

P

Die Energieniveaus des Wasserstoffatoms nach der
 Diracschen Quantentheorie des Elektrons
 W. Gordon. (48 S. 11)

Nach der von Dirac entwickelten Theorie des Elektrons, die die
 Dublettphänomene gerecht wird, ergeben sich die Energieniveaus
 E des Wasserstoffs aus den Differentialgl. für den vom Radius
 r abhängigen Teil der Eigenf. (nach Abspaltung der Kugel-
 f. f_{lm})

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dr} &= \frac{j'}{r} \psi_1 + \left[\frac{2\pi}{h} mc \left(1 - \frac{E}{mc^2}\right) - \frac{\alpha}{r} \right] \psi_1, \\ \frac{d\psi_2}{dr} &= \left[\frac{2\pi}{h} mc \left(1 + \frac{E}{mc^2}\right) + \frac{\alpha}{r} \right] \psi_1 - \frac{j'}{r} \psi_2. \end{aligned}$$

E: Ruheenergie mc^2 \rightarrow Elektronenergie
 α : Feinstrukturkonstante $\frac{2\pi}{h} \frac{e^2}{c}$
 (Kernladung Z \rightarrow $Z\alpha$ \rightarrow $Z\alpha$ \rightarrow $Z\alpha$ \rightarrow $Z\alpha$)
 j' : Dirac, $Q, 2, \dots$ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$
 $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$

$l = 0$	1	2
$j = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
$j' = -1$	1	2

relativistische Dublett $(j', -j'-1)$, Kombination.
 Abschattungsdublett $(j', -j')$
 s-Fein \rightarrow einfach \rightarrow $j' \neq 0$ \rightarrow $\pm 3, \pm 4, \dots$

$|j'|$ Sommerfeld, Azimutal q. z.

Hauptq. z. $n = l+1, l+2, l+3, \dots$

$$\begin{aligned} n &= j'+1, j'+2, j'+3, \dots & j' &\geq 1. \\ n &= -j', -j'+1, -j'+2, \dots & j' &\leq -1. \\ \text{Radial Q. Z. } n' &= 1, 2, 3, \dots & j' &\geq 1 \\ n' &= 0, 1, 2, \dots & j' &\leq -1 \end{aligned}$$

(1) Dichtigkeitsfunktion $\psi^* \psi = \psi^2$ \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow elek. Dichte
 $\frac{(\psi_1^* + \psi_2^*)(\psi_1 + \psi_2)}{Y}$ = \dots

Schrödinger, $X = \dots$ ψ の波動関数. \therefore diskrete Spektrum ($E < mc^2$)
 $2\pi\hbar^{-1} T^{-1}$ $\int_0^\infty (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) dr$ (3)

1. ψ は $e^{\pm k_0 r}$

$$k_0 = \frac{2\pi}{h} mc \sqrt{1 - \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2}$$

2. solution of ψ_2 .

2.1. kontin. Spektr. ($E > mc^2$) = 自由波, wave length (freie Seilen der Energie E), periodic wave.
 2.2. diskrete Spektrum ($E < mc^2$) = 自由波 in two-way wave.

$$\psi_1 = \sqrt{1 - E/mc^2} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$\psi_2 = \sqrt{1 + E/mc^2} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

3. normal coord. r について

$$\frac{d\sigma_1}{dr} = \left(k_0 - \frac{\alpha E/mc^2}{\sqrt{1 - (E/mc^2)^2}} \frac{1}{r}\right) \sigma_1 - \left(j' + \frac{\alpha}{\sqrt{1 - (E/mc^2)^2}} \frac{1}{r}\right) \sigma_2$$

$$\frac{d\sigma_2}{dr} = -\left(j' - \frac{\alpha}{\sqrt{1 - (E/mc^2)^2}} \frac{1}{r}\right) \sigma_1 - \left(k_0 - \frac{\alpha E/mc^2}{\sqrt{1 - (E/mc^2)^2}} \frac{1}{r}\right) \sigma_2$$

4. asymp. wave \rightarrow

$$\sigma_1 = e^{-k_0 r} f_1, \quad \sigma_2 = e^{-k_0 r} f_2$$

5. (diskr. Spek. \rightarrow $k_0 > 0$)

$$\frac{df_1}{dr} = \left(2k_0 - \frac{\alpha E/mc^2}{\sqrt{1 - (E/mc^2)^2}} \frac{1}{r}\right) f_1 - \left(j' + \frac{\alpha}{\sqrt{1 - (E/mc^2)^2}} \frac{1}{r}\right) f_2$$

$$\frac{df_2}{dr} = -\left(j' - \frac{\alpha}{\sqrt{1 - (E/mc^2)^2}} \frac{1}{r}\right) f_1 + \frac{\alpha E/mc^2}{\sqrt{1 - (E/mc^2)^2}} \frac{f_2}{r}$$

$$f_1 = r^p \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}^{(1)} r^{\nu}, \quad f_2 = r^p \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}^{(2)} r^{\nu}$$

$$r^{p-1}: \left(p + \frac{\alpha E/mc^2}{\sqrt{1 - (E/mc^2)^2}}\right) c_0^{(1)} + \left(j' + \frac{\alpha}{\sqrt{1 - (E/mc^2)^2}}\right) c_0^{(2)} = 0$$

$$\left(j' - \frac{\alpha}{\sqrt{1 - (E/mc^2)^2}}\right) c_0^{(1)} + \left(p - \frac{\alpha E/mc^2}{\sqrt{1 - (E/mc^2)^2}}\right) c_0^{(2)} = 0$$

$$p = \pm \sqrt{j'^2 - \alpha^2}$$

(3) 2)

$$p = +\sqrt{j'^2 - \alpha^2}$$

(Ze, Ladung $1/2$ $\sqrt{1 - \alpha^2} > 1/2$ $2 < \sqrt{3}/2 d$
 $= 118.7 \pm 0.1$ \therefore periodic system \rightarrow $\psi(r \pm \pi)$)

$$n' = \frac{\alpha E/mc^2}{\sqrt{1 - (E/mc^2)^2}} - p = \frac{\alpha^2}{1 - (E/mc^2)^2} - j'^2$$

