Yukawa Hall Archival Library
Research Institute for Fundamental Physics
Kyoto University, Kyoto 606, Japan
04090
©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE.................
NO.................

量子力学を実際問題に応用するのに参考になる様なことを簡単に要約することにする。

(1) 先づ量子力学では物理的な量を operator としてあらはす。例へば、一つの particle の位置を xyz であらはすと之に conjugate な運動量は ~~[illegible]~~ $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$, $-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$ なる differential operator としてあらはされる。詳しくいへば、xyz の任意函数 $f(xyz)$ を $-i\hbar\frac{\partial f}{\partial x}$ にかへる様な operator としてあらはされる。

この例からもわかる様に operator としてあらはすといっても、~~変数~~ 結局は変数~~の関数~~の函数に operate する operator としてあらはすのであるから、この独立変数のとり方によって物理的な量のあらはし方 (representation, operator ~~[illegible]~~ の表はし方 Darstellung) が色々にかはる。特に xyz 等の位置の coordinate を独立変数とする様な ~~[illegible]~~ あらはし方を Schrödinger の representation と称する。

~~[illegible]~~ ~~Sch~~ ~~[illegible]~~ 之からは専ら Schrödinger の representation のみを取扱ふ。各種の representation の間には一定の関係があるが、

(2) ~~[illegible]~~ ある representation に於て operator 間に identity なる algebraic 又は functional relation が成立するならば、之は物理的な量の間に成立する関係をあらはすものと考へられるから、それは representation に無関係でなければならぬ。であるから、~~algebraic or~~

一つの representation から他の repr. へかへることを transformation と称する。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..............................
NO..............................

~~functional relation を変へない~~様には 一つの rep.
から他の rep. にかはっても ~~at~~ operator の間の algebraic
or f'nal relation は之と同じでなければならぬ。
~~即ち S を一つの operator E を Einheitsoperator として~~

$$\cancel{SS^{-1} = S^{-1}S = E}$$

~~を満足する様な operator 即ち S の逆 $S^{-1}$ が存在するとし、~~
~~任意の operator P を~~

$$\cancel{SPS^{-1}}$$

~~にかへる様な~~
かかる transf. を canonical transformation と稱する。

(3) 相

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



量子力学を實際に應用するのに参考になる様なことを簡單に説明することにする。
それには相互に coulomb force の働いて居る場合の多体問題に於ける非相対律的な Schrödinger の微分方程式から出發する。
それは Hamilton 函数を

$$\cancel{-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+H\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right.}$$

$$H(p_i, q_i) = \sum\frac{1}{2m_i}p_i^2 \cancel{+\sum_{i<j}V_{ij}(r_i, r_j)}$$
$$+\sum_{i<j}\frac{e_ie_j}{|r_i-r_j|}$$

と~~する~~したならば、$p_i = -i\hbar\,\mathrm{grad}_i$ なる operator と考へて．

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}+H(-i\hbar\,\mathrm{grad}_i, r_i)\psi = 0$$

or

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}+\sum_i\frac{\hbar^2}{2m_i}\Delta_i\psi-\sum_{i<j}\frac{e_ie_j}{|r_i-r_j|}\psi = 0$$

$$\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \text{ 等}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

とすればよい

$$\cancel{-i\hbar\,\mathrm{grad}_i = p_i}$$

~~とかけば~~所で任意函数 $\psi$ に対し

$$\frac{\partial}{\partial x}x\psi - x\frac{\partial}{\partial x}\psi = \psi$$

であるから

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..............................

NO..............................

之を Operator の $p_i$ と $x_i$ の間の関係式として

$$p_{x_i} x_i - x_i p_{x_i} = -i\hbar \quad \text{etc}$$

とおくことが出来る。その関係式から之れ Operat 間に於いて

$$\left.\begin{aligned} p_{x_i} y_i - y_i p_{x_i} &= 0 \\ p_{x_i} x_j - x_j p_{x_i} &= 0 \\ p_{x_i} y_j - y_j p_{x_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \; i \neq j$$

等とかきうる。

又 classical ~~theo~~ mechanics に於ける と同様に angular momentum

$$\mathfrak{m} = [\mathfrak{r}\,\mathfrak{p}]$$

~~に analogous に~~. ~~angular moment~~ として之をおくと.

$$m_x = y p_z - z p_y \quad \text{etc}.$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} m_x x - x m_x &= 0 \\ m_x y - y m_x &= i\hbar z \\ m_x z - z m_x &= -i\hbar y \end{aligned}\right\} \text{etc}$$

