代表者トシテ(15′)ノgroupヲ作ツテ居ルノデアル。
今(15)ノgroupニ屬スル wave functionノphase angleハコノ(15′)デ與ヘラレル代表者ノsurfaceノ上ニ於テ丁度皆一致シタモノト假定シヨウ。即チ phase angleガ time tニ於テ point Pデ一致シタモノトスル。
然ラバ、任意時刻ニ、凡テノ(15′)ノsurfacesガ倶ニ其ノ上デ凡テノwave functionノphaseガ一致スル様ナ点ガ矢張リアルデアラウカ。實際カヽル点ハ存在スルガ(15′)ノsurfaceノgroupノcommon sectionノpointデハナイ。カヽルcommon sectionノpointハ任意時刻ニハ存在シナイ。phaseノ一致スル点ヲ通ル(15)ノ代表者ハtimeト共ニcontinuouslyニカハツテ居ルノデアル。何故カトイフニ(15′)ノ凡テノsurfacesノcommon sectionノpointニ於テハ

(16)　$W=W_0$,　$\dfrac{\partial W}{\partial \alpha_1}=\left(\dfrac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right)_0$,　$\cdots$　$\dfrac{\partial W}{\partial \alpha_n}=\left(\dfrac{\partial W}{\partial \alpha_n}\right)_0$

ガ成立セネバナラヌ。コノ$n+1$ノequationsニ於テ右辺ハconst.デアリ、左辺ハ$n+1$ノquantities $q_1, q_2, \cdots q_n, t$ノfunctionデアル。コノequationsハinitial value即チpoint Pノcoordinates及ビinitial time tニ於テ満足サレル筈デアル。従ツテ他ノ任意ノtノ値ニ對シテハ$q_1, \cdots q_n$ニ就イテ一ツモsolutionハナイ。
併シ第一ノ式$W=W_0$丈ハ別ニシテオイテ、他ノn個ノ式カラq_kヲtime t及ビconstantsノfunctionトシテ求メルコトハ出来ル。コノ点ヲQトナヅケルト、コノ点ニ於テ第一ノ式ハ勿論満足サレヌデアラウ。ソコデ(15′)カラ(16)ノ式ヲ作ツタ所ニ遡ツテ考ヘテ見ルト、Qハsurfaceノgroup(15′)ノcommon pointデハナイガ、(15′)ノ右辺ノ値ガ凡テノsurfaceニツイテ一定ノ量丈カハツタsurfaceノgroupノcommon pointトナツテ居ル。コノsurfaceノgroupヲ(15″)トナヅケルト、(15)ノgroupカラ(15′)ニ選リ出シタ代表者ガカハツテ、即チ凡テノ代表者ニツイテphase angleガ同ジ大キサ丈カハツテコレガgroup(15″)ヲ作ルノデアル。コレ等(15″)ノsurfacesノphase angleガQ点ニ於テ一致スル。

要スルニ

$$(17)\qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right)_0 \quad \cdots\cdots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_n} = \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_n}\right)_0$$

ナル n-equations カラ time ノ function トシテキメタ点 Q ハ常ニ (15) ノ wave surface ノ各時ニ於ケル phase ノ一~~逸~~致スル点ヲアラハス。

(17) ノ n 個ノ surface 中第一ノ surface 丈ガ式中ニ time ヲフクンデ居ルカラ 運動シテ居リ. 他ノ surfaces ハ固定シテ居ル。ソノ n-1 個ノ静止セル surfaces ノ section curve トシテ point ~~P~~ Q ノ orbit ガ決定サレル。コレガ

$W = const$ ノ surfaces ノ orthogonal trajectory ナルコトハ容易ニ証セラレル。

即チ假定ニヨリ ~~W(1')~~ W ハ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ ニツイテ identically ニ (1') ノ式ヲ満足スル。今 (1') ヲ α_κ ($\kappa = 2, 3, \cdots n$) デ微分スルト $\frac{\partial W}{\partial \alpha_\kappa} = const$ ナル surface ノ surface normal ハ各点ニ於テ其ノ点ニ於ケル $W = const$ ノ surface ヘノ surface normal ニ垂直デアル。イヒカヘレバ、両方ノ surface ハ夫々他方ノ surface normal ヲ含ンデ居ル。一般ニ (17) ノ surfaces ノ内ノ上ノ n-1 ノ静止セル surfaces ノ section curve ガ分岐シテオラヌナラバ、section curve ノ各 line element ハ n-1 surfaces ノ唯一ノ共通ノ line element トシテ 其ノ点ヲ通ル W-surface ノ normal ト一致スル。故ニ section curve ガ W-surfaces ノ orthogonal trajectory デアル。