3. 1)

$$\frac{c_0^{(1)}}{c_0^{(2)}} = -\frac{n'}{\frac{\alpha}{\sqrt{1 - (E/mc^2)^2}} - j'}$$

$$c_{\nu}^{(1)} = \frac{(-2k_0)^{\nu} (n' - 1)(n' - 2) \dots (n' - \nu)}{\nu! (2p + 1)(2p + 2) \dots (2p + \nu)} c_0^{(1)}$$

$$c_{\nu}^{(2)} = \frac{(-2k_0)^{\nu} n'(n' - 1) \dots (n' - \nu + 1)}{\nu! (2p + 1)(2p + 2) \dots (2p + \nu)} c_0^{(2)}$$

$$F(\alpha, p, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot x}{1! \beta} + \frac{\alpha(\alpha + 1) x^2}{2! \beta(\beta + 1)} + \dots$$

(entartete hypergeo. Funktion)

4. 1)

$$\sigma_1 = c_0^{(1)} e^{-k_0 r} r^p \sqrt{j'^2 - \alpha^2} F(-n' + 1, 2p + 1, 2k_0 r)$$

$$\sigma_2 = c_0^{(2)} e^{-k_0 r} r^p \sqrt{j'^2 - \alpha^2} F(-n', 2p + 1, 2k_0 r)$$

2. 1) Schröd. Funktion

$$\psi = e^{-k_0 r} r^p F(-n', 2l + 2, 2k_0 r)$$

3. 1)

diskrete Spek. $k_0 > 0$ = ψ 正. α 正. neg. Ganz or Null ($\beta = 0$
 or neg. Ganz $1/2$ $1/3$) $1/2 \dots$ F = Polynom von Grad $-n'$
 $1/2$ $1/3$

4. 1)

2. 1) $n = 1, 2, 3, \dots$ $k_0 = 0$ \rightarrow solution of $p = 0$

j' : pos or neg. α, β : real

α, β : reell, nicht Null oder neg. ganz

$$F(\alpha, \beta, x) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)}{\nu! \beta(\beta+1)\dots(\beta+\nu-1)} x^\nu + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+N-1)}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+N-1)} x^N$$

$$\left\{ \frac{x^N}{N!} + \frac{\alpha+N}{\beta+N} \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} + \frac{(\alpha+N)(\alpha+N+1)}{(\beta+N)(\beta+N+1)} \frac{x^{N+2}}{(N+2)!} + \dots \right\}$$

$N \neq \alpha \neq \beta$ 1) γ, ϕ , coef of x^N + \dots
 2) $\frac{\alpha+N+1}{\beta+N+1} > \delta$ $\delta = 0, 1, 2, \dots$ $\delta < \beta - \alpha$
 $x > 0 \Rightarrow \dots \frac{1}{\delta^N} \left(e^{x\delta} - \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{(x\delta)^\nu}{\nu!} \right)$

$\delta > \frac{1}{2}$ \therefore integral \dots diverge \dots
 \therefore solution \dots

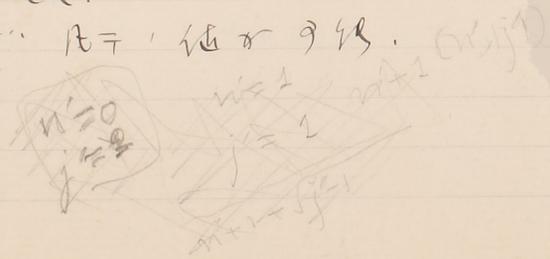
$n' = 0$ \dots $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\alpha}{\sqrt{x}}$
 $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{j'}{p}$ \dots expon. unendlich

$n' = 0, j' \geq 1 \Rightarrow$ solution \dots
 $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \sigma_1 = 0, \sigma_2 = \text{const} e^{-k_0 r} y^{\sqrt{j'^2 - \alpha^2}}$
 $n' = 0, j' \leq -1 \Rightarrow$ solution \dots

$$\frac{E}{mc^2} = \left(1 + \frac{\alpha^2}{(N^2 + \sqrt{j'^2 - \alpha^2})^2} \right)^{1/2}$$

\therefore Sommerfeld's formula

$2E > mc^2 = \dots$



Über den Stoß zweier Punktladungen nach der Wellenmechanik
 W. Gordon (ZS 180, 1928)

Es ist wohl bekannt, wie wichtig die von Rutherford inaugurierte experimentelle und theoretische Untersuchung des Stoßes zweier Punktladungen für die Quantentheorie gewesen ist. Seine Streifenformel für α - und β -Strahlen ist von der Erfahrung weitgehend bestätigt worden. Es ist deshalb von Interesse, dieses Problem nach der Wellenmechanik zu behandeln.

Die Wellenmechanik der Stoßvorgänge ist von Born* begründet worden. Wir wollen den Fall betrachten, daß eine positive Ladung e von der Masse m mit einer positiven Ladung E von unendlich großer Masse zusammenstößt. Beide stoßen sich nach dem Coulombschen Gesetz ab. Nach Born entspricht der Einfall der Teilchen e in einer festen Richtung einer ebenen Welle der de Broglieschen Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{mv_0}$ und ihrer stationären Modifikation in einem Medium vom Brechungsindex

$$\frac{v}{v_0} = \sqrt{1 - \frac{2A}{Y}}, \quad A = \frac{eE}{mv_0^2}$$

wo v_0 die Geschwindigkeit am Anfang, v diejenige im Abstand r von der festen Ladung E , A die halbe Hauptachse der nach der klassischen Mechanik beschriebenen Hyperbeln ist. Wir wollen die klassische mechanische, d. h. strahlenoptische Behandlung voranstellen wegen des Vergleichs mit der wellenoptischen.