~~となる。なる関係がある。~~

~~又は~~ 及び

$$\left.\begin{aligned} m_x p_x - p_x m_x &= 0 \quad \cancel{m_x m_y - m_y m_x =} \\ m_x p_y - p_y m_x &= i\hbar p_z \\ m_x p_z - p_z m_x &= -i\hbar p_y \end{aligned}\right\} \text{etc}$$

又に

$$\cancel{\cancel{m_x} m_y - m_y m_x = (m_x y - y m_x) p_z - y(m_x p_z - p_z m_x) - z(m_x z - z m_x) p_y + z(m_x p_y - p_y m_x)}$$

$$\cancel{= i\hbar (z p_z + y p_z + y p_y + z p_y)}$$

$$m_x m_y - m_y m_x = (m_x z - z m_x) p_x + z(m_x p_x - p_x m_x) - \cancel{z}(m_x x - x m_x) p_z - x(m_x p_z - p_z m_x) = i\hbar (x p_y - y p_x)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..................

NO..................

$$m_x m_y - m_y m_x = i\hbar m_z \quad \text{etc}$$

~~operator $p_i$ 及び $r_i$ の任意函数 $F(p_i, r_i)$ に對し~~

$$\cancel{F(p_i r_i)\,\psi(r_i) = C\,\psi(r_i)}$$

~~を満足する所の $r_1 r_2 \cdots$ の 函数 one valued conti. function~~

Schrödinger の式を満足する ~~函数~~ one value conti. fn $\psi(r_1 r_2 \cdots t)$
の物理的な意味は次の如し

$$\bar{\Psi}\psi(r_1 r_2 \cdots t)$$

は time $t$ に於て particle 1, 2, ‥ が夫々 $r_1 r_2 \cdots$ にある ~~prob~~ relative prob をあらはす。

Operator $p_i$ 及び $r_i$ の任意函数 $F(p_i r_i)$ に對し

$$F(p_i r_i 等)\,\psi(r_i 等) = C\,\psi(r_i 等) \qquad C: \text{const}$$

を満足する所の $r_1 r_2 \cdots$ 等の one valued conti function $\psi$ 及び number $C$ が存在する時 $C$ を $F$ の eigenvalue, $\psi$ を eigenvalue $C$ に屬する eigenfn と稱する。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



§ Method of Division in many body problem

多体の一般の問題は普通 Störungsrechnung によって approximation に解くのであるが、approximation の良し悪しを判断することは非常に困難である。その原因は之は classical dynamics に於ては或る ~~particle~~ に就ての種々の量の大小をしらべればよいが、q. mech. では configuration space 全体での函数値の大小が問題となる。或る量の、その量が或る部分では大きく、他の部分では小さい時、その函数値の order がはっきりしない場合がある。

そこで吾々は configuration space 全体を一遍に考へることを止めて、適当に幾つかの部分にわけ ~~各部分が独立である~~、各部分に於ける approximate solution をつなぎあはすといふ方法を採用して見る。

簡単な例として Coulomb field で particle が動く場合、force の centre に近い部分と遠い部分とにわけ、遠い部分では field が 0 として、両方別に解いて、~~boundary~~ boundary condition によって両方の solution をつなぎあは~~す~~し、boundary を ∞ にもって行くといふ方法が考へられる。

もっと複雑な例として three body problem をとる。

$$\left\{\frac{1}{m_1}\Delta_1+\frac{1}{m_2}\Delta_2+\frac{1}{m_3}\Delta_3+\frac{2}{\hbar^2}\left(E-\frac{e_1e_2}{r_{12}}-\frac{e_2e_3}{r_{23}}-\frac{e_3e_1}{r_{31}}\right)\right\}\psi=0$$

に於て、$r_{12}$, $r_{23}$, $r_{31}$ : small の場合にわけて考へる。

$r_{12}$ 小　$r_{31}$, $r_{23}$ 大.
$r_{23}$ 小　$r_{12}$, $r_{31}$ 大
$r_{31}$ 小　$r_{23}$, $r_{12}$ 小
$r_{12}$, $r_{23}$, $r_{31}$ ; 小

$\frac{r_{12}+r_{31}}{2} > r_{23}$ etc.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

第一の部分では eq は

$$\left\{\frac{1}{m_1}\Delta_1+\frac{1}{m_2}\Delta_2+\frac{1}{m_3}\Delta_3+\frac{2E}{\hbar^2}\right\}\psi^{(0)}=0$$

この式の general solution は plane wave ~~の super~~ 又は spherical wave の superposition として あらはされる。