一言ニシテイヘバ、W ハ universal constant $\frac{1}{h}$ ヲ除ケバ wave function ノ phase ヲアラハシテ居ル。ソコデ wave system ノ continuous ナ manifold ヲ考ヘ、ソレガ parameter α_i ニ continuously ニ correspond スルトスルト $\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = const$ ナル equations ハ無限ニ接近シタ wave system ノ凡テガ同ジ phase ヲ有スル点ヲ決定スル。

然ルニ (17) ノ方程式ハ Jacobi ノ second system of equations ト

一致シテ居ルカラ、次ノ結論ヲ得ル。

n-parameter ニ depend スル infinitesimal manifold of wave systems ノ凡テノ wave surface ニツイテ phase ガ一致シテ居ル様ナ点ハ mechanical system ニ於ケル representative point ト同ジ法則ニ従ッテ運動スル。

扨テコノ wave ノ superposition ノ ~~結果~~ resultant wave ガ phase ノ一致シテ居ル点ノ周圍比較的小ナル範圍内ノミデ相當ナ amplitude ヲ有シ、其ノ他ノ到ル所デハ干渉ニヨッテ打消ストイフコトヤ、又コノコトガ少クトモ amplitude ヲ適當ニトリ、wave surface ノ形ヲ特別ニトルコトニヨリ成立スルトイフコトヲ嚴密ニ證明スルノハ非常ニ困難デアル。

反對ニ、resultant wave ガ相當ナ amplitude ヲ有スル範圍ガ少クモ wave length ノ多数ヲ各方向ニ於テフクンデ居ルコトガ確カデアル。

何故カトイヘバ第一 phase ノ一致シテ居ル点カラ少数ノ wave length 丈ヘダヽッタ所デハ phase ノ一致ハ殆ンド disturb サレズ、第二ニ普通ノ optics デ取扱フ three dimensional euclidian space デハ一般ニコノコトガ成立スルカラデアル。

其處デコノ問題ノ證明ハ一先ヅ打切トシテ、次ノ如キ hypothesis ヲ立テルコトニスル。

即チ、實際ノ力學的現象ハ適當ナ方法ニヨリ q-space ニ於ル波動現象ト解釋サレ、representative point ノ運動現象トハ解釋シナイノデアル。classical dynamics ノ對象デアッタ representative point ノ motion ノ研究ハ一ツノ approximation ニ過ギナイノデアッテ、實際ノ光學現象ニ對スル幾何光學ト同ジ地位ニアルト考ヘラレル。macroscopic ノ mechanical phenomena ハ上ニ述ベル様ナ wave signal ト想像スベキデアル。但シ其ガ orbit ノ geometrical structure ニ比較シテ approximately ニ一点ト見ナシ得ルカラ、point dynamics ガ適用シ得ル。上述ノ如ク、

カヽル場合ニハ signal 即チ wave group ガ classical dynamics ニ於ケル representative point ト同ジ法則ニ従ッテ動ク。
故ニ orbit ノ structure ガ wave length ニ比シテ非常ニ粗大デハナクナルカ、更ニ進ンデ比較シ得ル程度トナルト、コノ取扱ヒ方ハ意味ヲ失フ。コノ場合ニハ厳密ナ波動論的ナ取扱ヲセネバナラヌ。即チ運動方程式カラ出発スルカハリニ波動方程式カラ出発セネバナラヌ。之ハ丁度廻折現象ノ説明ニ幾何光学ガ使ヘナクナルト同ジコトデアル。

コノ意味ニ於テ原子ノ内部ニ於テハ electron ノ orbit 及ビ orbit 上ノ electron ノ位置トイフコトハ其ノ意味ヲ失フコトヽナル。

然ラバ如何ナル方法ニヨリ力学ヲ波動論的ニ改ムベキデアラウカ。其ノ出発点ハ (6) 又ハ (6') ノ mechanical ノ energy parameter 及ビ frequency ノ function トシテ與ヘラレタ wave velocity ノ式デアル。wave equation ハ必ズシモ二次式トハ定メラレヌガ簡単ノタメ

