On the Polarisation of Light-Quanta

Introduction

光ノpolarisationノ現象ハ、光ガtransverse waveデアルトシテ説明シ得タノデアルガ、光ノ光量子ノ集リデアルト仮定シタ場合ニハpolarisationヲ如何ニシテ説明スベキカ、甚ダ困難ナ問題トナル。物質ノ運動ニ対シテBroglie waveヲ考ヘル様ニ、光量子ノ運動ニ対シテモ、之ニ伴フwaveヲ考ヘ、之ガ光ノwave propertyヲ代表スルモノト仮定シテモ、コノwaveヲdensityノ変化ヲアラハス一種ノlongitudinal waveデアルト考ヘル時ニハpolarisationノ起リヨウハナイ。

然ラバ光量子ノ立場ヨリ偏光現象ヲ説明スルニハ如何ニセバヨイデアラウカ。我々ハ種々ノ点ニ於テElectronトlight-quantumトノ類似ヲ認メルノデアルガ、偏光ニ類似セル電子ノ性質ハ所謂electronノspinningデアル。コノspinningヲ考ヘネバナラヌ理由トシテ、Dirac**ハElectronニ対スルsecond degreeノHamiltonian functionガfirst degreeノfactorニ分解シ得ベキデアルトイフ仮定カラ出発シタノデアル。其ノ結果四ツノwave functionsニ対スル四ツノfirst orderノsimultaneous differential equationsヲ得、electronガmagnetic momentヲ有セネバナラヌコトガ自然ニ出テキタノデアル。

コノ考ヘヲ光量子ニ対シテアテハメレバドウナルデアラウカ。其ノ結果ハ以下述ベル如ク、一ツノ光量子ヲlinear polarised lightニ相当シタモノト考ヘルコトガ出来、又コレガ二ツノrotationノ方向ノ逆ナcircular polarised lightニ~~分解~~相当スル二ツノwave functionsニヨッテアラハサレ、各waveハmagnetic fieldニ沿セテpropagation speedヲ異ニスルベキデアルトイフ結論ヲウル。之ハ即チmagnetic rotation of plane of polarisationヲ説明スルモノデアル。更ニ光ニヨッテinduceサレタ~~electrons~~ atomicノfieldヲ計算セバ、polarised light-quantaノvelocityノ変化ヲ知ルコトガ出来、rotatory dispersionノ式ヲ求メルコトガ出来ル。

** Roy. Soc. Proc. (117 p.610, 1928), (118 p.351, 1928)

[37]

§ 1. Wave equations for a light-quantum in free space

今振動数 ν ナル一ツノ光量子ガ free space デ speed c ヲモッテ rectilinear motion ヲナシテ居ル~~トセヨ~~シ。コレニ對シテ矢張リ c ナル speed ノ Broglie-wave ガ同ジ方向ニ propagate トスルモノト考ヘヨウ。

ソノ場合光量子ノ ~~impulse~~ impulse, energy ハ夫々

$$p_x = \frac{h\nu}{c}(n\cdot i) \qquad p_y = \frac{h\nu}{c}(n\cdot j) \qquad p_z = \frac{h\nu}{c}(n\cdot k)$$

$$p_t = h\nu$$

(但シ n ハ motion ノ direction ノ unit vector デアル)

デアラハサレルカラ

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{1}{c^2}p_t^2 = 0 \qquad (1)$$

之ニ對シテ wave equation ハ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \qquad (2)$$

トナル。

今 (2) ノ式ガ ~~linear~~ first order ノ factor ニ分解シ得タリトシ

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi = 0$$

ナル形デアルトシヨウ。

然ルトキハ α, β, … ハ次ノ関係ヲ満サネバナラヌ

$$\cancel{\alpha\alpha =} \quad \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1$$

$$\alpha\beta + \beta\alpha = \beta\gamma + \gamma\beta = \gamma\alpha + \alpha\gamma = 0$$

カヽル関係ヲ満足スル~~式~~数ハ普通ノ数所謂 c-number ニハ存在セヌ ~~從ッテ~~ソコデ之等ヲ夫々 matrix ト考ヘルト、之ノ式ヲ満足スル matrix ハ無数ニアルガ

例ヘバ
$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \pm i \\ +i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

トトレバヨイ。

然ルトキハ
$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi = 0$$

ナル式ハ φ_1, φ_2 ナル二ツノ ~~wave~~ function ニ對スル次ノ simultaneous ヲアラハスモノト考ヘラレル。

$$+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \pm i\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \pm \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \pm \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = 0$$
$$+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \pm \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \pm \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = 0 \qquad (3)$$

コレ等ノ式カラ φ_1, φ_2 ノイヅレカ一方ヲ消去セバ φ_1, φ_2 ハ共ニ (2) ノ式ヲ満足スルコトガワカル。

カクノ如クニシテ得タ φ_1, φ_2 ナル二ツノ function ノ意味ハ electromagnetic field ノ作用セル場合ヲ考ヘネバ判明セヌ。之ハ次ノ節デ述ベル。

§ 2. Light-quanta in the electro-magnetic field

光量子ガ電磁場デドウイフ運動ヲスルカ、更ニ厳密ニイヘバ、光量子ニ對スル wave equation ハ如何ナル形ヲトルカハ明カデハナイガ、electron ノ場合ト analogous ニ、potential ガ V, A_x, A_y, A_z ナル field デハ

p_x, p_y, p_z, p_t ハ夫々 $p_x + kA_x$, $p_y + kA_y$, $p_z + kA_z$, $p_t - kcV$ デ於キカヘラレルトシヨウ。

