DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..................

NO....................

Dirac: Discussion of the Infinite distribution of electrons in the theory of the positron.

(Proc. Camb. Phil. Soc. Vol 30, 150, 1934)

Diracの理論によれば electron は positive kinetic energy の state の外に negative kinetic energy の state をとり得る。negative kinetic energy state が殆んど全部 occupy されて居り、そこに一つの穴が残つて居れば ~~その穴は~~ positive kin. ~~energy を持ち~~, charge が positive である positively charged particle が positive kin. energy state にあるのと同様の結果がおこる。之を positron と考へると electron, positron からなる system といふのは、negative energy state に $-mc^2$ から $-\infty$ の間に conti. に無限に多くの electron が存在する (unit volume につき無限) 場合になつてゐる。

この場合起る難点はかゝる infinite な electron の distribution から生ずる electromagnetic field が無限大になることである。

この難点を除くには、何等かの方法で無限大の部分をのけてしまつて、electrons の distribution に finite change がおこつたために生ずる field の finite change 丈が electromag. field としてあらはれてくる様にする必要がある。

つまり Maxwell の eq.

$$\mathrm{div}\,E = 4\pi\rho$$

の ρ が無限大だから、~~その中~~ それから何かをのけてしまつて E が finite になる様にする必要がある。

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..................

NO..................

electromagnetic field がなく~~て~~い場合には問題は簡単だが、(かゝる場合には、pos. neg. state 等を relativ. に invariant な方法でわけることが出来ない。(Oppenheimer の此れをいった)

さてこの問題を exact に取扱ふのが困難なので、Dirac は Hartree の self-consistent field の ~~様な其の~~ 方法を apply しようといふ。つまり各 electron はそれぞれの wave function をもって居り、~~それぞ~~ の共通の electro-mag. field で動くと考へる。この field は一部は外部の原因により、一部は electron の ~~分~~ distribution 自身から起ってくるものである。

さて、かゝる仮定の下に、各 electron の任意の time における state を normalized fn. $\psi_{ak}(x)$ であらはすことにする。
a：色んな state を区別する。　$k = 1, 2, 3, 4$.
すると electron の distribution は density matrix

$$(x'|\rho|x'')_{k'k''} = \sum_a \psi_{ak'}(x')\,\bar{\psi}_{ak''}(x'')$$

で describe される。但し sum は A この electron についてとる。
(この diagonal element が anschaulich な electron density を与へてる) この matrix は勿論 Hermitian.
ρ の性格としては各　$\rho^2 = \rho$.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO.

$$\psi_{k'}(x't')\psi^{\dagger}_{k''}(x''t'')$$
$$+\psi^{\dagger}_{k''}(x''t'')\psi_{k'}(x't')$$
$$=\sum_{n,m}(a_n a_m^{\dagger} + a_m^{\dagger} a_n)\,\varphi_{k'n}(x't')\,\tilde{\varphi}_{k''m}(x''t'')$$
$$=\sum_n \varphi_{k'n}(x't')\,\tilde{\varphi}_{k''n}(x''t'')$$

之は Pauli の principle から出てくる.

又 eq. of motion は

$$i\hbar\frac{d\rho}{dt} = H\rho - \rho H.$$

但し $H = \alpha_s(p_s + eA_s) - eA_0 + \alpha_4 m$ 　　$c=1$.

上式の和は occupied state についての sum

$$\Sigma_a = \Sigma_{oc}$$ (~~分布密度~~に

である. それに対して. Σ_{un} を考へる.

然るに $\Sigma_{oc} + \Sigma_{un} = \delta(x'-x'')\,\delta_{k'k''}$

Transformation theory により

そこで $\rho = \frac{1}{2}(1+\rho_1)$

$$(x'|\rho_1|x'')_{k'k''} = \Sigma_{oc}\,\psi_{k'}(x')\,\bar{\psi}_{k''}(x'') - \Sigma_{un}\,\psi_{k'}(x')\,\bar{\psi}_{k''}(x'')$$

~~然~~この方が electron と positron に対する sym. がよい.

$$\rho_1^2 = (2\rho-1)^2 = 4\rho^2 - 4\rho + 1 = 1$$

ρ_1 と ρ とは eq. of motion を満足する.