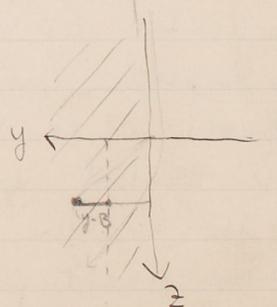
§1. Strahlenoptik. Ist die $+z$ -Achse Einfallrichtung, so ist in einer positiven Halbebene durch diese Achse (auf die wir uns wegen der Axialsymmetrie beschränken können) mit den Koordinaten $z = r \cos \vartheta, y = r \sin \vartheta \geq 0$ das Strahlensystem die Hyperbelschar

$$Y = \frac{B^2}{B \sin \vartheta - A(1 + \cos \vartheta)} \quad B(y-B) = A(z+r)$$

in Polar- bzw. kartesischen Koordinaten. B bedeutet die halbe Nebenachse, die gleich

$$By - A(z+y) = B^2 \quad Ay^2 = B^2 + By^2 - 2By - 2AByz + 2AB^2$$

$$A(z+y)^2 = (B^2 - (By)^2 + A^2)$$





dem Abstand der parallelen Einfallasymptoten von F (Brennpunkt) ist. Die Kanstik \pm (Envelope) ist

$$r = \frac{2A}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad y^2 = 8A(z+2A) = 8A(r-2A)$$

in Polar- bzw. Kartesischen Koordinaten, also eine Parabel vom Parameter $4A$ mit dem Brennpunkt in F, die die $+z$ -Achse umschließt.

Eine B-Hyperbel berührt bei $y=2B$. Durch jeden Punkt des Strahlenfeldes gehen zwei Hyperbeln, eine von uns eine nach der Berührung mit der Kanstik mit den B-Werten

$$B = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - A(z+r)} = \frac{r \sin \theta}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2A}{r \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \right)$$

Ein Teilchen vor der Berührung (oberes Zeichen) wollen wir ursprünglich, eines nachher (unteres Zeichen) gestreut nennen.

Berechnen wir zunächst die Wirkungsfunktion S, d.h. die Phase.

Für den Winkel τ der Strahlen bzw. der Kanstik mit der $+z$ -Achse leitet man aus den obigen Gleichungen ab:

$$\cos \tau = \frac{v_0}{v} \left(1 - \frac{A}{B} \sin \theta \right), \quad \sin \tau = \frac{v_0}{v} \frac{A}{B} (1 + \cos \theta) = \frac{v_0}{v} \frac{y-B}{r}$$

bzw.

$$\cos \tau = \frac{v}{v_0}, \quad \sin \tau = \frac{v}{v_0} \frac{4A}{y}$$

Das Linienelement ds ist $dy / \sin \tau$ und daher $S = m \int v ds = m \int v dy / \sin \tau$

Nach dem Enveloppensatz ist die Differenz der S-Werte zweier Enveloppenpunkte gleich dem S-Integral längs der Enveloppe zwischen den beiden Punkten*. Bezeichnen wir daher S auf die Wellenfläche durch den Scheitel der Parabel, so ist $m \int v dy / \sin \tau$ zu erstrecken auf der Parabel, auf der $\frac{v}{\sin \tau} = v_0 \frac{y}{4A}$, von $y=0$ bis zum Ber.

* Allgemein ist die S-Differenz zweier Punkte gleich dem Integral $m \int v \cos \zeta$ wo ζ der Winkel zwischen Strahl und Kurve, längs einer beliebigen Kurve zwischen den beiden Punkten, wie man erkennt, wenn man die Kurve ersetzt durch einen Polygonzug, der aus infinitesimalen Strahlen- und dann normalen Wellenlinienstücken (den Schnitten der Wellenflächen mit der betrachteten Halbebene) besteht. Auf der Enveloppe ist $\zeta=0$.

Rührungspunkt $y=2B$ der B-Hyperbel und dann auf dieser, wo

$$\frac{v}{\sin \tau} = v^2 r / v_0 (y-B) = \frac{v_0 (r-2A)^*}{(y-B)} = v_0 \left\{ \frac{A^2+B^2}{2AB} - \frac{A}{y-B} + \frac{AB}{2(y-B)^2} \right\}$$

bis zum variablen y. Die elementare Integration liefert

$$S = mv_0 \left\{ \frac{A^2+B^2}{2AB} (y-B) - A \log \frac{y-B}{B} - \frac{AB}{2} \frac{1}{y-B} \right\} = mv_0 \left\{ z - A \log \frac{A(z+r)}{B^2} + \frac{A^2}{B^2} (z+r) + A \right\};$$

letzteres nach der Hyperbelgleichung.

Die Intensität ergibt sich aus der Erhaltung der Teilchen. Es strömen $2\pi i_0 B dB$ Teilchen zwischen B und $B+dB$ ein (i.e. Anfangsströmdichte) und $2\pi i y dy$ durch die damit bestimmte Stromröhre an der Stelle (z, y) , wenn i den dortige Dichte und dy der dortige Normalabstand der Hyperbeln B und $B+dB$ mit den Komponenten

$$dx = -\sin \tau du \quad dy = \cos \tau du$$

ist. Die Erhaltung fordert $i = i_0 \frac{B}{y} \frac{dB}{du}$. $\frac{dB}{du}$ berechnet man leicht aus der Hyperbelgleichung mit den obigen Ausdrücken für $\cos \tau$ und $\sin \tau$. Man findet

$$i = i_0 \frac{v}{v_0} \frac{B^2}{y |2B-y|} = i_0 \frac{v}{v_0} \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{A(z+r)}{B^2} \right)^2 \right|}$$

und daher aus für die Dichte $\rho = i/v$

$$\rho = \rho_0 \frac{B^2}{y |2B-y|} = \frac{\rho_0}{\left| 1 - \left(\frac{A(z+r)}{B^2} \right)^2 \right|}$$

Die Intensität ist proportional der Dichte. Somit die strahlenoptische Wellenfunktion

$$\Psi = \sqrt{\rho_1} e^{\frac{2\pi i}{h} S_1} + \sqrt{\rho_2} e^{\frac{2\pi i}{h} S_2}$$

* Man drücke r durch y aus, indem man $z = \sqrt{r^2 - y^2}$ in die kartesische Hyperbelgleichung setzt und nach r auflöst. Es wird

$$r = \frac{A^2+B^2}{2AB} (y-B) + A + \frac{AB}{2(y-B)}$$

wo der Index 1 sich auf die ursprünglichen, 2 auf die gestreuten Teilchen beziehen soll. Dichte und Stromvektor drücken sich durch ψ so aus:

$$\rho = \psi\psi^*, \quad i = \frac{\hbar}{4\pi im} (\psi^* \text{grad} \psi - \psi \text{grad} \psi^*)$$

(wegen $i = p v = \frac{p}{m} \text{grad} S$). Diese Ausdrücke werden korrespondenzmäßig auch in der Wellentheorie als gültig angenommen.