第二の部分では

$$\left\{\frac{1}{m_1}\Delta_1+\frac{1}{m_2}\Delta_2+\frac{1}{m_3}\Delta_3+\frac{2}{\hbar^2}\left(E-\frac{e_1e_2}{r_{12}}\right)\right\}\psi^{(1,2)}=0$$

この時には ~~$\Delta_3$ について~~ solution は $\Delta_3$ に関しては plane wave or spherical wave の superposition となり，$\Delta_1, \Delta_2$ に関しては ~~Kepler~~ 普通の two body problem の solution の superposition となる。

第三，第四の部分について も同様，

第五の部分 では，~~$r_{12}=r_{23}=r_{31}=0$~~ $m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3=R$。

~~の附近で power series に expand する~~

~~$r_1=\frac{R_0}{m_1+m_2+m_3}$~~

一般の solution を求めることは出来ぬ。

各部の解を $\psi=0$ とする。

$X_3=x_1-x_2$　$Y_3$　$R_3^2$
$X_1=x_2-x_3$　$Y_1$　$R_2^2$
$X_2=x_3-x_1$　$Y_2$　$R_1^2$
$R'=R_1^2+R_2^2+R_3^2$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

核構造に関する疑問一束　NO.

(1) Massdefect：Massdefect は nucleus (or ion) の electric or magnetic field に於ける deflection の amount から計算される。この場合は全体の運動が問題になる~~のであるから~~ならない。から、全体の質量は各 constituent particle の質量の和の和で、~~massdefect は deflection~~ constituent particle 相互の binding による に直接関係してこない筈である。

然し全体の質量が各 constituent particle の質量の和に等しいといふ事は観測が原子核全体についてのみ ~~からされては cons~~ 考えるの、又は各 constituent particle ~~を揃えた~~ は原子核の中で独立性を失ってると考えるかである。

(2) Negative Energy State

(3) ~~Proton~~ Repulsion の働く粒子 particles の binding.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(4) ProtonによるProtonのscatteringの実験がないこと。

(5) Shower

showerにProton等のtrackがあらはれぬこと等。

(i) processが全てKernのunmittelbar Umgebungにおこるか 又は(ii) Kern附近に出来た粒子がNeutronとPositron Electronにわかれてゆくことを意味するかもしれぬ

(6) Q.E.Dに於けるHamiltonianはsystemのenergyをあらはしてゐない。∵$\int(\mathbb{E}^2+\mathbb{H}^2)dv$ 中にparticlesのW.W.-Energieがあらはれてくるのみならず $\int\psi^*(\ldots(\alpha A))\psi dv$ (電荷$A_0$)がまたW.W. Energieをあらはしてゐる。
なほいづれか一方は不必要の筈。前者の中にはSelbstenergieがふくまれてゐるから 後者にはふくまれてゐない筈。結局…をとるのかよい。 粒子間の相互作用をとる

これを根本にさかのぼっていへば、radiationといふの(のemission, absorption)を考へるのは与へられた ~~syst Gebilde~~ ~~Gebilde~~ を system の stationary ~~discrete~~ state の間のtransitionによっておこると考へる。であるから さういふsystem ~~を考へないならば~~ ~~Q.E.Dのとり方~~ の内部では radiation ~~といふものは意味がない~~ 中のparticlesの相互作用を考へるのに、の概念 各粒子間は

もし$A_0=0$とする時 粒子の中には electro~~magnetic~~ static energy はふくまれてゐない、但し各粒子間には mag. int. energyはふくまれてる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO.

§ Foundation of Quantum Mechanics

Classical Mechanics に於る Hamilton の理論は Poisson Bracket ~~を使へば~~

$$[x, y] = \sum_r \left( \frac{\partial x}{\partial q_r}\frac{\partial y}{\partial p_r} - \frac{\partial y}{\partial q_r}\frac{\partial x}{\partial p_r} \right)$$

を使へば Eq. of motion は

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r} = [q_r, H]$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} = [p_r, H]$$

又は一般に $\dot{\xi} = [\xi, H]$

又 $P_s, Q_s$ が canonical variables である條件は

$$[Q_s, P_t] = \delta_{st} \qquad [Q_s, Q_t] = 0 \qquad [P_s, P_t] = 0$$

Quantum Mechanics では

$$[x, y] = \frac{1}{i\hbar}(xy - yx)$$

でおきかへる. すると.

