0^3} \overline{\psi}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot \frac{4\pi\hbar^2}{M} \left| \frac{dv}{dr} r - v \right|_0^\infty \end{aligned}$$

(i)  ~~$V(0) = 0$~~  なる故

$$\overline{V\psi} \cong \frac{3}{4\pi R_0^3} \overline{\psi}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot \frac{4\pi\hbar^2}{M} \cdot (-p) \quad (62)$$

となる、

この邊に「第五圖」挿



第五圖

O: 座標、原点  
 N: 中性子、位置  
 P: 陽子、位置

12  $\vec{r}' = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$  とおき、(60) を考慮すると、

$$\overline{V\psi} \cong \frac{3}{4\pi R_0^3} \iiint_{|\vec{r}_1, \vec{r}_2| \leq R_0} V(r) \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \varphi(r') d\vec{r}'$$

13 となる。(第五圖参照) 右邊の積分が0でないのは  $r \leq R_0$  なる場合に限る、その場合には(55) 12より)

$$\overline{V\psi} \cong \frac{3}{4\pi R_0^3} \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot \frac{4\pi\hbar^2}{M} \int_0^\infty \frac{d^2v}{dr^2} r dr$$

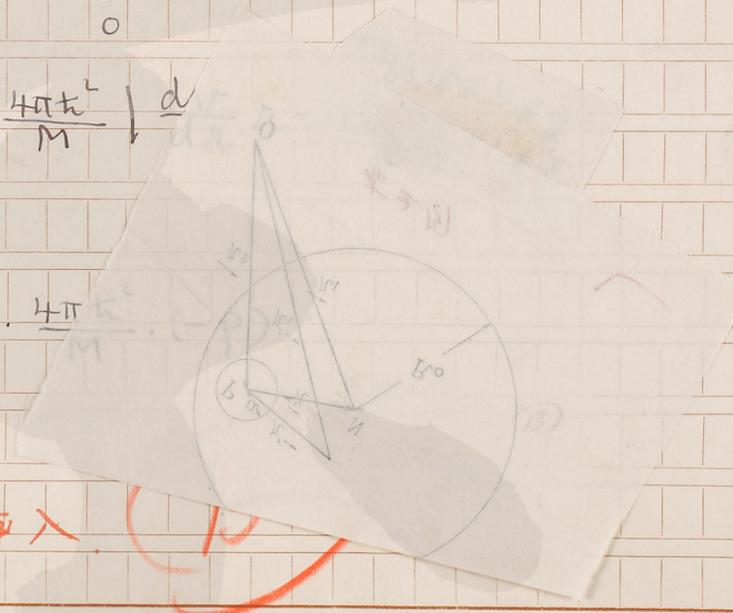
$$= \frac{3}{4\pi R_0^3} \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot \frac{4\pi\hbar^2}{M} \left| \frac{d}{dr} \right.$$

14 (i)  ~~$V(0) = 0$~~  なる故

$$\overline{V\psi} \cong \frac{3}{4\pi R_0^3} \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot \frac{4\pi\hbar^2}{M} \dots (62)$$

15 となる、

この邊に「第五圖」挿入



従つて  ~~$r_1, r_2$~~   $r \geq R_0$  に従つて

$$\nabla^2 \psi = -\frac{4\pi\hbar^2 \rho}{M} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \times \begin{cases} 0 \\ \frac{3}{4\pi R_0^3} \end{cases} \quad (63)$$

となる。

~~二の結果から見て~~  $\nabla^2 \psi$  は (61) 式中の  $\frac{3}{4\pi R_0^3}$  を  $5 \times 10^{-10}$  cm 程度に取れば]  $\frac{3}{4\pi R_0^3} \approx 10^{-2}$  eV 程度にたり、化学結合の勢力  $\sim$  比較して極めて小さいことに

なる。故に (61) に於て  $\nabla^2 \psi$  の項を小さな擾動項と見做し、擾動論によつて  $\psi$  の近似解を求めると出来る。これを (60) に代入して波動方程式  $\psi$  の近似解が得られ、その形からして粒の過程に対する断面積が直ちに決定される。この結果例へば最初の運動量  $\vec{p}$  なる中性子が立体角  $d\omega$  内のいづれかの方向に散乱されると同時に、水素原子が  $m$  状態から  $n$  状態へ遷移を行ふ断面積は

$$\sigma_{nm}(\vec{p}') d\omega = \frac{4\rho^2 p' d\omega}{p} \left(\frac{3}{4\pi R_0^3}\right)^2 \left| \int_{r \leq R_0} \tilde{u}_n u_m e^{\frac{i(\vec{p}-\vec{p}') \cdot \vec{r}}{\hbar}} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \right|^2 \quad (64)$$