Nach obigem wird die strahlenoptische Intensität an der Kaustik ($y=2B$) unendlich (wie dies stets der Fall ist). Hier ist demnach die Strahlenoptik auch nicht näherungsweise gültig. Die Experimente über Streuung betreffen jedoch die unter einem bestimmten Winkel gestreuten Strahlen, und bei bestimmten (von Null verschiedenen) Winkel θ kann man die Entfernung r immer so groß machen, daß man sich beliebig weit außerhalb der Kaustik befindet. Man hat dazu nach der Parabelgleichung nur $r \gg 2A / \sin^2 \frac{\theta}{2}$ zu machen. Die Beobachtung finden stets in solchem Abstand statt. Dann kann mit genügender Genauigkeit $B_1 = r \sin \theta (1 - A / 2r \sin^2 \frac{\theta}{2})$, $B_2 = A \cot^2 \frac{\theta}{2}$ setzen, d.h. für die in S und ρ auftretenden Ausdrücke.

$$A(z+r)/B_1^2 = \frac{A}{2r \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left(1 + \frac{A}{r \sin^2 \frac{\theta}{2}}\right),$$

$$A(z+r)/B_2^2 = 2r \sin^2 \frac{\theta}{2} / A.$$

Dann wird ($\beta_0 = 1$ gesetzt)

$$S_1 = m v_0 \left(r \cos \theta + A \log \frac{2r \sin^2 \frac{\theta}{2}}{A} - \frac{A^2}{2r \sin^2 \frac{\theta}{2}} + A \right), \quad \sqrt{\beta_1} = 1$$

$$S_2 = m v_0 \left(r - A \log \frac{2r \sin^2 \frac{\theta}{2}}{A} + A \right), \quad \sqrt{\beta_2} = \frac{A}{2r \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

Mit der bekannten Bezeichnung

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi m v_0 / \hbar$$

erhalten wir bis auf die Ordnung $\frac{2A}{r \sin^2 \frac{\theta}{2}}$ genau

$$\psi = e^{ik \left(r \cos \theta + A \log \frac{2r \sin^2 \frac{\theta}{2}}{A} \right)} \left(1 - \frac{ik A^2}{2r \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$+ \frac{A}{2r \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{ik \left(r - A \log \frac{2r \sin^2 \frac{\theta}{2}}{A} \right)} \quad (1)$$

(unter Weglassen der belanglosen Phasenkonstanten ikA).

Die gestreuten Teilchen entsprechen der Kugelwelle. Ihre Radialstrom ist

$$i_r = \frac{i_0 A^2}{4r^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{i_0 e^2 E^2}{4r^2 m^2 v_0^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (2)$$

die Formel von Rutherford.

Im Falle der Anziehung lautet die Hypergleichung wie oben mit $-A$ statt A . Jetzt ist die $+z$ -Achse Brennpunkt; ursprünglich ($B > 0$) bzw. gestreute Teilchen ($B < 0$) sind solche vor bzw. nach Überschreitung der Achse. Bei Berechnung der Phase tritt an Stelle des S -Integral längs der Enveloppe gemäß Anmerkung * S. 181 das Integral $m \int v \cos \xi ds$ auf der z -Achse vom Nullpunkt bis zum Schnittpunkt $z = B^2/2A$ der B -Hyperbel. Wegen $v \cos \xi = v \cos \tau = v$ gibt das $m v_0 B^2/2A$, wie beim S -Integral längs der Enveloppe. Großer Abstand von der Brennpunkt bedeutet Orte, wo $\beta - \beta_0 \ll \beta_0$ für die ursprünglichen, $\beta \ll \beta_0$ für die gestreuten Teilchen, d.h. wieder außerhalb der Parabel $r = 2A / \sin^2 \frac{\theta}{2}$. Es gelten also wieder die Gleichung (1) (mit $-A$ statt A außerhalb des \log) und (2).

Mit welcher Annäherung (1) und (2) außerhalb der Kaustik gültig sind, kann nur die Wellentheorie lehren, der wir uns nunmehr zuwenden wollen.



§ 2. Wellenoptik. Das von Born (l.c.) angegebene Approximationsverfahren zur Lösung der Wellengleichung sieht die einfallende Welle als Hauptvorgang, ihre Modifikation durch den Brechungsindex als ~~keine~~ Störung an. Dazu ist man + E. Rutherford, Phil Mag. 21 669, 1911

bei großer Anfangsgeschwindigkeit der Teilchen und Abfall der Potentiellen Energie mindestens wie $1/r^2$ berechnigt. Durch die erste Beschränkung können einem Quanteneffekt entgehen, die sich erst bei kleinen Geschwindigkeiten einstellen (Ramsauer-Effekt), die zweite schließt das Coulombfeld aus. Wenzel und Oppenheimer* haben durch einen Kunstbegriff auch den Coulombfall dem Bornschen Verfahren zugänglich gemacht und (2) abgeleitet. Es bleibt daher noch zu untersuchen, ob nicht bei kleinen Geschwindigkeiten die Wellenmechanik zu Abweichung führt.

Zu diesem Zwecke muß man nicht nur eine approximative, sondern eine strenge Lösung haben. Es liegt nahe, es mit den wohl bekannten Methoden der Optik für die Beugung an kugelförmigen Hindernissen zu versuchen (Mie, Debye). Sie beruhen auf dem Verfahren der Partikularlösungen**. Hat man eine Kugel in einem Medium von konstantem Brechungsindex, so braucht man als Partikularlösungen Kugelwellen. Man zerlegt die einfallende ebene Welle in die Kugelwellen des Außenraumes und die gestreute Welle bzw. die Welle im Innern in die vom Zentrum fortschreitenden Kugelwellen des Außenraumes und bzw. die stehenden Kugelwellen des Innern mit zu bestimmenden Amplituden. Vermöge der Grenzbedingungen an der Oberfläche hat man das Innere an das Äußere anschließen und so die Amplituden zu bestimmen.

