DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE Nov. 24, 1934

NO. 1

Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Positrons
Von W. Heisenberg (ZS. f. Phys. 90, 209, 1934)

I. Anschauliche Theorie der Materiewellen

Beschränkt man sich auf eine korrespondenzmässig-anschauliche Theorie des Materiefeldes, so kann die bekannte Schwierigkeit des Auftretens negativer Energieniveaus in der Diracschen Theorie dadurch vermieden werden, dass man die homogene ~~Gleichung~~ Diracsche Differentialgleichung

$$\mathcal{H} R = \left[i\hbar \frac{\partial}{c\partial t'} + \frac{e}{c} A_0(x') + \alpha_s \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_s'} - \frac{e}{c} A_s(x') \right) + \beta mc \right] R = 0 \quad , \qquad (3)$$

wo $(x't'k'|R|x''t''k'') = \sum_n \psi_n^*(x't'k')\,\psi_n(x''t''k'')$, (1)

durch eine inhomogene Gleichung

$$\mathcal{H} r = -\mathcal{H} S \quad , \qquad (11)$$

wobei

$$r = R_s - S$$

$$R_s = R - \tfrac{1}{2} R_F$$

$$S = e^{-\frac{ei}{\hbar c}\int_{P'}^{P''} A^\lambda dx_\lambda} \cdot S_0 + \frac{a}{x_\lambda x^\lambda} + b \log \left| \frac{x_\lambda x^\lambda}{C} \right|$$

und die Inhomogenität für die Paarerzeugung massgebend ist. Für das dieser Gleichung genügende Materiefeld gelten zusammen mit ~~die~~ dem Maxwellschen Feld die üblichen Erhaltungssätze, gleichzeitig sind die Energieen des Materie-

feldes und die des Strahlungsfeldes einzeln stets positiv.
Die Invarianz der Theorie gegenüber einer Vorzeichenänderung der Elementarladung kann man am einfachsten in folgender Weise erkennen: Man ersetze in den Gl (11) und

$$
(16)\left\{
\begin{aligned}
&S_\lambda(\xi) = e \sum_{k'k''} \alpha^{\lambda}_{k'k''} (\xi k' | r | \xi k'') ;\\
&\sqcup^{\mu}_{\nu}(\xi) = \lim_{x \to 0} \left\{ i c \hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{e}{2} \left[A^\mu\left(\xi + \frac{x}{2}\right) + A^\mu\left(\xi - \frac{x}{2}\right) \right] \right\} \\
&\qquad \times \sum_{k'k''} \alpha^{\nu}_{k'k''} \left(\xi + \frac{x}{2}, k' \middle| r \middle| \xi - \frac{x}{2}, k''\right)
\end{aligned}
\right.
$$

$+e$ durch $-e$ und ausserdem $(x'k'|r|x''k'')$ durch $-(x''k''|\bar{r}|x'k')$. Für die Matrix $\bar{r}$ gelten dann wieder die ursprünglichen Gl. (11) und (16).

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE.................
NO.................

Dirac の理論によれば Hartree の approximation に於て、各 electron は共通の field の中で動くとする。それらの electrons に関する全ての量、即ち Ladungsdichte, Stromdichte, Energiedichte は Dichtematrix

$$(x't'k'|R|x''t''k'') = \sum_n \psi_n^*(x't'k')\psi_n(x''t''k'') \quad (1)$$

から derive される。 electrons が Pauli の principle を満足すること は

$$R^2 = R \qquad \text{for } t' = t'' \qquad (2)$$

で表はされる。但し ψ_n は normalized とする。

R は

$$\mathcal{H} R = \left[i\hbar \frac{\partial}{c\partial t'} + \frac{e}{c} A_0(x') + \alpha_s \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x'_s} - \frac{e}{c} A_s(x') \right) + \rho\, mc \right] R = 0 \qquad (3)$$