$u_m(\vec{r}_2), u_n(\vec{r}_2)$  は水素原子の

87

字を一劃に 式は大きく明瞭に 分数,  $\sum, \prod$  等は二行にまたがって

とある。但し  $\vec{p}'$  は衝突後の中性子の運動量、 $u_m, u_n$  は  $m, n$  なる状態に対する固有函数を単位立方體について標準化してあるものとする。この場合  $m, n$  なる状態の陽子の勢力を  $W_m, W_n$  とすると、勢力保存則

$$\frac{p^2}{2M} + W_m = \frac{p'^2}{2M} + W_n$$

(65)

~~(66)~~

が満足されてゐる時、断面積は 0 ではない。

そこで (64) の断面積を二つの簡単な場合に就いて計算して見る。

i) <sup>水素原子</sup> ~~陽子~~ が自由な場合。

衝突前後の陽子の運動量を  $\vec{p}_m, \vec{p}_n$  とすると、

$$u_m = e^{i\vec{p}_m \cdot \vec{r}_2 / \hbar}, \quad u_n = e^{-i\vec{p}_n \cdot \vec{r}_2 / \hbar}$$

で、運動量の保存則

$$\vec{p} + \vec{p}_m = \vec{p}' + \vec{p}_n$$

(66)

が成立する時、断面積 (64) が 0 ではなく、中性子が  $(H), (H + dH)$  なる角散を以て散乱される部分断面積を求めると

数学会誌

$$d\sigma_s = \frac{8\pi p^2 p'}{p} \sin^2 \Theta d\Theta \quad (67)$$

となる。特に最初陽子が静止してるとすると  $p' = p \cos \Theta$  なる故、 $\Theta \leq \frac{\pi}{2}$  なる範囲で

$$d\sigma_s = 8\pi p^2 \sin \Theta \cos \Theta d\Theta \quad (68)$$

で、従つて全断面積は

$$\sigma_s = 4\pi p^2 \quad (69)$$

となる。これより(56), (57)の  $p$  の値を代入し、<sup>scattering</sup> 平行な場合と反平行な場合を 3:1 の割合で平均すると

$$\sigma_s = \frac{4\pi h^2}{M} \left( \frac{3}{4W} + \frac{1}{4W'} \right) \quad (70)$$

で、當然さうあるべき通り、§3 (24) により  $E=0$  とおいたのと同じになる。

ii) 水素原子が強く束縛されている場合、

即ち  $\nu_m$  が 0 でない範囲が中性子の波長に比して小さい場合を考へると、(68) の積分に於て指数函数を ~~無~~ 1 と見做し得従つて  $m=n$  なる項の積分は 0 でない、即ち断面積

よつて水素原子の状態は変化せず、従つて  $p = p'$  で中性子が  $(\theta, \theta + d\theta)$  なる角をなして散乱される部分断面積は  $\theta \leq \pi$  に対して

$$d\sigma_s = 8\pi p^2 \sin^2 \theta d\theta \quad (71)$$

である。即ち散乱は等方的で、全断面積は

$$\sigma_s = 16\pi p^2 \quad (72)$$

となり、(69) の 4 倍である。

この様に水素原子<sup>が</sup>他の原子に束縛<sup>する</sup>されてゐる勢力が中性子の運動勢力に比して大なる極限に於ける断面積は、小なる極限に於けるものの約 4 倍になる。即ち極めて低い中性子の平均自由行程は、1 eV 乃至それ以上の勢力の中性子の平均自由行程の約 4 分の 1 である。常温に於て熱平衡にある中性子の勢力は平均  $\frac{1}{40}$  eV 程度で、ii) の場合に近い。ii) の場合を次に考察しよう。

iii) 水素原子が弾性的に結合されてゐる場合、

簡単のため、水素原子が等方的な力の作用の下に、平衡の位置のまわりに弾性振動をなし得るとする。標準状態その振動数を  $\nu$  とすると、原子の状態は  $x, y, z$  方向の振動に対する量子数  $n_1, n_2, n_3$  によつて決定され、その勢力は

$$W_{n_1, n_2, n_3} = (n + \frac{1}{2}) h\nu, \quad (73)$$

固有函数は

$$U_{n_1, n_2, n_3}(\vec{r}_2) = \left(\frac{2M\nu}{h}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{H_{n_1}(\xi) H_{n_2}(\eta) H_{n_3}(\zeta)}{\sqrt{2^n n_1! n_2! n_3!}} e^{-\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} \quad (74)$$

$\vec{r}$  變へされる。但し,  $n = n_1 + n_2 + n_3$ ,

$$\xi = \sqrt{\frac{2\pi M\nu}{h}} x_2, \quad \eta = \sqrt{\frac{2\pi M\nu}{h}} y_2, \quad \zeta = \sqrt{\frac{2\pi M\nu}{h}} z_2$$