Um in unserem Falle eines kontinuierlichen Brechungsindex (der auch nur wie $1/r$ sich dem konstanten Außenwert nähert) dieses Verfahren anwenden zu können, schaffen wir uns einen Außenraum von konstantem Brechungsindex durch eine gleichförmig geladene Kugel um E von entgegen-gesetzt gleicher Ladung wie E . Diese Kugel übt nach innen keine Wirkung aus und schirmt nach außen das Feld von E vollständig ab. Von dem so modifizierten Problem gehen wir dann zu dem vorliegenden über, indem wir den Radius R der Kugel unendlich groß machen***.

* Wenzel, Zs. 40 590, 1926; Oppenheimer, Zs. 43 413, 1927

** Riemann-Weber, Bd. II, S. 487. (Sommerfeld)

*** Masing, Zs. 45 663, 1927; Wenzel, a.a.O.

Die stehenden Kugelwellen des Innern sind die von Schrödinger angegebenen Lösungen des kontinuierlichen Spektrums zweier sich nach dem Coulombschen Gesetz beeinflussender Teilchen, die für den Fall der Abstopfung bei Axialsymmetrie lauten:

$$\chi_l(r, a) = N_l (2kr)^l e^{ikr} F\left(\frac{i}{ka} + l + 1, 2l + 2, -2ikr\right)$$

$$(3) \quad a = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 m e E}, \quad N_l = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k e^{-\frac{\pi}{2ka}} \frac{|\Gamma(\frac{i}{ka} + l + 1)|}{(2l + 1)!}$$

mit der Bezeichnung

$$F(\alpha, \beta, x) = 1 + \frac{\alpha}{1! \beta} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2! \beta(\beta+1)} x^2 + \dots$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{\nu} \frac{(-x)^\nu}{\beta(\beta+1) \dots (\beta+\nu-1)} \quad (4)$$

$P_l(\cos \vartheta)$ ist die gewöhnliche (unnormierte) Kugelfunktion ($l=0, 1, 2, \dots$) wobei während χ in der k -Skala (k hat die i. S. 1 eingeführte Bedeutung) mit der Dichtefunktion r^2 auf 1 normiert ist; d. h. $\int_0^\infty r^2 dr \int_{k_1}^{k_2} \chi(k) \chi(k') dk' = 1$, wenn k im Intervall k_1, k_2 .

In der Funktion F kann man vermöge des zweiten Eulerschen Integrals $\frac{1}{\beta(\beta+1) \dots (\beta+\nu-1)} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\nu)} = \frac{\Gamma(\beta)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{0+} e^t t^{-\beta-\nu} dt$ mit $\arg t = -\pi$

sehen (unten am Umlaufintegral wird Ausgangspunkt = Endpunkt und das Ausgangsargument*, oben die zu umkreisenden Punkte, mit Umlaufsinnsinn angegeben) und, wenn auf dem Integrationswege $(t > |x|)$, die so entstehende Binomialreihe summieren:

$$F(\alpha, \beta, x) = \frac{\Gamma(\beta)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{0+} e^t t^{\alpha-\beta} (t-x)^{-\alpha} dt \quad (4')$$

$\arg t = \arg(t-x) = -\pi$

* wobei die Auslauf- und Einlaufichtung so zu nehmen sind, daß das Integral konvergiert.

Von dieser Integraldarstellung aus gewinnt man leicht die asymptotische Entwicklung von F , indem man das Integral in zwei geschlossene, um $t=0$ und $t=x$, zerlegt. Schreibt man im letzteren Integral $t+x$ statt t , so erhält man zunächst, wenn man $|\arg(-x)| < \pi$, $|\arg x| < \pi$ festsetzt:

$$F = \frac{\Gamma(\rho)}{2\pi i} \left\{ (-x)^{-\alpha} \int_{-\infty; \arg t = -\pi}^{0+} e^t t^{\alpha-\rho} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{-\rho} dt \right. \\ \left. + e^x x^{\alpha-\rho} \int_{-\infty; \arg t = -\pi}^{0+} e^t t^{-\alpha} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^{\alpha-\rho} dt \right\} = \frac{1}{2} (F^{(1)} + F^{(2)}) \quad (4')$$

wo $(1 \mp \frac{t}{x}) \rightarrow 1$ für $t \rightarrow 0$ auf einem Wege im Innern des ungeschlossenen Bereichs. Entwicklung von $1 \mp \frac{t}{x}$ nach dem binomischen Satz und Anwendung des Eulerschen Integrals auf die einzelnen Glieder gibt unmittelbar

$$F(\alpha, \rho, x) = \Gamma(\rho) \left\{ \frac{(-x)^{-\alpha}}{\Gamma(\rho-\alpha)} G(\alpha, \alpha-\rho+1, -\frac{1}{x}) \right. \\ \left. + \frac{e^x x^{\alpha-\rho}}{\Gamma(\alpha)} G(1-\alpha, \rho-\alpha, \frac{1}{x}) \right\}, \quad (|\arg(-x)| < \pi, |\arg x| < \pi)^*$$

mit $G(\alpha, \rho, x) = 1 + \frac{\alpha/\rho}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\rho(\rho+1)}{2!} x^2 + \dots \quad (5')$

(Semi)konvergente oder, wenn α oder $\rho = 0, -1, -2, \dots$, abbrechende Reihe).

Die mit $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ gebildeten Funktionen $\chi^{(1)}$ und $\chi^{(2)}$ sind, wie man aus der asymptotischen Entwicklung (5') erkennt, nach außen bzw. innen fortschreitende [der Zeitfaktor in der Form $e^{-i\omega t}$ ($\omega = \text{Frequenz}$) angenommen] Kugelwellen, die sich zu der stehenden $\chi = \frac{1}{2} (\chi_1 + \chi_2)$ zusammensehen.