之を Relativistic に uniformen すると. 異なる time に関する matrix element を考へ

ρ の代りに $(x't'|R|x''t'')_{k'k''} = \Sigma_a\,\psi_{ak'}(x't')\,\bar{\psi}_{ak''}(x''t'')$
$= \Sigma_{oc}\,\psi_{k'}(x't')\,\bar{\psi}_{k''}(x''t'')$

と~~せねばならぬ~~をとり. ρ_1 の代りに

$$(\ ''\ |R_1|\ ''\ )_{''} = \Sigma_{oc} - \Sigma_{un}$$

をとらねばならぬ. 然らば,

$$R = \frac{1}{2}(R_F + R_1)$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........
NO..........

$$(x't'|R_F|x''t'')_{k'k''} = \Sigma_{oc} + \Sigma_{un}$$

しかし、このR_Fは unit matrix ではないが、この理由では重要な意味をもってゐる:

このR, R_1, R_F も又 Hermitian で eq. of motion は

$$\mathcal{H}R = 0 \quad \mathcal{H}R_1 = 0 \quad \mathcal{H}R_F = 0.$$

但し、

$$\mathcal{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + H.$$

しかし、$\rho^2=\rho$, $\rho_1^2=1$ 等~~を R~~ に相当する式は満足されなければならぬ.

次に electron の distribution による field を決めるには charge density, current density を~~計算せねば~~定めねばならぬが、(又 charge density は) finite distr. の場合と同様に ρ の position に関して diagonal な element をとるか、又は R の positional, time 〃 〃 をとり、しかし、spin variable についての diagonal sum をとればよい。即ち

$$\Sigma_k (x|\rho|x)_{kk} \quad \text{or} \quad \Sigma_k (xt|R|xt)_{kk}$$

current density の方は

$$\Sigma_k (x|\alpha_s\rho|x)_{kk} \quad \text{or} \quad \Sigma_k (xt|\alpha_s R|xt)_{kk}.$$

で定義する.

$$\left(\sum_{k,k'} (\alpha_s)_{kk'} \psi_{k'} \tilde{\psi}_k \right.$$

とすれば continuity の式を満足する.

$$\left(\because\ i\hbar\frac{d}{dx}(x|\rho|x) = (x|H\rho - \rho H|x)\right.$$
$$= \alpha_s (x|p_s\rho - \rho p_s|x)$$

$$+(x|\{\alpha_s\rho-\rho\alpha_s\}\{p_s+eA_s\}|x)+(x|\alpha_4\rho-\rho\alpha_4)x)m$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\Sigma_k(x|\rho|x)_{kk}=\Sigma_{kk'}\alpha_{skk'}(x|p_s\rho-\rho p_s|x)_{k'k}$$

$$=-i\hbar\Sigma_{kk'}\alpha_{skk'}\frac{\partial}{\partial x_s}(x|\rho|x)_{k'k}.$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma_k(x|\rho|x)_{kk}=-\frac{\partial}{\partial x_s}\Sigma_k(x|\alpha_s\rho|x)_{kk})$$

我々の考へてゐる場合には之等の ch. dens. curr. dens. は悉く無限大。 故に、之等から適当な項を除いて finite にする様にせねばならぬ。~~つまり~~、之れには

$\Sigma_k(x't'|R|x''t'')_{k'k''}$ なる matrix の $x_s'=x_s''$, $t'=t''$ における singularity をしらべる必要がある。

2、之 field がなければ。

$$H=\alpha_{p_s}p_s+\alpha_4 m=(\alpha,p)+\alpha_4 m.$$

で ~~positive~~ negative energy state が皆 occ. とすれば。

fws. m. の時には

$$\{H+\sqrt{P^2+m^2}\}\psi=0.$$

P : p の大いさ

(∵ ~~$\{H^2-(P^2+m^2)\}\psi=0.$~~ $\psi=\Sigma e^{i(x p)/\hbar}$, $H^2\psi=\Sigma(P^2+m^2)e^{\cdots}$

で ~~總ての state が~~ neg. energy. state なら。

~~$\{H+\sqrt{P^2+m^2}\}\psi=0$~~

$$\{H+\sqrt{P^2+m^2}\}\rho=0$$

$$\psi=\sum_a\psi_a+\sum_b\psi_b$$

$(H-E_a)\psi_a=$

$$\left\{\begin{array}{l}\{(\alpha,p)+\alpha_4 m-E_a\}\psi_a=0\\ E_a\psi_a=+\sqrt{p^2+m^2}\,\psi_a\\ E_b=-\sqrt{\cdots}\end{array}\right.$$

$$\because (H+E_b)\sum_b\psi_b=0.$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........
NO..........

$$\therefore \{H+\sqrt{(p^2+m^2)}\}\rho=0$$

従って $\{H-\sqrt{(p^2+m^2)}\}(1-\rho)=0$

(∵ $1-\rho$ は pos. energy state selection を与へるから)

$$\therefore H+\sqrt{(p^2+m^2)}(2\rho-1)=0$$

$$\therefore \rho=\frac{1}{2}\left[1-\frac{H}{\sqrt{p^2+m^2}}\right]=\frac{1}{2}\left[1-\frac{(\alpha,p)+\alpha_4 m}{\sqrt{(p^2+m^2)}}\right]$$