$\vec{r}$  H は Hermite の多項式を表す。

よって最初標準状態 ( $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ ) にある水素原子が ( $n_1, n_2, n_3$ ) なる状態に轉移

すると同様に、中性子が  $d\omega$  なる立體角内に散亂せられる断面積を計算する。これは (6) 式中

の  $U_m, \tilde{U}_n$  に  $U_{000}, \tilde{U}_{n_1, n_2, n_3}$  を代入して積分を行へばよい。この結果

$$\sigma_{n_1, n_2, n_3}(\vec{p}') d\omega = \frac{4p^2 p'}{p} d\omega \frac{(p'_x - p_x)^{2n_1}}{n_1!} \frac{(p'_y - p_y)^{2n_2}}{n_2!} \frac{(p'_z - p_z)^{2n_3}}{n_3!} e^{-(\vec{p}' - \vec{p})^2} \quad (75)$$

とある。但し  $\vec{p} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{4\pi M h \nu}}, \quad \vec{p}' = \frac{\vec{p}'}{\sqrt{4\pi M h \nu}}.$

(75) を  $n$  の一定値に對する  $n_1, n_2, n_3$  の凡ての可能な値に就いて總和すれば、中性子が  $dw$  なる方向に散亂され、水素原子が  $n h \nu$  なる勢力以上のいづれかの單位に勵起される部分断面積 ~~を得られる。~~ 即ち

$$\sigma_n(\vec{p}') = \frac{4p^2 p'}{p} dw \frac{(\vec{p}' - \vec{p})^{2n}}{n!} e^{-(\vec{p}' - \vec{p})^2} \quad (76)$$

が得られる。これを更に  $dw$  について積分すれば、水素原子が  $n = n_1 + n_2 + n_3$  なる單位に勵起される断面積  $n$  番目

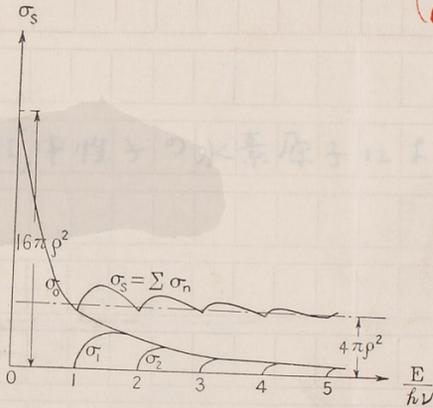
$$\sigma_n = \frac{4\pi p^2}{n! p^2} \int_{2p-n-2p\sqrt{p^2-n}}^{2p^2-n+2p\sqrt{p^2-n}} \xi^n e^{-\xi} d\xi \quad (77)$$

但し、 $\frac{p^2}{2M} < n h \nu$ , (従つて  $p^2 < n$ ) 即ち中性子が  $n$  番目の状態を勵起するに必要の勢力を有せぬ時は  $\sigma_n = 0$  である。  $\sigma_n$  は  $p^2 = \frac{E}{h\nu}$  の函数として表はすと第六圖の如くなり、  
 $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$

$$\sigma_n = \frac{4\pi p^2}{p^2}$$

存在等邊雙曲線が此等に共通の漸近曲線となつてゐる、

第六圖



最後に  $n$  の  $n$  の可能な値について  $\sigma_n$  の値を求め、中性子の散乱の全断面積

$$\sigma_s = \sum_{n=0}^{n_0} \sigma_n$$

が得られる。但し、 $n_0$  は  $\frac{E}{h\nu} - 1$  と

の値が 0 から  $h\nu$  迄漸次同様に断面積は

$$\sigma_s = \sigma_0 = \frac{4\pi\rho^2(1 - e^{-\frac{E}{h\nu}})}{E/h\nu} \quad (79)$$

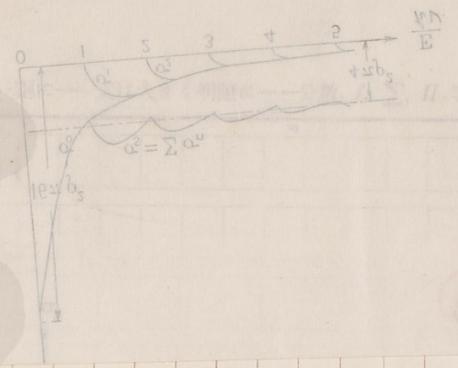
なる式に従つて、 $16\pi\rho^2$  から  $4\pi\rho^2$  より少し小さい値に近づくまで減少する。  $h\nu$  から先は  $4\pi\rho^2$  より大きくなるなり、小さくなるなりして、この値に収斂する、