$$\dot{q}_r = [q_r, H] \qquad \dot{p}_r = [p_r, H]$$

$$\dot{\xi} = [\xi, H]$$

$$[q_r, p_s] = \delta_{rs} \qquad [q_r, q_s] = 0 \qquad [p_r, p_s] = 0.$$

classical theory で. t を canonical variable の一つとみなし その conjugate 量を W とすると.

$$[x, y] = \sum_r \left[ \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial W} - \frac{\partial x}{\partial W}\frac{\partial y}{\partial t} + \sum_r \frac{\partial x}{\partial q_r}\frac{\partial y}{\partial p_r} - \sum_r \frac{\partial y}{\partial q_r}\frac{\partial x}{\partial p_r} \right]$$

$$\dot{t} = 1 = \frac{\partial L}{\partial W} \quad \therefore L = W + H. \qquad \dot{t} = [t, L]$$

$$\dot{W} = -\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \qquad \dot{W} = [W, L]$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$\dot{p}_r = [p_r, L]$

$\dot{q}_r = [q_r, L]$　　∴ $\dot{\xi}(p_r, q_r, W, t) = [\xi, L]$

$Q_s\, P_s$ が他の canonical variables なる條件は

$$[Q_s, P_t] = \delta_{st} \quad \text{etc}$$

なることを Q. Theory に直せば

$$(D') \quad \dot{\xi} = [\xi, L] \qquad L = W + H.$$

$$(K)\left\{\begin{array}{l} [q_r, p_s] = \delta_{rs}, \quad [q_r, q_s] = 0, \quad [p_r, p_s] = 0 \\ [t, W] = 1, \quad [t, q_r] = 0, \quad [q_r, W] = 0 \quad \text{etc} \end{array}\right.$$

kinematical, ~~dynamical~~ law (K) 及び dynamical law (D') がすべて symbolical な形であらはされた。

さて之を実験と比較すれば数であらはさねばならぬ。

勿論、$q_r\, p_r\, t\, W$ 等の量は計算の commutative law を除いて全ての law があてはまるとする故、それらの power series であらはされる函数、negative power, root 等を定義しうる。(~~root は分岐~~ root は eindeutig に定まるや否やは別だが)

もしも互みに commute するものだけを取出して考へるならば ~~$q_r\, p_s$~~ 普通の数と同じであらはしてよい。従って互みに commute するもの~~の間の関係によって、それらをあらはす数の間の関係~~の任意の函数を定義し得る。functional rel. ~~が定まる~~。かかる函数関係によって、それらをあらはす数の間の final rel も定まる。∴ 之の symbol の間の関係はかかる ~~互に commutative でない量を考へると~~ 数の間の関係の全体をあらはしてゐる。

互に commutative でない二つの量を考へ~~れば~~る。その一方を普通の数であらはせば、他は ~~普通の量で何か operator と考へね~~ 普通の数ではいかんから、之を何か数の集りと~~考へれば~~。例へば一つの matrix と考へれば~~表せ~~ 表はしいこともあるが、~~一般に~~ matrix では都合悪く、linear operator とせねばならぬ。

つまり、~~一方の~~量を数とし、その函数(二つの量の結合)~~は0であるに作用する~~ 第二の量は、他の函数にかかる linear operator と考へればよい。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$e^{\frac{pc}{i\hbar}} = \sum_n \frac{1}{n!}\left(\frac{pc}{i\hbar}\right)^n$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

$\dagger$ p.

DATE

NO.

~~多くの non-commutative な量があるならば、それに commute する~~
~~ものを出来るよう多数選んで、それらの固有値を一つの組として、とり~~
~~ある~~

そこで問題となるのは固有値の採る範囲 interval であるが、~~それをとるな値~~ それを全部平面にとって ~~十分意味があらなければそれでよいが~~、~~一般には他の量を operator として表わすために~~ interval は制限される。一般にはその中のある範囲に限られて来る。

例へば ~~$pq - qp$~~ $[q, p] = 1$ といふ関係があれば $q$ は $\psi(x)$ ~~に~~ を $x\psi(x)$ にし、$p$ は $\psi(x)$ を $-i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}$ にする operator を対応させると、$e^{-pc/i\hbar}$ は $\psi(x)$ を $\psi(x+c)$ ~~に移す~~ にかへる operator が対応する。$x$ の interval は $\pm\infty$ にとってよい。$\dagger$

所で、$E = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 - \frac{1}{2}\hbar)$ なる量を考へれし、~~$\psi(x)$~~

$E$ には $\psi(x)$ を $x\psi(x)$ にかへる様な operator を対応させて、~~$\psi(x)$ $p, q$ にはまた $\psi$~~ $(p-iq)(p+iq) = 2E +$ $-i(qp - pq)$