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\psi - \frac{1}{u^2}\ddot{\psi} = 0 \qquad (18)$$

ナル wave equation ガ $e^{2\pi i\nu t}$ ノミヲ time factor トシテフクム様ナ現象ニ對シテアテハマルモノトスル。
即チ (6)(6')(11) ヲ用ヒレバ、

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(h\nu - V)\psi = 0 \qquad (18')$$

or

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(E - V)\psi = 0 \;^{*} \qquad (18'')$$

ガ成立スルモノト仮定スル。
differential operator ハ勿論 line element (3) ニ関スルモノデアル。

コノ (18) ノ second order ノ partial differential equation ガ wave mechanics ノ唯一ノ equation デアル。
コレニ initial condition ト boundary condition ヲアテヘナルト solution ハ完全ニ定マル。但シコノ場合更ニ

*コノ式ハ $T(q_k, p_k) + V(q_k) = E$
ナル Hamilton ノ Equation ニ於テ p_k ヲ

$$p_k = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_k}$$

ナル operator デオキカヘテ之ヲ一ツノ function ψ ニ operat スルト

$$T\left(q_k, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_k}\right)\psi + V(q_k)\psi = E\psi$$

トナッテ直チニ出テクル。

次ノ如キ殆ンド自明ナ條件ヲ附ケ加ヘル。

即チ function ψ ハ configuration space (q-space) 全体ニ於テ、到ル所 one valued, finite デ且 continuous デナケレバナラヌ。

コレ以外ニハ一ツモ特別ノ條件ハ要セヌ。classical quantum theory ニ於ケル quantum condition ハ此ノ内ニフクマレテ居ルノデアル。

classical quantum theory デハ、先 dynamical ニ可能ナ orbit ヲ classical dynamics ニヨツテ決定シ、然ル後ニ、特別ノ條件 所謂 quantum condition ニヨツテ solution ノ continuum ノ中カラ、discrete ニ選ビ出スノデアルガ、

上ノ如クスレバ、function ψ ガ到ル所 one valued, finite and continuous デ適當ナ boundary condition ヲ満足セネバナラヌトイフ條件カラ、自然ト energy E ノ value ノ内條件ニ適スル ψ ノ solution ヲ與ヘルモノハ取除シ、所謂 energy level ガアル場合ニハ continuous ニ、アル場合ニハ discrete ニ定メラレルノデアル。コノ E ノ値ガ differential equation (18) ノ Eigenwert ナル。故ニ問題ハイカナル E ニ對シテ equation (18) ガ條件ニ適スル solution ヲ有スルカヲ決定スル Eigenwertproblem トナル。

次ノ節デ其ノ最モ代表的ナ例トシテ Kepler motion 即チ Hydrogen atom ノ問題ヲ Eigenwert problem トシテトカウ。

* Schrödinger: Quantisierung als Eigenwertproblem I.
Ann. der. Physik. 79. P. 361. (1926)

コノ問題ヲ matrix 理論及ビ q-number ノ理論ニヨッテ取扱ッタノハ夫レ
W. Pauli: Zs. f. Phys. 36, P. 336 (1926)
P. A. M. Dirac: Proc. Roy. Soc. A. 110, p. 561 (1926)
（又 Born: Probleme der Atomdynamik p. 98
杉浦義勝氏：新量子力學ト其ノ應用. 48頁 ）

** Schrödinger ノ元ノ論文デハ、コノ wave equation ハ次ノ如クシテ出シテアル。
Hamilton ノ partial differential equation

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E$$

ニオイテ

$$S = K \log \psi$$

トオク。（K ハ action ノ dimension ヲ有スル。ソコデ $K = \frac{h}{2\pi}$ トオクト結果ガ實驗ト一致スルコトガワカル。）
スルト Hamilton ノ equation ハ

$$H\left(q, \frac{K}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = E$$

トナル。今ノ Kepler motion ノ場合ニハ

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi^2 = 0$$

コノ式ヲトケバ、classical dynamics ソノママデアルガ、コノカハリニ次ノ†

§ 水素原子ノ問題ヘノ應用*

以上ノ一般理論ノ應用トシテ先ヅ水素原子ノ問題ヲ考ヘテ見ル。
コノ場合 nucleus ノ mass ハ electron ノ mass ニ比シテ非常ニ大キイカラ nucleus ハ靜止シ、一ツノ electron ガ nucleus ノ Coulomb ノ attraction ノ下ニ運動スルトセバ、classical dynamics ニオケル Kepler motion ノ問題トナル。
electron ノ mass ヲ m, electron 及ビ nucleus ノ charge 共ニ e トセバ、kinetic energy ハ