散乱された中性子の方向分布は、 $E \ll h\nu$  の限り (ii) と同様、 isotropic と等方的であるか

第六圖

存在等邊雙曲線が此等に共通の漸近曲線

第六圖



12

数学会誌  
13

最後に  $n$  の  $l$  の可能な値について  $\sigma_n$  の総和を求め、中性子の水素原子による散乱の全断面積

$$\sigma_s = \sum_{n=0}^{n_0} \sigma_n \quad (78)$$

が得られる。但し、 $n_0$  は  $\frac{E}{h\nu} - 1$  と  $\frac{E}{h\nu}$  の間の整数である。第六圖に示す如く、中性子の勢力が 0 から  $h\nu$  迄漸次増加する間に断面積は

$$\sigma_s = \sigma_0 = \frac{4\pi p^2 (1 - e^{-\frac{E}{h\nu}})}{E/h\nu} \quad (79)$$

なる式に従って、 $16\pi p^2$  から  $4\pi p^2$  より少し小さい値に近づくまで減少する。  $h\nu$  から先は  $4\pi p^2$  より大きくなるなり、小さくなるなりして、この値に収斂する。

散乱された中性子の方向分布は、 $E \ll h\nu$  の限り (ii) と同様、ほとんど等方的であるか

$E$  が  $h\nu$  の程度になると非等方向性が著しくなり,  $E \gg h\nu$  (これは勿論) と同様になる。  
 通常の水素化合物に対しては  $h\nu$  は  $0.1 \sim 0.5$  eV の程度で、室温の熱中性子の勢力より遙かに大きい故、この場合の断面積は数パーセント以上の中性子に対する断面積の4倍に近いであろう。例へばパラフィンに対しては約3倍強と推定される。

この様に考へると、§3 で求めた自由な陽子に対する中性子の衝突断面積 (24) 乃至本節の (70) を適用し得るが、中性子の運動勢力が 1 eV 程度以上の場合に限られ、熱中性子の除外せぬ限り ~~は~~ こととなる。Fermi 及び Amaldi の実験によると、<sup>(6) (7)</sup> 1 eV 以上の中性子の二つの群 (\*) に対し、パラフィン中の平均自由行程は共に約 1 cm であると推定される。

之からして断面積は  $\sigma_s = 12.8 \times 10^{-24} \text{cm}^2$  となり、(70) によつて  $|W'|$  を計算すると、§3 で求めた値  $4 \times 10^4$  eV のかほりに

$$|W'| = 1.16 \times 10^5 \text{ eV} \quad (80)$$

が得られる。一方に於て熱中性子に対する断面積は Fermi 等によれば <sup>(6)</sup>  $\sigma_s = 43 \times 10^{-24} \text{cm}^2$  なること既に述べた。即ち理論の豫断する通り、1 eV<sup>以上</sup> の中性子に対する値の3倍強に近づて居る。

尚  $E < h\nu$  なる場合には、衝突によつて水素原子の状態は変化せず、従つて中性子の運動

(\*) 中性子の種の群に就ては後に述べる。



10 20 30 40  
 勢力も變化しない筈である。従つて中性子がパラフィン中で段々遅められて、勢力が  $kT$  以下  
 15  
 になれば最早減速されず、熱運動程度の勢力にのみなり得る。この際、<sup>15</sup> 実際のパラフィ  
 ン中には熱中性子が出来て居り、Dunning 等<sup>(22)</sup> がその速度を直接機械的方法で測  
 定した結果によると、その温度に於ける Maxwell の分布と大體一致して居る。これは水素原子  
 の振動は一般に等方的でなく、 $\nu$  の値は幾つもあり得ること、水素原子を束縛して居る原子自  
 身が熱振動を行ひ得ること等により、全体として振動数は 0 から始まる連続譜を形成し、中性  
 子をいくらでも減速し得る為と考へられる。併し、中性子の速度が速くなるに従つて、減速  
 に貢献し得る振動数の範囲が狭くなり、單なる撞撃に近くなって行くであらう。