$$(x'|\rho|x'')=\frac{1}{2h^3}\iiint e^{i(x',p')/\hbar}dp'\left[1-\frac{(\alpha,p')+\alpha_4 m}{\sqrt{(p'^2+m^2)}}\right]$$

$$\times\,\delta(p'-p'')\,dp''\,e^{-i(x'',p'')/\hbar}$$

$$dp=dp_1\,dp_2\,dp_3$$

同様にして $(x't'|R|x''t'')$ を求めると

$$(W-H)\psi_R=0 \quad \text{or} \quad \psi_R=\sum_a\psi_a e^{-iE_a t/\hbar}+\sum_b\psi_b e^{-iE_b t/\hbar}$$

$$(W-H)\psi_a e^{\cdots}=\{\sqrt{p^2+m^2}-H\}\psi_a e^{\cdots}$$

$$(W-H)\psi_b e^{\cdots}=\{-\sqrt{\quad}\mp H\}\psi_b e^{\cdots}$$

$$(W-H)\sum_b\psi_b e^{\cdots}=-\{\sqrt{p^2+m^2}+H\}\sum_b\psi_b e^{\cdots}$$

$$=0.$$

R:

$$(x't'|R|x''t'')=\frac{1}{2h^3}\iint e^{i(x',p')/\hbar}e^{it'\sqrt{p'^2+m^2}/\hbar}dp'$$

$$\left[1-\frac{(\alpha,p')+\alpha_4 m}{\sqrt{p'^2+m^2}}\right]\times\delta(p'-p'')\,dp''\,e^{-i(x'',p'')/\hbar}e^{-it''\sqrt{p''^2+m^2}/\hbar}$$

∵ $t'=t''$ では $(x'|\rho|x'')$ に等しく, 且. eq. of motion

$\mathcal{H}R=0$ を満足している.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..................
NO..................

∴ $\mathcal{H}$ を operate することは integrand に

$$-\{(\alpha, p') + \alpha_4 m + \sqrt{p'^2+m^2}\}$$

なる factor をかけることを意味し．之は $[1 - \cdots]$

$\{H + \sqrt{(p^2+m^2)}\}\rho = 0$ とかけあはすと ~~からして~~，0 になる． ∴ $t'=t''$ で ~~解となるならば~~ ρ になり，その t', t'' の任意の値に対し $\mathcal{H}\frac{\partial}{\partial t}\boxed{\cdots} = 0$ なる所の．を満足する ~~経って~~ 所で．かゝるものは unique にきまるから之が R の matrix である． ~~constant phase factor を除き~~

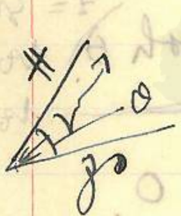
(之は直接ためしても言へる.)

そこで． $x_s' - x_s'' = x_s$　$t'-t''=t$,

とおくと．

$$(x't'|R|x''t'') = \frac{1}{2h^3}\int e^{i(x,p)/\hbar} e^{it\sqrt{(p^2+m^2)}/\hbar} \times \left[1 - \frac{(\alpha p)+\alpha_4 m}{\sqrt{}}\right] dp$$

$$= -\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar\alpha_s\frac{\partial}{\partial x_s} + \alpha_4 m\right] S(x,t).$$



$$S(x,t) = \frac{1}{2h^3}\int e^{i(x p)/\hbar} e^{it\sqrt{p^2+m^2}/\hbar}\frac{dp}{\sqrt{p^2+m^2}}.$$

$$= \frac{\pi}{h^3}\int_0^\infty p^2 dp \int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, e^{irp\cos\theta/\hbar} e^{it\sqrt{p^2+m^2}/\hbar} \Big/ \sqrt{p^2+m^2}$$

$$= \frac{-i}{2h^2 r}\int_0^\infty \left\{e^{i[rp+t\sqrt{(p^2+m^2)}]/\hbar} - e^{i[-rp+t\sqrt{(p^2+m^2)}]/\hbar}\right\} p\,dp \Big/ \sqrt{p^2+m^2}$$

$$= \frac{-i}{2h^2 r}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[rp+t\sqrt{(p^2+m^2)}]/\hbar}\, p\,dp \Big/ \sqrt{(p^2+m^2)}$$

$$= \frac{-i}{4h}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}U(r,t)$$

$$rP + t\sqrt{P^2+m^2} = \cancel{\kappa}\cosh\chi . \quad \kappa^2 =$$

$$\left(r + \frac{tP}{\sqrt{P^2+m^2}}\right)\frac{dP}{d\chi} = \kappa \sinh\chi \, d\chi . \qquad \frac{rP}{\sqrt{\ }} + t - \frac{m^2}{P^2+m^2}$$

$$\frac{P}{\sqrt{P^2+m^2}} + \cancel{\frac{\ }{\sqrt{P^2+m^2}}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i(r\sinh\chi + t\cosh\chi) m/\hbar\right] d\chi$$