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

potential energy ハ

$$V = -\frac{e^2}{r}$$

トナル。但シ x, y, z ハ nucleus ヲ origine トセル electron ノ coordinates、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
ソコデ line element ハ (3) カラ、

$$ds^2 = m\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$$

従ッテ wave equation (18″) ハ

$$\frac{1}{m}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) + \frac{8\pi^2}{h^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0 \qquad (19)$$

トナル。**
簡單ノタメ $K = \frac{h}{2\pi}$ トオクト、(19) ハ

$$\Delta \psi + \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0 \qquad (19')$$

トナル。

(19′) ヲトクニハ例ヘバ之ヲ space polar coordinates r, θ, φ ニナホシテ、ψ ハ r, θ, φ ノ各々ノ function ノ product デアルトシテ

$$\psi = \chi(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi) = \chi(r)\,S(\theta, \varphi)$$

トオクト、(19′) ハ

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \chi}{\partial r}\right) + \frac{2m}{K^2} r^2 \left(E + \frac{e^2}{r}\right)\chi = C \qquad (20)$$

† Variation ノ問題トシテ考ヘル。即チ space 全体ノ integral ニ對シテ

$$\delta J = \delta \iiint dx\,dy\,dz \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2-\frac{2m}{K^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\psi^2\right] = 0$$

ガ成立スルモノトスル。コレヲカキカヘルト．

$$\frac{1}{2}\delta J = \int df\,\delta\psi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \iiint dx\,dy\,dz\,\delta\psi\left[\Delta\psi+\frac{2m}{K^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\psi\right] = 0$$

従ツテ先 任意点ニ對シテ

$$\Delta\psi + \frac{2m}{K^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\psi = 0 \qquad (a)$$

次ニ無限大ノ所ニアル closed surface ニツイテ integral

$$\int df\,\delta\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}=0 \qquad (b)$$

ガ成立セネバナラヌ。

(a) ハ $K=\frac{h}{2\pi}$ トトレバ (19) 式ト一致シ．(b) ハ infinity ニオケル boundary condition ヲ與ヘテ居ル。

故ニ本文ノ如ク直接 wave equation ヲ作レバ (b) ノ condition ハ考慮スル必要ガナイ。

* 函数論ニヨル厳密ナ証明ハ
Schlesinger: Differentialgleichungen (Sammlung Schubert)
〃 : Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Dif. gl.

** $r^2\frac{d\chi}{dr}=y$ トオクト (21) ハ $\frac{dy}{dr}+\left(\frac{2mE}{K^2}+\frac{2me^2}{K^2r}-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)y=0$ トナル。カヽル linear homogeneous equation デハ coefficient (　　) 係数ノ singular point ノミガ equation ノ singular point ナルコトガ証明サレル。従ツテ $r=0$ (及ビ $r=\infty$) ノミガ singular point トナル。
(Schlesinger: Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Diff. gl. p127 以下参照)

及ビ

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)=-C \qquad (20')$$

トナル。ココニ C ハ any constant デアル。
先 (20') ハ常ニアラハレル式デ．其ノ solution ハ

$$C=n(n+1)$$

トオクト、一般ニ Kugelflächenfunktion

$$S_n = A_0 P_n(\cos\theta)+\sum_{\nu=1}^{n} (A_\nu\cos\nu\varphi+B_\nu\sin\nu\varphi)P_{n,\nu}(\cos\theta)$$