以上述べた所によつて、中性子の散亂に対する水素原子の<sup>15</sup> 総合的影響は大抵明かになつた。  
 10  
 之に反して、中性子捕獲の過程には直接の影響はないであらう。何故といへば、この降出束の  
 重水素は  $10^3 eV$  以上の反動勢力を有するからである。併し  $|W|$  に対する値が變つた為  
 めに、捕獲の断面積も間接的に變つて来る。即ち §4, (41) 中の  $|W|$  に (80) の値を入れて  $\sigma_c$   
 を求めると前よりも小さくなり、従つて平均壽命

$$\tau = \frac{1}{n\sigma_c v}$$

15

3



は前よりも大きくなる。(41)から明かされる様に、遅い中性子 ( $E \ll |W|$ ) に対しては  $\tau$  は  $E^{-1/2}$  即ち  $v^{-1}$  に比例する故、 $\tau$  は勢力に無関係になる。パウフインの場合  $n = 7.8 \times 10^{22}$  であるから、 $1S$  状態が安定か不安定かに従って、

$$\tau = \frac{7}{2.8} \times 10^{-4} \text{ sec.} \quad (81)$$

となり、(4)の結果より少し大きくなる。Fermi等の実験結果  $\tau = 1.7 \times 10^{-4} \text{ sec.}$  と比較すると、安定な  $1S$  状態は存在しないと仮定した方がよい様である。いつれにしても熱中性子は捕獲される迄に湯子と平均百回衝突するわけで、Fermi等の実験からこの回数を  $N = 140$  と推定した。

7 x 10

三

§6. 1) 水素化合物中に能る中性子の遷移

少し冗漫に失したかも知れぬが、以上数節に亘って述べた所によつて、中性子が陽子に衝突する際の基本的な過程は大體明かになつた。そこで元へ戻つて、一定の形状の水素化合物中に中性子が通過する際にこれらの基本的な過程の集積としてどんな結果が起るかといふ小具體的問題を考察する。

中性子の通過のパーフィン層の

一般の場合の計算は極めて困難であるが、例へば厚さが平均自由行路に比して小さい時には、精々一回乃至二回の衝突しか行なないであらうから、比較的容易に近似的な解が求められる。<sup>(18)</sup> その反対の極限として、例へば源が非常に大きなパーフィン層の中に置かれて居て、 $v_0$ なる速さの中性子を毎秒  $Q$  箇宛出す場合を考へて見る。<sup>(19)</sup><sup>(19)</sup> 平衡状態に於て、パーフィン層中に存在する中性子のうち速さが  $(v, v+dv)$  の間にあるものの数を  $N(v)dv$  とすると、毎秒衝突によつて速度を変更する爲めに失はれる数は  $\frac{vN(v)dv}{\lambda(v)}$  であらう。但し、 $\lambda(v)$  は  $v$  なる速さのものの平均自由行路を表はす。一方源から出て来る中性子のうち衝突によつて速さが  $(v, v+dv)$  の間に居るものの数は §2, (2) に依り毎秒  $\frac{2v dv}{v_0} Q$  であり、又  $(u, u+du)$  の間の速さの中性子のうち衝突によつて  $(v, v+dv)$  の間の速さになる

† (2) に誤植があり、正しくは  $P(E_1)dE_1 = \frac{dE_1}{E}$  である。今の場合  $E = \frac{1}{2}Mv_0^2$ ,  $E_1 = \frac{1}{2}Mv^2$  である。



この数の每秒  $\frac{2v dv}{u^2} \cdot \frac{u N(u) du}{\lambda(u)}$  であり、平衡の条件は

$$\frac{v}{\lambda(v)} N(v) dv = \frac{2v dv}{v_0^2} Q + 2v dv \int_v^{v_0} \frac{N(u) du}{u \lambda(u)} \quad (82)$$

$v dv$  で割り、  
 となり、両方を微分すると

$$\frac{d}{dv} \frac{N(v)}{\lambda(v)} = -\frac{2}{v} \frac{N(v)}{\lambda(v)} \quad (83)$$

となる。この解は  $N(v) = \frac{\lambda(v)}{v^2} \times \text{const.}$  であり、(82)に代入して const. を定めると、

$$N(v) = \frac{2Q \lambda(v)}{v^2} \quad (84)$$

前節の結果を考慮すると、

となる。但し衝突の際に陽子は自由で且最初静止していると仮定せざる限り、この分布法則は勢力  $1 \text{ eV}$  程度以上の中性子にしか適用出来ない。

所てこの様にして衝突によつて段々遅められた中性子は早晚勢力が長丁程度の所謂熱中性子となり、~~中性子~~ であり、これは又陽子に捕獲されて無くなりつゝ了ふわけであり、  
 その平均壽命を  $\tau$  とすると、平衡の条件からして熱中性子の総数は

Q7

(85)

であることがわかる。  
 以上の速度分布のみを考慮し、この速度分布が問題となる。一般に源から出て来る中性子の衝突して減速され、遠ざかって行くのであるから、遠い所程速い中性子の割合が多い。いひかへれば、ある速度の中性子の源からの平均距離は、速度が小さくなる程大きくなる。Fermi の ~~距離~~ 距離の二乗の平均を求め、その表式は極めて簡便である。Howay<sup>(20)</sup> は水の場合について、水素<sup>1</sup>の衝突の断面積が(24)で與へられると、(但し式中の  $|W|$  の値は(80)を以て) 酸素原子に対する断面積は中性子の勢力に無関係として、上記の平均値を計算してゐる。