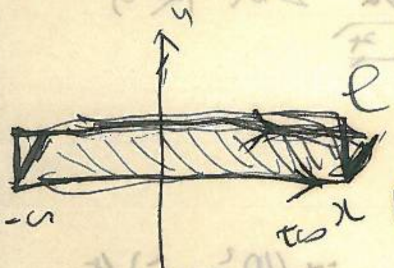
$t > r$: $\quad \dfrac{r}{\sqrt{t^2-r^2}} = \sinh\theta \qquad \dfrac{t}{\sqrt{t^2-r^2}} = \cosh\theta .$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{im}{\hbar}\sqrt{t^2-r^2}\cdot\cosh(\chi+\theta)\right\} d\chi .$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xi\sinh(\chi+\theta)} d\chi$$

$-r < t < r$: $\quad \dfrac{r}{i\sqrt{r^2-t^2}} = \sinh\theta \qquad \dfrac{t}{i\sqrt{r^2-t^2}} = \cosh\theta .$

$$\cancel{t>0}\ \frac{r}{\sqrt{r^2-t^2}} = \cosh\theta \qquad \frac{t}{\sqrt{r^2-t^2}} = \sinh\theta \quad (t>0)$$



$$e^{\theta} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{r+t}{r-t}} \qquad \frac{-t}{\sqrt{\ }} = \sinh\theta$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2}i \cancel{\ } + \log\sqrt{''} . \qquad \frac{\pi}{2}i$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp.\left\{im(r^2-t^2)^{\frac{1}{2}}/\hbar \cdot \cosh(\chi+\theta)\right\} d\chi$$

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

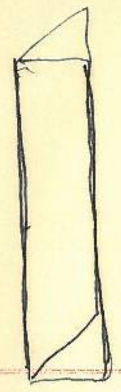
$t < -r$: $\quad \dfrac{r}{\sqrt{t^2-r^2}} = \sinh\theta \qquad \dfrac{-t}{\sqrt{t^2-r^2}} = \cosh\theta$

$z = \sinh\varphi$
$dz = \cosh\varphi \, d\varphi$
$dz = \sqrt{1+z^2}\, d\varphi$

$$\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} < 0 .$$

$$e^{\theta} = \sqrt{\frac{t-r}{t+r}} = \qquad \theta > 0$$

$$m\sqrt{r^2-t^2} \quad m\sqrt{t^2-r^2} . \qquad \frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}} = \cosh\theta$$



$\frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})(e^{y}-e^{-y})$ $\cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$

$+(e^{x}-e^{-x})(e^{y}+e^{-y})$ $\cosh$ ~~$+\sinh$~~

$= \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y})$ $\boxed{i\sqrt{r^2-t^2}}$ $\sinh \frac{r}{i\sqrt{r^2-t^2}} = \sinh$ $\sinh$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

complex $\frac{t}{i\sqrt{\ ''}}$ DATE $= \sinh$ ~~cosh~~

$\sinh x = \cosh$ NO.

$\cosh(\varphi \cancel{+} \chi \chi + \theta)$

(2) $$U(r,t) = -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[rp+t\sqrt{p^2+m^2}]/\hbar}\, dp/\sqrt{p^2+m^2}$$

$$= -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i[r\sinh\chi + t\cosh\chi]^{m}/\hbar] \times d\chi$$

(2) $p = m\sinh\chi \qquad \sqrt{p^2+m^2} = m\cosh\chi \qquad dp = m\cosh\chi\, d\chi$

この積分は Bessel-fn である。

$$\because\ H_0^{(1)}(x) = -(i/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} e^{xi\cosh\varphi}\, d\varphi$$

$$H_0^{(2)}(x) = (i/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xi\cosh\varphi}\, d\varphi$$

$$J_0(x) = (2/\pi)\int_{0}^{\infty} \sin(x\cosh\varphi)\, d\varphi$$

$$Y_0(x) = -(2/\pi)\int_{0}^{\infty} \cos(x\cosh\varphi)\, d\varphi$$

$$2J_0 = H_0^{(1)} + H_0^{(2)}$$

$$2Y_0 = -i(H_0^{(1)} - H_0^{(2)})$$

$$\therefore\ U(r,t) = H_0^{(1)}\{m(t^2-r^2)^{1/2}/\hbar\} \qquad t > r$$

$$= H_0^{(1)}\{im(r^2-t^2)^{1/2}/\hbar\} \qquad r > t > -r$$

$$= -H_0^{(2)}\{m(t^2-r^2)^{1/2}/\hbar\} \qquad -r > t.$$

逆に positive energy state が凡て occupy され、neg は occupy されてないければ S の p の $\sqrt{p^2+m^2}$ を $-\sqrt{\ ''}$ で置きかへねばならぬ。即ち $-S(x,-t)$ 従って $-U(r,-t)$ $U(r,t)$のかはりに をとればよい。