トシテアラハサレル。
ココニ P_n ハ Legendre ノ polynomial

$$P_{n,\nu}(\cos\theta)=\sin^\nu\theta\cdot P_n^{(\nu)}(\cos\theta)$$

$$P_n^{(\nu)}(\xi)=\frac{d^\nu P_n(\xi)}{d\xi^\nu}$$

デアル。

サテ前節ニ述ベタ如ク wave equation ノ solution ハ到ル所 one valued, continuous, finite デナケレバナラヌ。従ツテ S_n ハ φ ノ one valued function デナケレバナラヌカラ、n ハ integer デアル他ハナイ。
ソコデ (20) ノ式ハ

$$\frac{d^2\chi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\chi}{dr}+\left(\frac{2mE}{K^2}+\frac{2me^2}{K^2r}-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)\chi=0 \qquad (21)$$

$$n=0,1,2,3\cdots$$

トナル。

吾々ハコノ式ノ solution トシテ r ノ real, not negative ナ凡テノ値ニ對シテ finite ナ function ヲ求メネバナラヌ。
以下証明ヲ省イテ結果丈ヲ簡単ニ述ベルコトニスル。*
equation (21) ハ complex ノ r-plane ニ於テ $r=0$, $r=\infty$ ノ二ツノ singular point ガアル。コノ内 $r=\infty$ ハ essential singular point デアルガ $r=0$ ハソウデナイ。**
コノ二ツノ singular point ガ r ノ real interval ニ対スル boundary point トナッテヰル。従ッテ一般ニハ equation (21) ハ両方ノ boundary

ニ於テ finite ナ integral ヲ有セナイ。equation ノ constants ガアル特別ノ値ヲトッタ時ノミ finite ノ integral ガ存在スル。コノ constants ノ値ヲ定メネバナラヌ。

先 singular point $r=0$ ヲ考ヘル。コノ点ニオケル integral ノ状態ヲ決定スル determinierende Fundamentalgleichung ハ

$$\rho(\rho+1)+2\rho-n(n+1)=0$$

其ノ根ハ　$\rho_1=n,\ \rho_2=-(n+1)$

從ッテ両方ノ canonical integral ノコノ点ニ於テ exponent n 及ビ $-(n+1)$ ニ屬スル。コノ内、n ハ not negative デアルカラ初メノ exponent ノミトリウル。コノ integral ハ r ガカラハヂマル power series デアラハシウル。他ノ singularity ハ ∞ ダデアルカラコノ series ハ ganze Transzendente ヲアラハス。

次ニコノ function ノ positive real axis 上ノ infinity ニオケル状態ヲ見ルニ、$\chi=r^{\alpha}U$ トオイテ α ヲ n or $-(n+1)$ トトルト $1/r^2$ ノ term ガ消エル。(21) ハ

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2(\alpha+1)}{r}\frac{dU}{dr}+\frac{2m}{K^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)U=0 \qquad (21)'$$

トナル。尚 $\alpha=n$ トトッタトスル。スルト U ハ $r=0$ デ exponent 0 ニ屬シテ居ル。

(21)′ ハ Laplace ノ equation ト名ヅケラルルモノノ特別ノ形デ、一般ニ

$$U''+\left(\delta_0+\frac{\delta_1}{r}\right)U'+\left(\varepsilon_0+\frac{\varepsilon_1}{r}\right)U=0$$

ナル形ヲトル。** 今ノ場合 constants ノ値ハ

$$\delta_0=0,\quad \delta_1=2(\alpha+1),\quad \varepsilon_0=\frac{2mE}{K^2},\quad \varepsilon_1=\frac{2me^2}{K^2}$$