速い中性子の色々の群の勢力の通常数<sup>+</sup>の<sup>+</sup>結果として、この<sup>+</sup>違ひは(24)によると平均自由行程は殆んど一定であるから、二つの群の平均勢力を  $E'$ ,  $E''$  とすると、

$$\log \frac{E'}{E''} = \frac{\bar{r}^2 - \bar{r}''^2}{6\lambda^2} \quad (86)$$

なる簡単な近似式が成立する。但し  $\bar{r}^2$  の  $\bar{r}''^2$  は二群の中性子の源からの ~~平均~~ 距離の平方の平均を表はす。故にこれを實驗から定めれば、群の勢力の比がわかるわけである。

† C 群は勿論例外である。

19

E 30 010 A 02 19

数  
学  
會  
誌  
20

日本数学物理学會誌原稿用紙

—字を一副に—式は大きく明瞭に—分數, f, Σ, Π 等は二行にまたがって

併し、平均距離  $\lambda$  であり、更に進んで中性子の分布を場所  $\vec{r}$  及び  $\vec{v}$  速度の函数として表はす  
ことが望ましいが、その出発点は連続の式である。今  $\vec{r}$  点附近の  $dx dy dz$  の體積中に於て、速  
度が  $\vec{v}$  附近の  $dv_x dv_y dv_z$  なる範圍にある中性子の数を  $n(\vec{r}, \vec{v}) dx dy dz dv_x dv_y dv_z$   
とすると、その時間的変化は

$$\frac{\partial n(\vec{r}, \vec{v})}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \text{grad } n(\vec{r}, \vec{v}) + q(\vec{r}, \vec{v}) - \frac{v n(\vec{r}, \vec{v})}{\lambda(v)} + a(\vec{r}, \vec{v}) - \frac{n(\vec{r}, \vec{v})}{\tau(v)} \quad (87)$$

と與へられる。左邊の第一項は中性子の移動による減少、第二項は源からの供給による増加、  
第三項は衝突による減少、第四項は  $v$  以上の速さの中性子が衝突によつて  $\vec{v}$  なる速度に  
なることによる増加、第五項は捕獲による減少を夫に表はして居る。但し、中性子の源は連続  
的に擴がって居り、 $\vec{r}$  点附近の  $dx dy dz$  なる體積から速度が  $\vec{v}$  附近の  
 $dv_x dv_y dv_z$  なる範圍 ~~に~~ のものが毎秒  $q(\vec{r}, \vec{v}) dx dy dz dv_x dv_y dv_z$  箇づ、出て  
来るものとする。この式は衝突に対する特殊の法則を假定しないであらうから、あ  
らゆる速度に對して成立する。衝突の法則が  $\lambda(v)$   $\tau(v)$  の函数形が定まり、 $v$  より  
大なる速度  $u$  に對し  $n(\vec{r}, u)$  に特殊の函数を乘じて積分した形  $a(\vec{r}, \vec{v})$  は  
に於る。そこで問題は適當な境界條件の下に (87) を 0 にする條件下で平衡分布を求めよこと  
にあるが、かかる積分微分方程式を解き得るのは極めて特殊の場合に限られてゐる。

立する、~~衝突の法則を樂へると、 $\alpha(\vec{v}, \vec{v}')$  大正の速度  $\vec{v}$  に対する  $n(\vec{v}, \vec{v}')$  の積分とし~~  
~~ての  $\alpha(\vec{v}, \vec{v}')$  の形が定まつて来る。そこで適當な條件の下に (87) を 0 になる特殊な~~  
~~分布を求めることが問題になるが、かゝる積分微分方程式を解き行ふのは極めて特殊な場合~~  
 に限られてゐる。

例へば中性子の分布が一様分布で、源は外部にあり、一定の速度の中性子を emits し、更に数  
 ウォルト以上の勢力の  $\phi$  のに限れる結局前の (82) 式に帰着する。もつと一般の場合の解  
 を求めることは<sup>15</sup> 後の問題である。

ii) 水素化合物中に於る熱中性子の擴散

展述べた様に 1eV 以下の中性子に対する衝突の法則は<sup>16</sup> 1eV 以上の夫れと異なり、勢力 0 の  
 極限に於ては水素原子によつて等方的に散亂され、速度の絶対値は変化しない。故に熱中性  
 子が水素化合物を通過する際には衝突による減速の度は少く、單なる擴散に近いものであ  
 ると考へられる。但し平均百數十回の衝突の後には陽子~~と~~ 共~~に~~ 捕獲されて消滅する<sup>17</sup> こと~~も~~ 考  
 慮せねばならぬ。勿論熱中性子中では比較的速いものは減速される機会が多く、比較的遅い  
 ものは加速される機会が多いであろうが平均としては Maxwell の速度分布を維持しつ、  
 擴散するものと見做し得るのであるから、速度の絶対値の變動を無視して計算しても大し  
 不<sup>18</sup> 視)