従って pos. neg 共に occupy された時の $R_{\cancel{F}}$ 即ち R_F は

$$(x't'|R_F|x''t'') = -\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar\alpha_s\frac{\partial}{\partial x_s} + \alpha_4 m) S_F(x,t)$$

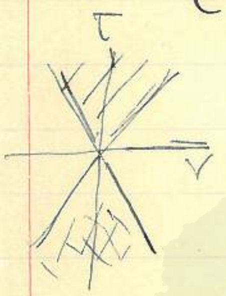
$$S_F(x,t) = \frac{-i}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}U_F(r,t)$$

$$U_F(r,t) = U(r,t) - U(r,-t).$$

$$\left.\begin{aligned} &= 2J_0\{m(t^2-r^2)^{1/2}/\hbar\} && t>r \\ &= 0 && r>t>-r \\ &= -2J_0\{m(t^2-r^2)^{1/2}/\hbar\} && -r>t \end{aligned}\right\}$$

同様にして. R_1 は

$$(x't'|R_1|x''t'') = -[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar\alpha_s\frac{\partial}{\partial x_s} + \alpha_4 m] S_1(x,t)$$



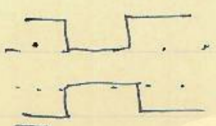
$$S_1(x,t) = -\frac{i}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}U_1(r,t)$$

$$U_1(r,t) = U(r,t) + U(r,-t)$$

$$\begin{aligned} &= 2iY_0\{m(t^2-r^2)^{1/2}/\hbar\} && t>r \\ &= 2H_0^{(1)}\{im(r^2-t^2)^{1/2}/\hbar\} && r>t>-r \\ &= 2iY_0\{m(t^2-r^2)^{1/2}/\hbar\} && -r>t \end{aligned}$$

之等からして ~~x=0~~ $t^2-r^2=0$ 即ち light cone の上の点が U_F, U_1 の singularity になってることがわかる

light cone の附近では



外側で $U_F = 2$ $t>r$

$U_F = -2$ $t<-r$

J_0 の exp. の第一項をとれば

内側で $U_F = 0$.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE ....
NO. ....

従って S_F は light cone の上で無限大．内外で忽ち小さくなる．

しかし．
$$\int S_F(x,t)\,dr = \frac{i}{4\hbar r}\begin{cases} 2 \\ 0 \\ -2 \end{cases}$$
$r>t \to r<t$ 内側大・外側大．
$r<-t \to r>-t$

$$\therefore\ S_F(x,t) = \frac{i}{2\hbar r}\{\delta(r-t)-\delta(r+t)\}$$

$t>0$:
$$S_F(x,t) = (i/2\hbar r)\,\delta(r-t)$$
$$= (i/\hbar)\,\delta(t^2-r^2)$$
$$\left(\because\ \int S_F(x,t)\,d(r^2) = 2\int S_F(x,t)\,r\,dr = \left(\frac{i}{\hbar}\right)\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}\right.$$ $r>t \to r<t$ 内側大 外側大．)

従って
$$(x't'|R_F|x''t'') = (1/\pi)(t+\alpha_s x_s)\,\delta'(t^2-r^2)$$
但し $\cancel{\int \delta'(t^2-r^2)}$ $\int f(x)\,\delta'(x)\,dx = f'(0)$

之が R_F の一番ひどい singularity
$t<0$ なら 符号がかはる丈．

T_0 の exp の第二項迄とると $\delta(t^2-r^2)$ がでてくる．
之以上の higher term からは ~~sing はでゝこぬ．~~ finite disconti がでてくるよ

次に R_1 の sing はどうかといふに U_1 の中の import. term は ~~一番 sing.~~ の
$$(4i/\pi)\log\{m(t^2-r^2)^{1/2}/\hbar\}\,J_0\{m(t^2-r^2)^{1/2}/\hbar\} \quad |t|>r$$
$$[2\pi(4i/\pi)\log\{im(r^2-t^2)^{1/2}/\hbar\}]\,J_0\{im(r^2-t^2)^{1/2}/\hbar\} \quad |t|<r$$
この他の項は light cone の内外で夫々で従って sing. に関係はない．

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........

NO..........