を満足せねばならぬ。

$\pm e$ に関して symmetric にする為めに

$$R_s = R - \frac{1}{2} R_F \qquad (6)$$

をとる。すると R_s の $x'\cdot\cdot$ と $x''\cdot\cdot$ とを交換して、R_s の 符號を変へると $-e$ を $+e$ にかへたことになる。

R_s の singularity は Lichtkegel 上にあり、

$$(x'k'|R_s|x''k'') = u \frac{\alpha^\rho x_\rho}{(x^\lambda x_\lambda)^2} - \frac{v}{x^\lambda x_\lambda} + w \log|x^\lambda x_\lambda|$$

$$u = -\frac{i}{2\pi^2} e^{-\frac{ei}{c\hbar}\int_{P'}^{P''} A^\lambda dx_\lambda}$$

w は diff. eqns. の eigendeutig に定まるが

v は $x^\lambda x_\lambda$ の 或る additive term を除いて eindeutig.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE.................

NO.................

これから出した [illegible] Ladungsdichte

$$\rho(x) = e\sum_k (xk|R|xk) \qquad (9)$$

は singularity をもっておる。即ち external field がなくても、negative energy state が満されておるなら、~~D~~ichte は 0 でないことになる。これは不都合で、normal distribution からの abweichung 丈が observe される筈。

そこで

$$r = R_S - S \qquad (10)$$

をかわりにとる。S は A^λ (potential) によって eindeutig にきまる ~~函数~~ $x'_\lambda k'$, $x''_\lambda k''$ の函数。

すると、(3)のかわりに

$$Hr = HS \qquad (11)$$

これは materialization の可能性をあらわす

äussere Feld がなければ ~~Sは~~ r は 0 とする。故に field のない時の S は negative Energy state が全て besetzen されている時の R_S をとる。

Dirac は S として R_S の singular~~ity~~ なる部分 丈をとった。これは field frei なる時に negative energy state が全部つまった状態にならず lichtkegel 上で regular な matrix 丈となる。

このSをきめるのに、Heisenberg は Ladung と Energie の Erhaltungssatz を満たす様にとった。而して、$A^\lambda=0$ の時には Dirac ((20)‥(22)) と一致する様にとる。これを S_0 とする。

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO.

近似的に $S = e^{-\frac{ei}{\hbar c}\int_{P'}^{P''} A^{\lambda} dx_{\lambda}} S_0 + S_1$

$$S_1 = \frac{a}{x_\lambda x^\lambda} + b \log\left(\frac{x_\lambda x^\lambda}{c}\right)$$

なる形となり、a, b を適当にきめると Erhaltungssatz が満足される.

Anwendung として、adiabatic に scalar Potential A_0 を apply した時に induce される charge density を求めて.

$$\rho = -\frac{1}{15\pi}\frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \Delta \rho_0$$

Zeitlich に変わる時には

$$\rho = -\frac{1}{15\pi}\frac{e^2}{\hbar c}\frac{f^2}{(m c)^2}\rho_0 .$$

(vgl. Feld $B^0(x') e^{\frac{i}{\hbar} f x_0'}$ . . .

故に high frequency field に対しては effective charge が減少する. 之は Kl.-Nishina の formula に影響を与えるが Compton-Wellenlänge に対して Promille である.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........................

NO..........................

II. Quantentheorie der Wellenfelder.

$$R = \psi^*(x'k')\,\psi(x''k'')$$

$$\psi^*(x'k')\,\psi(x''k'') + \psi(x''k'')\,\psi^*(x'k') = \delta(x'x'')\,\delta_{k'k''}.$$

R の Erwartungswert が Dirac の dichtematrix になる.

$$R_s = \tfrac{1}{2}\left[\psi^*(x'k')\,\psi(x''k'') - \psi(x''k'')\,\psi^*(x'k')\right]$$

$$H\,R_s = 0 \qquad R_s = r + S$$

$$H\,r = -HS$$