Im Außenraum ist $a = \infty$ zu setzen (nach (3), da außen keine Ladung E wirkt). Die stehende Welle ist daher nach (3) und (5')

$$\chi_l(r, \infty) = \sqrt{\frac{k}{V}} J_{l+1/2}(kr),$$

die nach außen fortschreitende $\chi_l^{(1)}(r, \infty) = \sqrt{\frac{k}{V}} H_{l+1/2}^{(1)}(kr),$

* Die Entwicklung (5') gilt auch der reellen Reihe, weil für $x < 0$ (d.h. $\arg x = \pm \pi$) das zweite gegen das erste Glied verschwindet, während für $x > 0$ (d.h. $\arg(-x) = \pm \pi$) umgekehrt das erste gegen das zweite verschwindet.

wo J bzw. $H^{(1)}$ Bessel- bzw. erste Hankelfunktion bedeuten. In diesem Falle bricht G ab**

Gemäß unserem Programm setzen wir für das Innere

$$\psi(r, \vartheta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) c_l \chi_l(r, a) P_l(\cos \vartheta),$$

und für das Äußere die bekannte Zerlegung der ebenen Welle

$$e^{ikr \cos \vartheta} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \chi_l(r, \infty) P_l(\cos \vartheta) \quad (6)$$

und die Strennwelle

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) c_l \chi_l^{(1)}(r, \infty) P_l(\cos \vartheta).$$

Die beiden Grenzbedingungen zur Bestimmung von c und C lauten: Stetigkeit von ψ und deren normaler Ableitung (wegen des Erhaltungssatzes). Da wir zum unendlichen Kugelradius übergehen wollen, können wir für die χ an der Kugeloberfläche ihre asymptotischen Werte aus (3) und (5) einsehen:

$$\chi_l^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{r} e^{\pm i(kr - \frac{l+1}{2}\pi - \frac{1}{ka} \log 2kr + o(l/a))}$$

wo $\sigma(l, a) = \arg \Gamma(\frac{i}{ka} + l + 1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\frac{1}{ka} \frac{1}{l+\nu} - \arctg \frac{1}{ka(l+\nu)})^*$

Man findet sofort für $C = e^{i(\sigma(l, a) - \frac{1}{ka} \log 2kR)}$ unter Fortlassung der belanglos Phasenkonstante $-\frac{1}{ka} \log 2kR$

$$\psi(r, \vartheta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) e^{i\sigma(l, a)} \chi_l(r, a) P_l(\cos \vartheta) \quad (7)$$

Dies ist die gesuchte Lösung.

Wir können die Reihe mittels (6) summieren, indem wir die stehende Kugelwelle $\chi_l(r, a)$ des Coulombfeldes durch die des freien Raumes $\chi_l(r, \infty)$ ausdrücken. Wendet man nämlich auf das allgemeine Reihenglied von $F(\frac{i}{ka} + l + 1, 2l + 2, -2ikr)$

$$\Gamma(\frac{i}{ka} + l + \nu + 1) (-2ikr)^\nu$$

$$\Gamma(\frac{i}{ka} + l + 1) \nu! (2l+2) \dots (2l+\nu+1)$$

** Vgl. J. E. Ahlfors - Ende. 598 und 100. $G(\frac{1}{2} + p, \frac{1}{2} - p, -\frac{1}{x}) = S_p(x)$

* Nielsen. Handbuch der Γ -fkt.

das erste Eulersche Integral (Betafunktion)

$$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{e^{-\pi i \alpha}}{2\pi i} \int_{0^+}^{0^+} s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1} ds \quad \Re \beta > 0$$

(wo $\arg 1-s \rightarrow 1$ für $s \rightarrow 0$ auf einem Wege im Innern des umschlossenen Bereichs)* mit $\alpha = \frac{i}{ka}$, $\beta = \frac{i}{ka} + l + \nu + 1$ an, so entsteht eine F-Reihe:

$$F\left(\frac{i}{ka} + l + 1, 2l + 2, -2ikr\right) = \frac{e^{-\frac{\pi}{ka}} \Gamma\left(1 + \frac{i}{ka}\right) \Gamma(l+1)}{2\pi i \Gamma\left(\frac{i}{ka} + l + 1\right)} \int_0^1 F(l+1, 2l+2, -2ikr(1-s)) \times s^{-\frac{i}{ka}-1} (1-s)^{\frac{i}{ka}+l} ds$$

woraus nach (3) und der Definition von σ

$$\chi_e(r, a) = \frac{1}{2\pi i} \Gamma\left(1 + \frac{i}{ka}\right) e^{-\frac{\pi}{ka}} e^{-i\sigma(r, a)} \int_0^1 e^{ikrs} \chi_e(r(1-s), a) s^{-\frac{i}{ka}-1} \times (1-s)^{\frac{i}{ka}+l} ds$$

weil wir wegen der ganzzahligen Summe der Exponenten von s und $(1-s)$ das Integral um die Punkte 0 und 1 (= \oint) erstrecken dürfen ($\arg s = \pi$, $\arg 1-s = 0$ als Anfangsargumente auf der negativen reellen Achse). Damit wird also aus (7) wegen (6)

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} e^{-\frac{\pi}{ka}} \Gamma\left(1 + \frac{i}{ka}\right) e^{ikr \cos \theta} \int_0^1 e^{2ikr \sin^2 \frac{\theta}{2} s} s^{-\frac{i}{ka}-1} \times (1-s)^{\frac{i}{ka}+l} ds$$

Verschieben wir endlich den Integrationsweg ins positiv-imaginäre Unendliche, sodass $\oint = \int_{0^+, 1^+}^{\infty, \infty}$ mit $\arg s = \frac{\pi}{2}$, $\arg(1-s) = -\frac{\pi}{2}$, und führen

die Integrationsvariable t durch $2ikr \sin^2 \frac{\theta}{2} s = xs = t e^{2\pi i}$ und $1-s = \frac{e^{\pi i}}{x}(t-x)$ mit $\arg x = \frac{\pi}{2}$ ein, dann ist

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} e^{-\frac{\pi}{ka}} \Gamma\left(1 + \frac{i}{ka}\right) e^{ikr \cos \theta} \int_{0^+, 1^+}^{\infty, \infty} e^{t} t^{-\frac{i}{ka}-1} (t-x)^{\frac{i}{ka}+l} dt$$

$-\infty, \arg t = \arg t - \pi$

* Wenn $\Re \beta < 0$, so ist das Doppelschleifenintegral um 0 und 1 durch $\Re \beta$ auszudrücken.

das h. nach der Integraldarstellung (4)

$$(7') \quad \psi(r, \theta) = e^{-\frac{\pi}{ka}} \Gamma\left(1 + \frac{i}{ka}\right) e^{ikr \cos \theta} F\left(-\frac{i}{ka}, 1, 2ikr \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

Damit haben wir die Lösung durch die F-Funktionen dargestellt. Die asymptotische Entwicklung (5) gibt unmittelbar*

$$\psi(r, \theta) = e^{i(kr \cos \theta + \frac{i}{ka} \log 2kr \sin^2 \frac{\theta}{2})} \left(1 - \frac{i}{2k^3 a^3 r \sin^2 \frac{\theta}{2}}\right) + \frac{e^{i(kr - \frac{i}{ka} \log 2kr \sin^2 \frac{\theta}{2} + \pi + 2\sigma(0, a))}}{2k^2 a r \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (8)$$

Beachtet man $k^2 a = 1/\lambda$, so erkennt man, daß das wellenoptische (8), von Phasenkonstanten abgesehen, mit dem strahlenoptischen (1) übereinstimmt. Die Wellentheorie führt daher ebenfalls (unter der naturgemäßen Einschränkung: für Punkte außerhalb der Kaustik) zur Rutherford'schen Formel (2).