$|t|<r$ の方は　$(4i/\hbar)\log\{m(r^2-t^2)^{1/2}/\hbar\}\,J_0\{im(r^2-t^2)^{1/2}/\hbar\}$

J_0 の first term 丈とれば、

$$S_1(x,t)=\frac{1}{\pi\hbar}\,\frac{1}{r^2-t^2}$$

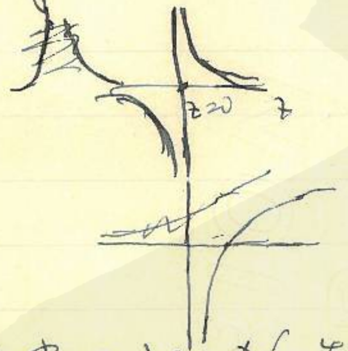
となる。

(之までの計算は ~~X~~ light cone の内外で Δ_1 は 2 次の spring をもつが。従って δ-fn がでる筈なるが log の diff の時出てくる

$$\frac{d}{dz}\log z=\frac{1}{z}-i\pi\delta(z)$$

の δ-fn として消える。

$$\int_{-a}^{a}\frac{d}{dz}\log z\,dz=\log a-\log(-a)=\log(-1)=i\pi$$



$$\int_{-a}^{a}\frac{dz}{z}=0.$$

(之はやっていいが先に微分しておいて R₁を出して expansion の式を入れれば分かる筈)

之を R_1 の式に入れると　$1/(t^2-r^2)(\cdots)$ を neglect すると、

$$(x't'|R_1|x''t'')=\frac{-i}{\pi^2}\,\frac{t+\alpha_s x_s}{(t^2-r^2)^2}$$

J_0 の exp の higher term をとって、

$\frac{1}{t^2-r^2}$, $\log(t^2-r^2)$

の order の sing. を計算出来る。

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........
NO..........

3. そんなら field が与へられれば どうなるか。

この場合の $(x't'|R_F|x''t'')$ $(x't'|R_1|x''t'')$ の singularity の性質は field のない場合と同様 ~~だと仮定し~~. 唯それらの coef. がわからぬとして、それらの coef は(一般に) $x_s't'$, $x_s''t''$ の函数で singularity をもたぬと仮定し. eq. of motion

$$\mathcal{H}R=0 \text{ etc}$$

を満足する様に coef を決定しうるかどうかを考察してみる。

R_F も R_1 も同様にやれるから. R_1 を考へる.

$$(x't'|R_1|x''t'') = u\cdot\frac{t+\alpha_s x_s}{(t^2+r^2)^2} + \frac{v}{t^2-r^2} + w\log|t^2-r^2|$$

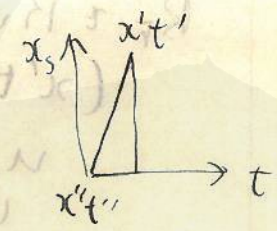
u, v, w : $x_s't'$, $x_s''t''$ の函数で $x_s t$ の小さい値に対しては singularity はないとしておく.

これは一般に spin variable にも depend し. 従って α's とも commute しないかもしれぬが. u または spin variable に関し diagonal なる α's と commute するとして全ての條件を満足さし ~~うるかどう~~ 得ることがわかるから、初めから u は spin に無関係にしておく.

さて
$$\mathcal{H} = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_s\frac{\partial}{\partial x_s}\right) + e(A_0 - \alpha_s A_s) - \alpha_4 m$$
$$\mathcal{H}R_1 = 0$$

なる條件が満足されるためには.

$$\mathcal{H}\left\{u\frac{t+\alpha_s x_s}{(t^2-r^2)^2} + \frac{v}{t^2-r^2} + w\log|t^2-r^2|\right\} = 0$$



$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -e\left\{A_0^{(x't')} \cancel{(-A_0(x''t''))} - \int_{x''t''}^{x't'} \frac{\partial A_s}{\partial t}\, dx_s\right\}$$

$$= -e\left\{A_0^{\cancel{(x't')-A_0(x''t'')}} - \frac{x_s}{t}\int_{x''t''}^{x't'} \frac{\partial A_s}{\partial t}\cdot \cancel{\frac{x_s}{t}}\, dt\right\}_{\cancel{x_s}\, t}$$

$$= -e\left\{A_0 - \sum_s \frac{x_s}{t}\left\{A_s(x't') - A_s(x''t'')\right\}\right\}\cdot t$$

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial x_r} = -e\left\{-A_s + \sum_s \frac{x_s}{x_r}\left\{A_s(x't') - A_s(x''t'')\right\}\underbrace{\cancel{x_r}}_{-\sum \frac{t}{x_r}\{A_0(x't') - A_0(x''t'')\}}\right\}^{x_r}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha_s\frac{\partial}{\partial x_s}\right)\left\{\frac{t+\alpha_s x_s}{(t^2-r^2)^2}\right\} - \frac{4(t-\alpha_s x_s)(t+\alpha_s x_s)}{(t^2-r^2)^3}$$

$$-\frac{1+3}{(t^2-r^2)^2}=0$$

or $$(\mathcal{H}u)\frac{t+\alpha_s x_s}{(t^2-r^2)^2}+(\mathcal{H}v)\frac{1}{t^2-r^2}-2i\hbar\frac{t-\alpha_s x_s}{(t^2-r^2)^2}v$$
$$+(\mathcal{H}w)\log|t^2-r^2|+2i\hbar\frac{t-\alpha_s x_s}{t^2-r^2}w=0$$