コノ equation ハ Laplace ノ Transformation ヲ行ッテ integration ガ出来テ、

$$U=\int_L e^{zr}(z-c_1)^{\alpha_1-1}(z-c_2)^{\alpha_2-1}\,dz \qquad (22)$$

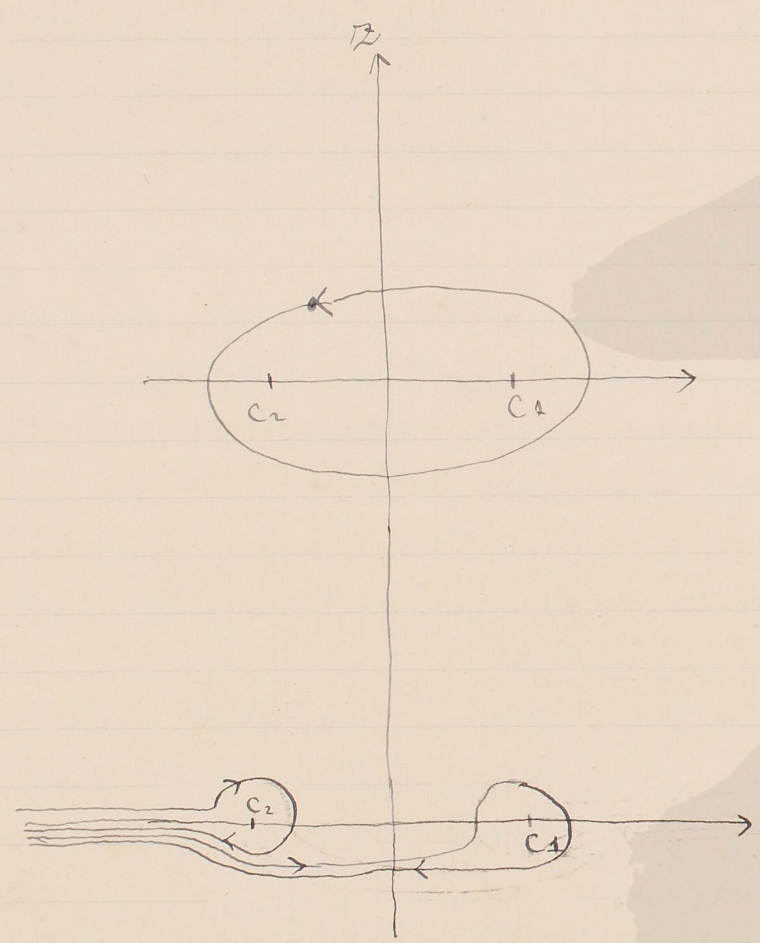
トナル、但シ integration ノ path L ハ

$$\int_L \frac{d}{dz}\left[e^{zr}(z-c_1)^{\alpha_1}(z-c_2)^{\alpha_2}\right]dz=0 \qquad (22)'$$

** Schlesinger: Einführung p. 260.

トナル樣ニナル。
constants c_1, c_2 ハ
$$z^2+\delta_0 z+\varepsilon_0=0$$
ノ solution;
$$\alpha_1=\frac{\varepsilon_1+\delta_1 c_1}{c_1-c_2}, \quad \alpha_2=\frac{\varepsilon_1+\delta_1 c_2}{c_2-c_1}$$
今ノ場合ハ
$$c_1=+\sqrt{\frac{-2mE}{K^2}} \quad c_2=-\sqrt{\frac{-2mE}{K^2}}$$
(23)
$$\alpha_1=\frac{me^2}{K\underset{+}{\sqrt{-2mE}}}+n+1, \quad \alpha_2=-\frac{me^2}{K\underset{+}{\sqrt{-2mE}}}+n+1,$$

r ガ ∞ トナル時ノ U ノ asymptotic ノ状態ヲ見ルニ. 先 α_1, α_2 ガ real integer ノ場合ヲ除ク. (カヽル場合ハ
(23)'
$$\frac{me^2}{K\underset{+}{\sqrt{-2mE}}}=\text{real integer}$$
ノ場合丈デアル。)
r ガ real positive デ infinity トナル時ノ solution ノ状態ハ次ノ二ツノ linearly independent ナ solution ノ状態ニヨツテ定マル。即チ integration ノ path L ヲ、二ノ両方ノ solution ニ於テ共ニ $z=\infty$ カラヤツテ来テ同ジ路ヲ通ツテ又 $z=\infty$ ニ去リ、且其ノ方向ガ
$$\lim_{z=\infty} e^{zr}=0$$
トナル樣、換言セバ zr ノ real part ガ negative infinity トナル樣ニトル。カヽル solution ヲ U_1, U_2 トセヨ。
コノ path ニ對シテハ明カニ (22') ノ condition ハ満足サレテ居ル。コノ場合一ツノ solution (U_1) デハ c_1 ヲ一周シ、他ノ solution デハ c_2 ヲ一周スルノデアル。
コノ両方ノ solution ハ非常ニ大キナ real positive ナ r-value ニ對シテ asymptotically ニ
$$U_1 \cong e^{c_1 r} r^{-\alpha_1}(-1)^{\alpha_1}(e^{2\pi i\alpha_1}-1)\Gamma(\alpha_1)(c_1-c_2)^{\alpha_2-1}$$
$$U_2 \cong e^{c_2 r} r^{-\alpha_2}(-1)^{\alpha_2}(e^{2\pi i\alpha_2}-1)\Gamma(\alpha_2)(c_2-c_1)^{\alpha_1-1} \quad (24)$$
デアラハサレル。