$E = \frac{1}{2}(p+iq)(p-iq)$ で、$E(p+iq) = \frac{1}{2}(p+iq)(p-iq)(p+iq)$

$= ~~(E+\hbar)~~ (p+iq)(E+\hbar)$. $(x)$ を $\psi(x+\hbar)$

$\therefore$ $p+iq$ には $\psi(x)$ を $\sqrt{2(x-\hbar)}\,\psi(x-\hbar)$ にかへる operator が対応し、$p-iq$ には $\psi(x)$ を $\sqrt{2(x+\hbar)}\,\psi(x+\hbar)$ にする。故に $p, q$ の函数は $\psi(x)$ の argument を $\hbar$ の整数倍かへたものの linear combination になる。故に $x$ の interval は $\hbar$ だけはなれた点丈をとってよい。
固有値

$p$ 

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

~~併し~~ $\psi(x)$ 於て
$(p-iq)(p+iq)$
には $\psi(x\cancel{+\hbar})$ を $\underbrace{\psi(x+\hbar)}_{2(x+\hbar)}$ にうつす如き operator が存在する。

又かくして $(p-iq)(p+iq)-(p+iq)(p-iq)=2\hbar$.
~~この~~の左边は
$\psi(x\cancel{+\hbar}) \to 2\hbar\,\psi(x\cancel{+\hbar})$
になる。~~$\psi(x)$~~を 右边は $\psi(x)\to 2\hbar\,\psi(x)$
もしも、$x \geq 0$ に限るならば、一番小さな値を $x_0$ とすると。
$\psi(x_0)\to\sqrt{2x_0\hbar}\,\psi(x_0-\hbar)$　　故に $x_0=0$ とした時丈, $\psi(x_0)\to 0$
になる。即ち、$p+iq$ なる operator には、
$\psi(n\hbar)\to\sqrt{2n\hbar}\,\psi((n-1)\hbar)$　　$\psi(0)\to 0$.
$p-iq$ : $\psi((n-1)\hbar)\to\sqrt{2n\hbar}\,\psi(n\hbar)$

---

次に ~~$\psi(n\hbar)$~~ をきて
$p_r, q_r, W, t$ 等 の どれかを基にしたれば 例へば $\psi(x)$ の $x$ の
範囲としていつでも ~~正~~ 実数をとつてよい。
(特に $t$ ~~…~~ の時には $(0,\infty)$ をとるとする)
これらを $p_r, q_r, W, t$ 中の 基礎にとれば 得られる。色々な Darstellung の間の関係が問題になる。~~…~~ 一方から他の方へ移る方法を明かにせねばならぬ。それは transformation 函数を使ひ、
即ち $\psi(x)=\int(x/y)\phi(y)\,dy$ 故 $\phi(y)=\int(y/x)\psi(x)\,dx$
から ~~…~~ によつて、両方の repres の間に one-one
correspondence ~~…~~。すなはち 例へば $(x/y)$
$(y/x)$ をしればよい。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO.

$\frac{d\xi}{dt}$ の ~~Darstellung~~ は $\frac{1}{dt}\{\cancel{\psi(q_r, t+dt)} - \cancel{\psi(q_r\, t)}\}$

$\frac{1}{dt}\{\xi(t+dt) - \xi(t)\}$ の 〃 だから.

$\frac{1}{dt}\{\xi\,(t+dt)\,\psi(\,q_r + dq_r,\ \ t+dt) - \xi(t)\,\psi(q_r, t)\}$

$= \xi$

$\cancel{\frac{1}{dt}\{\xi(t+dt)\,\psi(q_r, - \xi(t)\}}\,\cancel{\frac{\partial\psi}{\partial t}}\quad \xi(t)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \cdots\right)$

$+\ \frac{\partial\xi}{\partial t}\psi(\cdot\,\cdot) \quad \cancel{\bar{\psi}\xi L \psi} = 0$

$\frac{d\xi}{dt}$ の Darstellung は $[\xi, L]$ の Darstellung で, それは

(決り) $q_r$, $p_r$, $w$, $t$ の Darstellung がわかればきまる.