故に $\mathcal{H}w=0$ (他からはlogは出てこない)

及び 残りの項の和が 0. 即ち

$$(\mathcal{H}u)(t+\alpha_s x_s)+(\mathcal{H}v)(t^2-r^2)-2i\hbar(t-\alpha_s x_s)v$$
$$+2i\hbar(t-\alpha_s x_s)w(t^2-r^2)=0$$

しかるに $(\mathcal{H}u)(t+\alpha_s x_s)=-(t-\alpha_s x_s)\mathcal{G}u$
$$+2\left\{t\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+eA_0\right)+x_s\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x_s}-eA_s\right)\right\}u$$

但し $\mathcal{G}=i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}-\alpha_s\frac{\partial}{\partial x_s}\right)+e(A_0+\alpha_sA_s)+\alpha_4 m$

之を上式に入れると

$$2\{t(\quad)+x_s(\quad)\}u+(t-\alpha_s x_s)B=0$$

$$B=(t+\alpha_s x_s)\mathcal{H}v-2i\hbar v+2i\hbar w(t^2-r^2)-\mathcal{G}u$$

さて $(\ ,|R,|\ )$ の中の u, v は unique にはきまらぬ.

∵ u に $b(t-\alpha_s x_s)$ なる項を寄せ, v から b を引いておいても結果は同じ. (b は sing をもたぬもの)

所で, $B=0$ になる様に b を選び, しかして, u は

$$\{\quad\}u=0$$

を満足せねばならず 従って

$$u=k\exp\{ie\textstyle\int\{A_0dt-A_sdx_s\}/\hbar\}$$

$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = k \exp \frac{ie}{\hbar}\int \cdots / \hbar \cdot (-e)\left(A_0 - \int \frac{\partial A_s}{\partial t} dx_s\right.$

$-i\hbar \alpha_s \frac{\partial}{\partial x_s} = \quad \cdots \quad (\mp e)\left(A_s + \int \frac{\partial A_r}{\partial x_s} dx_r - \int \frac{\partial A_0}{\partial x_s} dt\right)$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

$\int \frac{\partial A_s}{\partial t} dx_s = 0$

DATE ....

NO. ....

$\exp\left\{\frac{ie}{\hbar}\int (A_0 - A_s c_s)\, dt\right\}$

$\frac{\partial}{\partial t} =$

となる。但し、積分は $x_s'' t''$ と $x_s' t'$ を結ぶ straight line について行ふ。

arb. coef k は worst singularity が $x_s t$ の小さい値に於て no field の場合と同じになる様にきめる。即ち $k = -i/\hbar$ ととればよい。之で u がきまる。

次に $\mathcal{B}=0$ なる式を考へてみるに、之は

$$(t-\alpha_s x_s) f - 2i\hbar v - \mathcal{G}u = 0$$

となる。但し、

$$f = \mathcal{H} v + 2i\hbar (t-\alpha_s x_s) w$$

v の代りに f を unknown とし、両式から v を eliminate すると、

$$2i\hbar f = \mathcal{H}(t+\alpha_s x_s) f - \mathcal{H}\mathcal{G}u - 4\hbar^2 (t-\alpha_s x_s) w$$

しかるに

$$\mathcal{H}(t+\alpha_s x_s) f = -(t-\alpha_s x_s)\mathcal{G} f + 4i\hbar f + 2\left\{t\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + eA_0\right) + x_s\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x_s} - eA_s\right)\right\} f.$$

従って.

$$2\left\{t\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + eA_0\right) + x_s\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x_s} - eA_s\right)\right\} f + 2i\hbar f = \mathcal{H}\mathcal{G}u + (t-\alpha_s x_s)(4\hbar^2 w + \mathcal{G} f).$$

之から f を求めるには先 ~~$(t-\alpha x_s)$~~ などの高次の項を除き、

$$2\{\quad\} f_1 + 2i\hbar f_1 = \mathcal{H}\mathcal{G}u$$

を満す f_1 を求めると.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..................
NO..................

$$f = f_1 + (t - \alpha_s x_s) g \qquad g \text{ : free from singul.}$$

なる~~形である~~と assume し. 上式に入れると. g は

$$2\left\{t\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + eA_0\right) + x_s\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x_s} - eA_s\right)\right\}g + 4i\hbar g$$
$$= 4\hbar^2 w + \mathfrak{G} f_1 + \mathfrak{G}(t - \alpha_s x_s) g.$$

を満足せねばならぬ.
　更に　$\mathfrak{G}(t - \alpha_s x_s) g$　を変形して上式に入れると
結局　$(t + \alpha_s x_s)\mathcal{H} g = 4\hbar^2 w + \mathfrak{G} f_1$　*
となる.