ソコデ $E \geqq 0$ ノ場合ヲ区別シテ考ヘネバナラヌ。

1、$E>0$、コノ時ニハ$(23)'$ノ成立スル場合ハナイ。又 c_1, c_2 モ pure imaginary トナル。従ッテ(24)ノ中ノ exponential function ハ finite ナ periodic function デアル。更ニ α_1, α_2 ノ値カラ U_1, U_2 ハ共ニ r^{-n-1} ノ如クニ 0 ニ近ヅク。U ハ U_1, U_2 ノ linear combination デアルカラ、U ニツイテモ同様ニイヘル。更ニ X ヲ考ヘルトキニハ $r^n U$ デアルカラ矢張リ r^{-1} ノ如クニ 0 ニ近ヅク。

即チ Differential equation (19′) ハ $E>0$ ニ對シテハ常ニ全空間デ one valued, finite ~~steng~~ continuous デ infinity デハ $\frac{1}{r}$ ノ如クニ 0 ニ converge スル様ナ solution ヲ有ス。

2、$E<0$、コノ場合ニハ$(23)'$式ノ成立スル場合モアリウル。シバラクコレノ成立スル場合ヲ除イテ考ヘル。スルト(23)ニヨリ(24)ノ U_1 ハ $r=\infty$ ニ對シ無限ニ増加スルガ、U_2 ハ exponential ニ 0 ニ近ヅク。従ッテ U ガ U_1 ヲフクマズ、U_2 = constant factor ヲ乗ジタモノデアル時ニ限ッテ finite トナル。シカシカカル場合ハ起ラヌ。何故カトイフト integration ノ path トシテ c_1, c_2 ノ両方ヲマハル path ヲトルト、$\alpha_1+\alpha_2$ ノ sum ガ integer デアルカラ integrand ノ Riemann surface ニ於テ path ハ close サレテ居ル。従ッテコノ時ニハ$(22)'$ノ條件ハ満足サレ、integral ガ求ムル U ヲアラハス。シカルニコノ closed path ハ U_1, U_2 ヲ求メタ時ノ path ノ combination トシテ得ラレル。シカモ combination ノ factor ハ 0 デハアリエヌ。従ッテ U ハ U_1 ヲフクマネバナラヌ。

従ッテ $E<0$ ノ場合ニハ$(23)'$ノ條件ノ成立セヌカギリ吾々ノ variation ノ problem ニハ一ツモ solution ガナイ。

サテ$(23')$ノ條件ヲ満足スル discrete ナ E-value ニ對シテハ如何。コノ時ニハ α_1, α_2 ハ共ニ integer デアル。コノ integration ノ path ノ内、U_1 ニ對スルモノハ値ガ 0 トナラヌタメニハ path ヲカヘネバナラヌ。何故カトイヘバ α_1-1 ハ確カニ正デアルカラ c_1 ハ分岐点デモナク又 pole デモナイ。普通ノ 0 点デアル。c_2 ノ点モ又 α_2-1 ガ負デナイ時ニハ regular デアリウル。如何ナル場合ニシテモ二ツノ適

適当ナ路ヲ撰ンデ積分ノ結果ヲ既知ノ函数デアラハスコトガ出来ル。

即チ
$$\frac{me^2}{K\sqrt{-2mE}} = l \; ; \quad l = 1, 2, 3, 4 \cdots \qquad (25)$$

トスルト，(23)ニヨリ
$$\alpha_1 - 1 = l + n \; , \quad \alpha_2 - 1 = -l + n$$

トナル。ソコデ $l \leq n$ ノ場合ト $l > n$ ノ場合トヲ区別セネバナラヌ。

a) $l \leq n$ ノ場合ハ c_1, c_2 ハ何レモ singular charater ヲ失ヒ，且(22)′ノ條件ヲ満足スル積分ノ路ノ起点又ハ終点トナリ得ヌ。第二ノ起点又ハ終点トナル点ハ $-\infty$ (real) デアルガ，結局何レノ二点ノ間デ積分シテモ結果ハ $r = 0$ 又ハ $+\infty$ デ無限大トナル。

コノ場合ニハ解ハ存在シナイ。

b) $l > n$。(25)カラ c_1 ハ0点デアリ，c_2 ハ少クトモ一次ノ Pole デアル。