Dieses Resultat kann man wohl in Parallele setzen mit der Tatsache, daß auch für das diskrete Spektrum des Coulombfeldes die Strahlenoptik (ältere Auffassung der Quantentheorie) genau (nicht nur für große Quantenzahlen) dieselben Fermiwerte wie die Wellentheorie ergibt.

Ein zweiter systematischer Weg, (7') abzuleiten, ist die Debye'sche** Methode, geometrische-optische Strahlenbündel wellentheoretisch darzustellen.

Am schnellsten gelangt man zu (7'), wenn man davon Gebrauch macht, daß die Schwingungsgleichung des Coulombfeldes in parabolischen Koordinaten

$$\lambda_1 = r + z, \quad \lambda_2 = r - z$$

bei Axialsymmetrie

* Unter Beachtung von $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{i}{ka}\right)} = -\frac{i}{ka \Gamma\left(1 - \frac{i}{ka}\right)}$ vermöge

$$\Gamma(t+z) = z \Gamma(z)$$

** Debye, Ann. d. Phys. 30 155 1909; Johannes Picht, ebenda 77, 689, 1925

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1}) + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} (\lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_2}) + (\frac{k^2}{4} (\lambda_1 + \lambda_2) - \frac{1}{a}) \psi = 0,$$

in $\psi = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2$ mit

$$\Lambda_1 = e^{\frac{ik\lambda_1}{2}} F(\alpha, 1, -ik\lambda_1) \quad \Lambda_2 = e^{-\frac{ik\lambda_2}{2}} F(\alpha - \frac{i}{ak}, 1, +ik\lambda_2)$$

separierbar ist (α eine willkürliche Konstante), die allgemeine Lösung (bei gegebener Energie) erhält man durch Multiplikation mit einer willkürlichen Funktion von α und Integration über α .

Man weist leicht mittels (5) nach, dass ψ im Unendlichen nur für $\alpha = 0$ die verlangte Form (ebene Welle in $+z$ -Richtung und auslaufende Kugelwelle) hat.

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial \lambda_1^2} + (\frac{k^2}{4} \lambda_1 - \frac{1}{a} + \beta) \Lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 \frac{\partial^2 \Lambda_2}{\partial \lambda_2^2} + \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \lambda_2} + (\frac{k^2}{4} \lambda_2 - \frac{1}{a} - \beta) \Lambda_2 = 0$$

$$\psi = \int c(\alpha) e^{\frac{ik\lambda_1 - \lambda_2}{2}} F(\alpha, 1, -ik\lambda_1) F(\alpha - \frac{i}{ak}, 1, +ik\lambda_2) d\alpha$$

asymptotic

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = e^{ikz} \Gamma(\alpha) \left\{ \frac{(ik\lambda_1)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{e^{-ik\lambda_1} (ik\lambda_1)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right\} \times \left\{ \frac{(-ik\lambda_2)^{-\alpha + \frac{i}{ak}}}{\Gamma(1 - \frac{i}{ak} + \alpha)} + \frac{e^{+ik\lambda_2} (ik\lambda_2)^{\alpha - \frac{i}{ak} - 1}}{\Gamma(\alpha - \frac{i}{ak})} \right\}$$

$$\alpha - 1 \leq \alpha < 0 \quad \alpha \geq 0$$

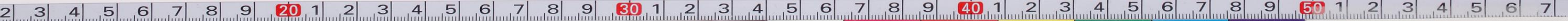
$$\alpha = 0 \quad 0 \leq \alpha < 1$$

$\alpha = 0$

$$\Lambda_1(\omega) \Lambda_2(\omega) = e^{ikz} \frac{F(0, 1, -ik(r+2)) F(\alpha - \frac{i}{ak}, 1, ik(r-z))}{\Gamma(\frac{i}{ak})} = e^{ikz} F_1 F_2$$

$$I_V = (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial r}) \dots =$$

* H. Faxén und — 45 307, 1927.



Oppenheimer.
On the quantum theory of the problem of the two bodies
Camb. Phil. Soc. 1926, 23, 422.

Two Bodies: (1) ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ Hydrogen Spectrum, Intensity
photoelectric effect, ⑪ ⑫ ⑬, conti. absorption spectrum in the
ultraviolet and in the X-ray regions, ⑭ transition probability,
deflection, capture of electron & ion collision = ⑮ ⑯ ⑰ ⑱.
⑲ ⑳ simplest line intensities = ⑳ ㉑ ㉒ ㉓.