21

99



に誤りはないとあり、

特別の場合として、熱中性子の密度  $n$  の  $v$  速度の分布が  $y$  方向に對しては一般に成り立つと、連続の式 (87) は簡単に

$$\frac{\partial n(x, v, v_x)}{\partial t} = -v_x \frac{\partial n(x, v, v_x)}{\partial x} + q(x, v, v_x) - \left( \frac{v}{\lambda(v)} + \frac{1}{\tau} \right) n(x, v, v_x) + \frac{1}{2\lambda(v)} \int_{v'_x = -v}^{+v} n(x, v, v'_x) dv'_x \quad (88)$$

の如き形になる。但し散亂は等方的に進行する速度  $v$  は変化しないと假定してある。又  $\tau$  は

~~$\tau = N\lambda$~~

$$N = \frac{c v}{\lambda} \gg 1, \quad \lambda' = \frac{N\lambda}{N+1} \cong \frac{(N-1)\lambda}{N}, \quad \xi = \frac{v_x}{v} \quad (89)$$

$$n(x, v, v_x) = f(x, \xi), \quad \frac{\lambda \cdot q(x, v, v_x)}{v} = q'(x, \xi)$$

とおくと、平衡分布を表現する式は

$$\lambda' \xi \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{N-1}{2N} \int_{-1}^{+1} f(x, \xi') d\xi' - f + q' \quad (90)$$

とすると、Wick<sup>(21)</sup> はこの式から出発して種々の問題を論じた。

例へば、 $x=0$  なる平面の右側をパラフィンとし、左方にある源からこの平面の単位面積を  
通つて毎秒1箇つ、の中核子が入つて来るとする。その方向分布は余弦法則に従つ  
て、 $(\xi, \xi+d\xi)$  の間が毎秒  $2\xi d\xi$  箇入つて来るとすれば、 $x=0$  において、 $\xi > 0$  へ  
対し

$$f(0, \xi) = \frac{2}{v},$$

$x = \infty$  において  $-1 \leq \xi \leq +1$  へ対し、

$$f(\infty, \xi) = 0$$

なる境界条件を満足せねばならぬ。高パラフィン中では源は無いと考へる故  $0 \leq x < \infty$  へ  
対し

$$g'(x, \xi) = 0$$

である。

かゝる条件を満足する解を求めらるゝに當つて、先づ一次元の問題を考へ、 $x$  方向及び  $-x$  方向へ走  
りぬる文に限ると、 $\xi$  は  $\pm 1$  の値しか取らぬから、 $f(x, +1) = f_1(x)$ ,  $f(x, -1) = f_2(x)$   
と書くと、(90) は  $0 \leq x < \infty$  へ対し



$$\left. \begin{aligned} \lambda' \frac{df_1}{dx} &= \frac{N-1}{2N} (f_1 + f_2) - f_1 \\ -\lambda' \frac{df_2}{dx} &= \frac{N-1}{2N} (f_1 + f_2) - f_2 \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

以上 聯立微分方程式に帰着し、境界条件は

$$f_1(0) = \frac{2}{v}, \quad f_1(\infty) = f_2(\infty) = 0$$

となる。この式組の解 = の問題の解は

$$f_1 = \frac{2}{v} e^{-\frac{x}{\sqrt{N}\lambda}} \quad f_2 = \frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}+1} \frac{2}{v} e^{-\frac{x}{\sqrt{N}\lambda}} \quad (92)$$

以上 2 とは容易にわかる。従つて毎秒 1 層の中核子が入つて来る時に、反射されて出て行く

中核子の数、所謂 albedo は

$$\beta = \frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}+1} \cong 1 - \frac{2}{\sqrt{N}} \quad (93)$$

と表へられる。  $N \gg 1$  の時、この albedo 即ち反射係数は 1 に近しいことになる。

以上 3 次元の場合の解は

$$f(x, \vec{z}) = g(\vec{z}) e^{-\mu x} \quad (94)$$



存在形式を仮定すると,  $g(\xi)$  は

$$\frac{2N}{N-1} g(\xi) = \frac{1}{1-\lambda'\mu\xi} \int_{-1}^{+1} g(\xi') d\xi' \quad (95)$$

を満足せねばならぬ. 更に両邊を積分すると

$$\frac{2N}{N-1} = \frac{1}{\lambda'\mu} \log \frac{1+\lambda'\mu}{1-\lambda'\mu} \quad (96)$$