然ル時ハ (3) ハ

$$\cancel{p_x + \frac{e}{c}A_x - i(p_y +}$$

$$(5) \quad \{p_x + kA_x - i(p_y + kA_y)\}\varphi_2 + \{p_z + kA_z - \tfrac{1}{c}p_t + kV\}\varphi_1 = 0$$

$$(6) \quad \{p_x + kA_x + i(p_y + kA_y)\}\varphi_1 - \{p_z + kA_z + \tfrac{1}{c}p_t - kV\}\varphi_2 = 0$$

$$(5) \times \{p_z + kA_z + \tfrac{1}{c}p_t - kV\} + (6) \times \{p_x + kA_x - i(p_y + kA_y)\}$$

ヲ得ルGr.

$$\{p_z + kA_z + \tfrac{1}{c}p_t - kV\}\{p_z + kA_z - \tfrac{1}{c}p_t + kV\}\varphi_1$$
$$+ \{p_x + kA_x - i(p_y + kA_y)\}\{p_x + kA_x + i(p_y + kA_y)\}\varphi_1 = 0$$

$$[(p_z + kA_z)^2 - (\tfrac{1}{c}p_t - kV)^2 + (p_x + kA_x)^2 + (p_y + kA_y)^2]\varphi_1$$
$$+ \varphi_1 k\left(\tfrac{p_t}{c}A_z + p_z V\right) + i\varphi_1 k\cdot(p_x A_y - p_y A_x) = 0.$$

$$\text{or} \quad -\frac{h^2}{4\pi^2}\Box\varphi_1 + \frac{2hk}{2\pi i}\left(A\,\mathrm{grad}\,\varphi_1 + \frac{V}{c}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right) + k^2(A^2 - V^2)\varphi_1$$
$$\pm \frac{hk}{2\pi i}E_z\varphi_1 + \frac{hk}{2\pi}H_z\varphi_1 = 0.$$

φ_2 ニツイテモ

〃 〃 〃 〃 〃 〃

$$+\frac{hk}{2\pi i}E_z\varphi_2 - \frac{hk}{2\pi}H_z\varphi_2 = 0.$$

之等ハ夫々

(7)
$$\Delta\varphi_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + \frac{4\pi i k}{h}\left(A\,\mathrm{grad}\,\varphi_1 + \frac{V}{c}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right) - \frac{4\pi^2k^2}{h^2}(A^2-V^2)\varphi_1$$
$$-\frac{4\pi k}{h}H_z\varphi_1 - \frac{2\pi i k}{h}E_z\varphi_1 = 0$$

(8)
〃　〃　〃　〃　〃
$$+\frac{4\pi k}{h}H_z\varphi_2 + \frac{2\pi i k}{h}E_z\varphi_2 = 0$$

今 z-direction ニ $\frac{c}{n}$ ナル speed デ propagate スル frequency ν ナル wave ヲ考ヘテ
$$\varphi_1 = a e^{2\pi i\nu\left(\frac{n}{c}z - t\right)}$$
トシテ (7) ニ入レレバ
$$\frac{4\pi^2\nu^2}{c^2}(n^2-1) + \frac{8\pi^2 k\nu}{hc}(A_z n - V) + \frac{4\pi^2k^2}{h^2}(A^2-V^2)$$
$$+\frac{4\pi k}{h}H_z + \frac{2\pi i k}{h}E_z = 0$$

or
$$n^2 - 1 + \frac{2kc}{h\nu}(A_z n - V) + \frac{k^2c^2}{h^2\nu^2}(A^2 - V) - \frac{kc^2}{\pi h\nu^2}H_z$$
$$+\frac{ikc^2}{2\pi h\nu^2}E_z = 0$$

今簡單ノタメ z-direction ニハ electric force ハナイトセバ $E_z = 0$.
従ッテ
$$n = -\frac{kcA_z}{h\nu} \pm \sqrt{1 + \frac{k^2c^2A_z^2}{h^2\nu^2} + \frac{2kcV}{h\nu} - \frac{k^2c^2}{h^2\nu^2}(A^2-V^2) + \frac{kc^2}{\pi h\nu^2}H_z}$$
field ノナイ時ニハ $n=1$ デアルカラ ＋ノ方ヲトル
φ_2 ニツイテモ同様ニシテ
$$n' = -\frac{kcA_z}{h\nu} \pm \sqrt{1 + \frac{k^2c^2A_z^2}{h^2\nu^2} + \frac{2kcV}{h\nu} - \frac{k^2c^2}{h^2\nu^2}(A^2-V^2) - \frac{kc^2}{\pi h\nu^2}H_z}$$

φ_1, φ_2 ヲモッテ逆ノ方向ニ rotate スル二ツノ circular polarisation ノ component ニ相當スル wave function トセバ、夫々ニ對スル refractive index n, n' ハ propagation ノ direction ニ magnetic field ガ~~アル時~~作用スル時ニハ
$$n - n' \fallingdotseq \frac{kc^2}{\pi h\nu^2}\frac{H_z}{N} \qquad \text{where } N = \sqrt{1 + \frac{k^2c^2A_z^2}{h^2\nu^2} + \frac{2kcV}{h\nu} - \frac{k^2c^2}{h^2\nu^2}(A^2-V^2)} - \frac{kcA_z}{h\nu}$$

従ッテ plane of polarisation ノ rotation amount ハ z ナル距離ヲ進ンダ時
$$\delta = z\frac{\pi}{\lambda}(n-n')$$
$$= \frac{kc^2}{h\nu^2}\frac{H_z}{\lambda N}$$
$$\lambda \fallingdotseq \frac{c}{N\nu}$$
$$\therefore\ \delta = \frac{kc}{h\nu}H_z$$
or =