I elliptic orbit. $E < 0$.

amplitude \dots (inter side) $I(nk, n'k') = \sum_{l=1}^3 \frac{2^4 \pi^4 e^2}{3c^3} [EV^4(n, n')] |x_{nk, n'k'}|^2$

$x_{nk, n'k'} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m, m'} x_{nk, n'k'}(l, m, m')$
 $x_{nk, n'k'}(l, m, m') = \int \int \int_0^{2\pi} u(nk, m) u(n'k', m') x_{nk, n'k'}(r, \theta, \phi) p^*(r, \theta, \phi) d\phi d\theta dr$ (6)

$u(nk, m) = u_{nk, m}(r, \theta, \phi)$
 $= A \frac{\cos m\phi}{\sin m\phi} P_{\bar{k}}^m(\cos\theta) \alpha^{\bar{k}} e^{-\alpha r} \sum_{j=0}^{n-\bar{k}} \frac{(2\alpha)^j}{j!} \binom{n+\bar{k}}{n-\bar{k}-j}$ (17)

$\bar{k} = k - \frac{1}{2}$
 $\alpha = (4\pi^2 m e^2 / \hbar^2) r$

$n = 1, 2, 3, \dots$
 $\bar{k} = 0, 1, 2, \dots, n-1$
 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \bar{k}$

Selection rules $m - m' = 0, \pm 1$
 $k - k' = \pm 1$ (9)

$m, m' = 0$ (average) \dots component intensities \dots
 $I(nk, n'k') = \frac{2^4 \pi^4 m^3 e^4}{3c^3 \hbar^2 k} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)^4 \frac{(k+k')^2 A^2(nk, n'k')}{A^2(nk) A^2(n'k')}$

$A^2(nk) = \sum_{\gamma_1=0}^{n-\bar{k}-1} \sum_{\gamma_2=0}^{n-\bar{k}-1} \frac{n^3 (-1)^{\gamma_1+\gamma_2} (2k+\gamma_1+\gamma_2+1) [(n+\bar{k})!]^2}{\gamma_1! \gamma_2! (2k+\gamma_1)! (2k+\gamma_2)! 2^{2k} (n-\bar{k}-1-\gamma_1)!}$

$A(nk, n'k') = \sum_{\gamma_1=0}^{n-\bar{k}-1} \sum_{\gamma_2=0}^{n'-\bar{k}-1} \frac{\alpha (n-\bar{k}-1-\gamma_2)!}{(n+\gamma_1)_{\bar{k}+\gamma_1} (n'+\gamma_2)_{\bar{k}'+\gamma_2} (-2)^{\gamma_1+\gamma_2} (n+\bar{k})! (n'+\bar{k}')!}{(n+n')_{k+k'+\gamma_1+\gamma_2+3} \gamma_1! \gamma_2! (2k+\gamma_1)! (2k'+\gamma_2)!}$

$\rho = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin\theta$
 $(n-\bar{k}-1-\gamma_1)!$
 $(n'-\bar{k}'-1-\gamma_2)!$

$k, k' \Rightarrow$ series, intensity \dots
Energy per atom per sec.

Lyman lines: 0.00667, 0.000644
Balmer lines: 0.00789, 0.00199
directly = observe in ratio n 2nd Lyman + 1st Balmer
 $\frac{I(3,2)}{I(3,1)} = 12.2$

Absorption lines (n, n') emission lines = hc
 $\frac{n'^2}{n^2} \frac{c^3 h^8}{2\pi^4 \epsilon^2 \mu^3} \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right)^{-3}$

observable ratio = \dots
 $\frac{I_{abs}(1,2)}{I_{abs}(1,3)} = 7.72; \frac{I_{abs}(2,3)}{I_{abs}(2,4)} = 5.37$

II Hyperbolic Orbit

Fourier Coeff \dots
coordinates = Hyperbolic Orbit \dots
hyperbolic orbit \dots transition = components \dots
acceleration \dots

Photoelectric transition = intensity \dots
 $V(n, E) = \frac{R}{n} + \frac{E}{h}$ (18)

(4) solution, factor ϕ, θ, ϕ depends \dots
 k, m value \dots Schrödinger. Cond \dots
 $\bar{k} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$
 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \bar{k}$

$(m, \bar{k}), R, \dots$
 m, k all values \dots
 $f_{\pm} = f(E, k) = \dots$ configuration space \dots

Let E , set of values = $\#$ Sch. condition $\exists \delta \in \mathbb{R}$
 $\epsilon(2)$.

$$u(E, k, m) = A_1 \frac{\cos m\phi}{\sin m\phi} P_k^{(m)}(\cos\phi) f(E, k) \quad (16)$$

where $f(E, k) = f_{E, k}(\gamma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}(E, k) \gamma^{\nu+k} \quad (17)$

c_{ν} double circuit integral \Rightarrow P.S. S. S. \Rightarrow

$$2c_{\nu}(E, k) = \left[\int_{\gamma-\delta}^{\delta-\gamma} (z-\gamma)^{\alpha_1-1} (z-\gamma)^{\alpha_2-1} dz \right]^{\nu} \quad (18)$$
$$\times B(\alpha_1, \alpha_2) \int_{\delta-\gamma}^{\delta+\gamma} \frac{z^{\nu}}{\nu!} (z+\gamma)^{\alpha_1-1} (z-\gamma)^{\alpha_2-1} dz$$

where $\alpha_1 = k+1 - i n^*$; $\alpha_2 = k+1 + i n^*$ } (19)
 $n^* = (2\pi^2 \mu E^4 / \hbar^2 E)^{1/2}$; $\gamma = \frac{2\pi i}{\hbar} (2\mu E)^{1/2}$

recurrence formula \Rightarrow ν

$$(\nu+2k\nu)c_{\nu} + 8\pi^2 m \hbar^{-2} (E^{-1} c_{\nu+1} + E c_{\nu-2}) = 0 \quad (20)$$
$$c_0 = \frac{1}{2} B(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$c_{\nu}(E, k) = S_{\nu}(E) \left\{ \prod_{\tau=1}^{\nu} (\tau^2 + k\tau) \right\}^{-1} \quad (21)$$

S_{ν} is $E \Rightarrow \tau$ $\left[\frac{\nu}{2} \right]$ degree $+$

\Rightarrow series is absolutely convergent $\Rightarrow \exists \epsilon \in \mathbb{R}$ real $+$

f asymptotically for large $(2\gamma r)$

$$f(E, k) \sim \gamma^k (-2\gamma r)^{-\alpha_1} e^{\gamma r} \Gamma(\alpha_1) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1+s)}{\Gamma(s)\Gamma(\alpha_1-s)} (-2\gamma r)^s$$
$$- \gamma^k (2\gamma r)^{-\alpha_2} e^{-\gamma r} \Gamma(\alpha_2) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_2+s)}{\Gamma(s)\Gamma(\alpha_2-s)} (2\gamma r)^s$$

($E=0$, $\mu=1/2$, $\hbar=1$)

Periodic, $\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} u^2 p dp d\phi d\nu = 1$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} u^2 p dp d\phi d\nu = 1$$