　さて上の f_1 なるものは unique に定まる.
　∵ f_1 は特異な式の中の f_1, $\mathcal{H}g$ 等(を其れ $A_0 A_s \ldots$ $x_s t$ の Taylor series に expand すると f_1 の nth degree の coef は lower degree の coef 及び A's の coef によって決定されるからである.

あとつたのは　w, g を求めることである.
上の前の*の式から に $\mathcal{H}$ を operate すると

$$\mathcal{H}(t + \alpha_s x_s)\mathcal{H} g = \mathcal{H}\mathfrak{G} f_1$$

　此の式は　$\mathcal{H}g$ を完全に決定する.
従って上の*式から　w が定まる.

び結局. g に就ては完全に定まる.

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..................

NO..................

而して、

$$(x't'|R_1|x''t'') = u\frac{t+\alpha_s x_s}{(t^2-r^2)^2} + \frac{(t+\alpha_s x_s)f_1 - gu}{2i\hbar(t^2-r^2)}$$
$$+ \frac{g}{2i\hbar} + w\log(t^2-r^2)$$

同様のことを R_F についてやると

$$(x't'|R_F|x''t'') = u(t+\alpha_s x_s)\delta'(t^2-r^2)$$
$$+ v\delta(t^2-r^2) + w\gamma(t^2-r^2)$$

但し、$\gamma(z)=0 \quad z<0$
$\gamma(z)=1 \quad z>0$

として u, v, w を求める。

u, v, w に対する式は R_1 の時と同じになる。従って其の solution は上と同形。但し numerical factor だけ異なる。

この場合には g の indeterminacy はきいてこない。

∵ g をかへると v は (t^2-r^2) なる factor をふくんだ項が異なってくる。之は $\delta(t^2-r^2)$ とかけるから 0 になる。

従って R_F の方は完全にきまる。

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..................
NO..................

以上の結論として、Hartreeの方法の適用される範囲は
限られて.
(i) 凡ての state が occupy されておる様な electron の distribution に対し、はっきりした意味を有って居る.
従って、その density matrix は上の R_F で与へられる.
(ii) 然るに n.e. state は凡て occupy され
p.e. state は 〃 unoccupy されてる時の el. distrib. は precise meaning を有って居る. 従って その時の density matrix は

$$R = \frac{1}{2}(R_F + R_1)$$

で与へられる.

この時 ~~permissible~~ な の possible variation は g の arbitrariness 丈から来、それは free from sing. で electron distribution の finite change に対応してる

しかし、どこの neg. state が un~~occupy~~ されて、どこの pos. state が occupy されてるかはわからぬ、(density matrix からはそこまではわからず.
従ってかゝることをいふのは上の如き場合では意味なく
結論は 上の様な形の

$$R = \frac{1}{2}(R_F + R_1)$$

のみが実際実現されてると考へねばならぬ、

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..............

NO..............

(iii) かく仮定すれば

$$R = R_a + R_b$$

の二つの部分にわけられる。

但し R_a は A での sing. を含み 従って与へられた field に対し 完全に定まる。

従って electron と positron の distrib の変化は常に R_b にのみあらはれるようと考へ。

…それ故

$$R_b = g/4i\hbar$$

とすればよい。

所で(以上の計算の仕方からみると rel. に gauge invariant な形であらはれてゐるから) Dirac 曰く R_b は rel. 及 gauge invariant で Hermit 型で 又 それに対応する density matrix は conservation law を満足することを証しうるといってある故に R_b に対応する ch. dens. cur. dens. が physically に意味あるものと考へられる。(electron, positron の distrib. によっておこる)

以上の結果は

(1) Pauli の principle を neglect したこと。
即ち $\rho^2 = \rho$ の式を R_b に対する effect を考へていないこと。
である

Dirac は更に el. mg. field による vacuum の Polarization が存在するかどうかを議論しようといっている。

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........................

NO..........................

この理論の Oppenheimer よりすぐれている所は、
Oppenheimer は field が無いに拘らず一定の量を density の中から引いておいたために gauge invariant でなくなった。
それに対して、Dirac のは $R_a R_b$ の如き方は field に応じて変り、従ってその方は gauge invariant である点である。

最後に ~~いって~~ せられば、$\psi, \tilde{\psi}^\dagger$ を nicht vertauschbar として
$\psi^\dagger(x't')\psi(x''t'')$ or $\psi^\dagger_{()}\psi_{()}$
の如きものを作って、適当なる ~~self consist~~ field での ~~eigen~~ orth. zustand $\psi_r \psi_r \ldots$ をとり
$\psi = \sum a_r \psi_r$
とおき、
$a_r^\dagger a_r = N_r$
が適当な値をとる時の $\psi(x)\psi^\dagger_{()}$ or $\psi^\dagger_{()}\psi_{()}$ matrix の singularity を研究する問題になる