$\{L(\cdot\cdot)\xi(\cdot\cdot) - \xi(\cdot\cdot)L\ \underbrace{(-i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t},\ t,\ -i\hbar\tfrac{\partial}{\partial q_r}\ q_r)\}\psi(q_r)}_{0}$

~~$\psi$ をして $\xi\psi$ は $L\xi\psi$~~ ~~$L\psi = 0$ を 満たす~~ $L$ に対応する operator

を $\psi \to 0$ とする様な $\psi$ をとれば, それは Schrödinger

の repr. $\quad \int \bar{\psi}\frac{d\xi}{dt}\psi(q_r t)\,dq_r\,dt = +\int \bar{\psi}(L\xi - \xi L)\psi\,dq\,dt$

~~それなして.~~

$= 0$,

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

relativistic quantum theory では、之を modify し、

之 $[x_i, p_j] = \delta_{ij}$　　$i = 0, 1, 2, 3,$　$x_0 = ct,\ x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$

$[x_i, x_j] = 0$　　$[p_i, p_j] = 0$ etc

$[\psi, x_i] = 0$　　$[\psi^\dagger, x_i] = 0$ etc

$[\psi, L] = 0$　　$[\psi^\dagger, L^\dagger] = 0$ etc

但し、$\psi, \psi^\dagger$ は $p_i$ とは commute せず、$x_i, p_i$ 以外の変数の函数は $L$ とのみ commute する。

Particle が spin をもつて居れば 之の他に $\alpha_i$ 等を考へる。但し、$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}$ etc.

~~$\{\alpha_i, \alpha_j\} =$~~

すると、

$$L = \alpha_i(p_i + \frac{e}{c}A_i) + \frac{1}{?}mc$$

$$L^\dagger = \tilde{\alpha}_i(-p_i + \frac{e}{c}A_i) + \frac{1}{?}mc$$

~~$L\psi = \psi L$.~~ ~~$p_i$ が~~

(1) $[\alpha_i, \psi] = 0$ なら、$[\psi, L] = 0$.

(2) $\alpha_i\psi + \psi\alpha_i = 0$ なら ~~$[\psi^\dagger, L^\dagger] = 0$~~,

$\psi^* L + L\psi = 0$.

~~之は~~ e, m を含んだ項がのこる ためには、e, m

(1) e, m : $\psi$ と anticommute し、普通の e, m の eigenvalue は $\pm\frac{e}{2}, \pm\frac{m}{2}$ とするか、

(2) $\psi$ のかはりに $\{e^{\frac{i}{\hbar}\frac{e}{c}A_i x_i}\psi\}$ をとれば、

$\psi^\dagger$ のかはりに $\psi^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{e}{c}A_i x_i}$ をとればよい。

但し $\sum_{ij}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}x_j$　$\sum_i \alpha_i A_i$　$\sum_i \alpha_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} x_j = 0$.　$\frac{\partial A}{\partial x \partial y} = \frac{\partial A}{\partial y \partial x}$

$(L A_j - A_j L)x_j = 0$.

$p_i(p_j A_k - A_k p_j) - (p_j A_k - A_k p_j)p_i = p_j(p_i A_k - A_k p_i) - (\quad)p_j = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........................

NO...........................

$$\cancel{p_i \chi - \chi p_i = i\hbar \cdot A_i \chi}$$

$$\cancel{L\psi - \psi L = i\hbar \partial_i}$$

$$\psi^\dagger \psi + \psi \psi^\dagger = 1$$

$$L(\psi^\dagger \psi + \psi\psi^\dagger) \pm (\psi^\dagger\psi + \psi\psi^\dagger)L = L\psi^\dagger\psi \pm \psi L \psi^\dagger$$

$$+ \psi^\dagger L \psi - \psi\psi^\dagger L = 0.$$

$$\psi(L\psi + \psi L) - (L\psi + \psi L)\psi = 0.$$

$$= \psi \rho - \rho \psi = 0 \text{ !!!}$$

$$\underline{L\psi + \psi L = \rho,}$$

$$\underline{L^\dagger \psi^\dagger + \psi^\dagger L^\dagger = \rho^\dagger}$$

$$\frac{1}{c}H = \sum_{xyz} \alpha'_x \left(p_x + \frac{e}{2c} A_x\right) + \frac{\alpha_0}{2} mc$$

$\alpha_0 \rho$ !!!

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..................

NO..................