と仮し,  $\lambda'\mu \ll 1$  と仮定すると,

$$\mu \cong \frac{1}{\lambda'} \sqrt{\frac{3}{N}}$$

と仮し, (95) の近似解は

$$g(\xi) \cong \frac{2}{\sqrt{3}} (1 + \sqrt{\frac{3}{N}} \xi) \quad (97)$$

と仮す. 之は更に積分  $> 0$  となる (7)  $g(\xi) = \frac{2}{\sqrt{3}}$  と仮すといふ境界条件を是に近似したるものである. この場合の albedo は

$$\beta \cong \frac{\int_{-1}^{+1} g(\xi) \xi d\xi}{\int_{-1}^{+1} g(\xi) d\xi} \cong 1 - \frac{4}{\sqrt{3N}} \quad (98)$$

となる。

もつと正確な解を求めるには  $-1 \leq \xi \leq +1$  なる領域を適当に区<sup>分</sup>し、右部分では  $f(x, \xi)$  は ~~等しい~~  $x$  又の函数とし、(91) に似た聯立微分方程式を解く。区<sup>分</sup>の数を増せば、近似はいくらでもよくなる。Wide の区<sup>分</sup>の数が 6 の場合について数値計算を行つて得た結果をみると、 $x=0$  の子表面から出て行く中性子の速度分布は餘弦法則即ち

パラフィン内部に源が一律に分布している場合  
$$-\xi d\xi$$

より法線方向に偏り、むしろ Fermi 個別の方法から推定した分布則

$$\{(-\xi) + \sqrt{1 - \xi^2}\} d\xi \quad (99)$$

に近い。<sup>(17)</sup> ~~法線方向に偏り~~ Fermi 個別の方法から推定したものである。

Fermi は遷移の方程式

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\lambda v}{3} \Delta n - \frac{1}{\tau} n + q \quad (100)$$

から出発して、之は上の方法に対し、 $\lambda$  が非常に小さく、 $N = \frac{c v}{\lambda}$  が非常に大きく、 $N \lambda^2$  が有限である様な極限の場合に當り、すなわち  $x=0$  の平面の右側をパラフィンとし、 $x$  なる深さから熱中性子が捕獲されずに出て来る確率を求める、

$$p(x) = e^{-\sqrt{\frac{3}{\lambda^2 N}} x} \quad (101)$$

とある。但し、この他に  $\lambda$  の程度の深さの所以は適用出来ない。その邊では密な状態を  
表し、大體

$$n \propto \frac{\lambda}{\sqrt{3}} + x$$

のことが一次元の場合から類似される。このからして出て行く中性子に対する ~~分布~~ 分布  
則(99)が容易に誘導出来る。

Fermi の高層の問題を詳しく論じて居るが Wicks の結果と共通の問題に対する解は大  
體一致してゐる。† 此等の結果は色々の実験と意味が4子に相當役立つのである。後に中性  
子の群に就いて述べる際に再び觸れる機会があると思ふ。

† ~~Wicks~~ Fermi の albedo は (98) の如きには  $\beta \approx 1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} N}$  とある。 ✓

27

g



27

数  
学  
会  
誌

28

引用文献

- (17) Fermi, Ric. Scient. VII ~ 2, 13, 1936.
- (18) Yukawa, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 18, 507, 1936.
- (19) Fermi, Zeeman Festschrift, S. 128, 1935.
- (20) Harvay, Phys. Rev. 50, 897, 1936.
- (21) Wick, Rendiconti, Lincei XXIII, 774, 1936.
- (22) Dunning, Pegram, Fink, Mitchell and Segre, Phys. Rev. 48, 704, 1935; 49, 103, 1936.

遅い中性子の理論(I) 誤植訂正

430頁(2)式を  $P(E_1)dE_1 = dE_1/E$ ,

435頁12行 「と比較実験」 を「実験と比較」,

436頁5行  $W = 2.1 \times 10^6 \text{ eV}$  を  $W = 2.2 \times 10^6 \text{ eV}$ ,

439頁(31)式の右邊の2を除去  $\vec{A}(\vec{r}_2) = c\sqrt{\frac{h}{V}} \vec{n} e^{\frac{2\pi i \vec{v} \cdot \vec{r}_2}{c}}$ ,

440頁11行 「考へて居り」 を「考へると」,

441頁(40)式の右邊の4を除去  $|V_{21}|^2 \cong (g_p - g_n)^2 \frac{\pi^2 e^2 h^3 v}{M^2 c^2} \left| \int \int \tilde{\varphi}_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \varphi_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) dv_1 dv_2 \right|^2$ ,

442頁欄外 「化合結合」 を「化學結合」,

と夫は訂正する。