# Relativistic Quantum Mechanics

non-relativistic quantum mechanics に於ては probability amplitude ~~を求めることが~~ が最も ~~fundamental な~~ 重要な役割をつとめた。

ある現象 ~~の起~~ が生じ起る場合に、他の(ある)現象が起る prob はそれらに対応する ~~内の~~ ~~am~~ prob.amp の ~~二~~ 絶対値の二乗として与へられる。しかして、prob. amp ~~が~~ に対する ~~計算法則は~~ 計算の法則が丁度普通の prob に対する計算の法則と一致する。

~~然るに~~ relativistic quantum mechanics に於ても prob.amp. に相当する量 ~~が問題~~ は考へられる。例へば Heisenberg-Pauli の理論に於ける

$$\Psi(N_1(t) N_2(t) \cdots ; M_1(t) M_2(t) \cdots \text{等}\, t / N_1' N_2' \cdots)$$

なる量の如きものである。~~然し $N_i$ は i 番目の state にある electron の数、$M_\mu$ は μ 番目の state にある light~~ quanta の数をあらはす。

しかしこの場合には $N_1' N_2' \cdots ; M_1' M_2' \cdots$ の如き量は凡てある一定の time に於ける ~~それらの数である~~。夫々の量の数値をあらはす。~~言換すれば~~ もっと relativistic に symmetric な量を introduce することがもっとのぞましい。

しかして $|\Psi|^2$ は time t に於て i 番目の state にある electron の数が $N_i$ … である様なことがわかっている時、time t' に於て i 番目の state にある electron の数が $N_i'$ … である prob をあらはす。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO.

そこで $N_1(t)\,N_2(t)$ … の代りに
$N(x,t)$ をとり、
$\Psi(N'(x',t') \,/\, N(x,t))$ $(-\infty \le x \le \infty)$ $(-\infty \le x' \le \infty)$

をつくると、~~これは~~ $|\Psi|^2$ は time $t$ に於て $x(\le\infty)$ 点にそれぞれ $N(x,t)$ 個の particle が存在してゐることがわかつてゐる場合、time $t'$ に於て $x'$ 点にそれぞれ $N'(x',t')$ 個の particle が存在する prob をあらはす。
これを書き直して time $t$ に $x$ 点に $N(x,t)$ 個の particle、time $t'$ に $x'$ 点に $N(x',t')$ 個の particle があるといふ様なことが起りうる a priori の relative prob をあらはすと考へる (Dirac: )
~~考へと~~ $\cancel{|\Psi|^2 = 0}$. しかして、もつと一般に四次元空間のある closed surface 上で、その各点で $N(x,t)$ が与へられば
$$|\Psi(N(x,t))|^2$$
は、その closed surface 上での各点 $(x,t)$ に particle が夫々 $N(x,t)$ 個存在するといふ様なことが起りうる apriori relative prob をあらはす。~~次に~~ そこで問題は
$$\cancel{|\Psi(N(x,t))|}$$
$$\Psi(N(x,t))$$
の満足すべき関係を明かにすることにある。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........
NO..........

Heisenberg-Pauliの理論では $N(x,t)$, $\Theta(x,t)$ の函数,

$$\overline{H} = \int H(N(x,t), \Theta(x,t), \cdots)\, dv$$

があたへられた時. $\Psi$ は

$$\overline{H}\,\Psi(N'(x',t')/\ ) = i\hbar \frac{\partial \Psi(N'(x',t')/\ )}{\partial t'}$$

を満足せねばならぬ。
time $t$ に於いて,

$$\Psi(N'(x',t)/\ ) = \delta(N'(x',t); N(x,t))$$

ならば

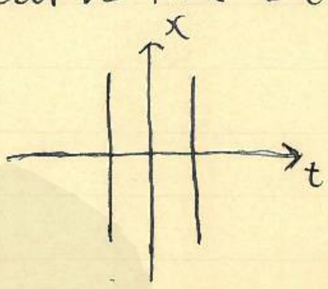
$$\Psi(N'(x',t')/\ ) = \Psi(N'(x',t')/N(x,t))$$

である。但し $\delta(N'(x',t); N(x,t))$
は $N'(x,t) = N(x,t)$ for any $x$ ~~ならば~~ で
~~1~~ でなければ 0 である ~~ot~~ δ-函数としておく。
この場合. dynamical variables $N(x,t)$ と $\Theta(x,t)$ との間の関係は $x,t$ に independent に決まってゐると考へる。

~~$\overline{L} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \overline{H}(t)$~~

~~なる operator は or~~

~~$\int \overline{L}(t')\, \delta(t',t)\, dt'$~~




但し 同じ time $t$ に於ける $N(x,t)$ $\Theta(x',t)$ 等の関係は explicit にあたへられてゐるが. 異なる time に於ける $t, t'$ ~~t, t~~ $N(x,t)$ $\Theta(x',t')$ $t$.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



の間の関係は 其れ自身又は eq. of motion

$$i\hbar \dot{F} = F\overline{H} - \overline{H}F$$

をとかなければならぬ。

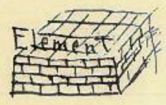
所 ~~the~~ で

$$\cancel{\left(H\right)(x,t)\,\Psi\left(N(x,t)\cdots\cdots\right)} =$$

$$\Psi\left(N'(x',t')/N(x,t)\right)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} \Psi\left(N'(x',t')/N(x,t)\right) = \overline{H}\Psi$$

$$\lim_{\Delta t' \to 0} i\hbar \frac{\Psi\left(N'(x',t'+\Delta t')\right) - \Psi\left(N'(x',t')\right)}{\Delta t'} \Big/ N(x,t))$$




$$=$$

$$H\Psi =$$

他方から考へると.

$$\Psi\left(q'(t')/q(t)\right) = \int \left(q'(t')/q'(t'-\Delta t')\right)\left(\cdot\ -\ \right)\left(q(t+\Delta t)/q(t)\right) dq(t'-\Delta t')\ldots dq(t+\Delta t)$$

$$\left|\left(q'(t')/q(t)\right)\right|^2 = \cdots$$

$$i\hbar \frac{\left(q(t+\Delta t)/\right) - \left(q(t)/\right)}{\Delta t} = H\left(q(t)/\right)$$

$$\left(q(t+\Delta t)/\right) = \left(q(t)/\right) + \Delta t \frac{H\left(q(t)/\right)}{i\hbar}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........

NO..........

# A Scheme of Relativistic Quantum Mechanics

## Introduction

Quantum Mechanics に用ひられる種々の方法の中で、物理現象の法則性の本質を最も奥深く照し出すものは symbolical method であらう。古典論に於けるが如く、物理的な量の値との数値の間に存在する(同等な)法則は、量子論に於ては認められない。唯物理的な量のとりうる個々の数値を一緒にしたものを~~一つの~~新しい一つの量と考へれば、色々な物理的な量に対応する量の間に古典論に於けると殆んど同形の法則が認められる。従って量子論に~~於ては、出来る丈~~の継続することで~~を自身を取扱~~の計算は出来る丈かゝる量に就いて行ひ、最後になって、それを数値に直すといふ~~事柄が~~のが採られるべきである。かゝるやり方を徹底すれば、従来の R.Q.M. の錯雑した式を簡浄化し、それを一層一般化しうるのみならず、更に進んで正しい R.Q.M. に到達する路を与へうるであらうと思はれる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........

NO..........

§ Symbolical method in ~~non-relativistic~~ quantum mechanics of system of particle

ここでは non-relativistic q.m. の ~~諸~~ kinematical and dynamical laws を symbolical に ~~formulate しよう。~~ 書きあらためる。

先ず classical dynamics に於ける canonical variables に対応して ~~non-commutative quantities~~ q, p

$$qp - pq = i\hbar \qquad (1_1)$$

なる V.R. を満足する non-commutative quantities q, p を introduce する。又 time 及び之に conjugate な variable に対応して

$$tW - Wt = -i\hbar \qquad (1_2)$$

なる V.R. を満足する quantities t, W を introduce する。但し、

$$\left.\begin{aligned} qt - tq &= 0 \qquad (1_3) \\ qW - Wq &= 0 \qquad (1_4) \\ tp - pt &= 0 \qquad (1_5) \end{aligned}\right\}$$

$$Wp - pW = 0. \qquad (1_6)$$

~~(1)~~

~~而して (1₃) 及び~~ そこで W のかはりに

$$L = H(p, q, t) - W \qquad (2)$$

なる量を introduce すると (1) のかはりに

$$\left.\begin{aligned} qp - pq &= i\hbar & (3_1) \\ tL - Lt &= i\hbar & (3_2) \\ qt - tq &= 0 & (3_3) \\ qL - Lq &= qH - Hq & (3_4) \\ tp - pt &= 0 & (3_5) \\ Lp - pL &= Hp - pH & (3_6) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



が成立せねばならぬ。但し H は classical な Hamiltonian に對應するものと考へる。

次に t を diagonal にする様な任意の matrix representation を~~に於て~~考へる。(1_3)及び(1_5) ~~により p~~ (or (3_3)及び(3_5)) により p, q は t と commute するから、それらの matrix element 中 0 でないのは t に関して diagonal なもののみである。故に p, q は time t を parameter に含んでゐるとみなし得る。~~次にかく考へれば~~ ~~(3_2) により、~~ 次に p(t), q(t), t の任意函数 F(p, q, t) ~~L = −iħ d/dt になし. Q matrix repr.~~ とすると t を diagonal にする repr. に於ては

$$FL - LF = i\hbar \frac{dF}{dt} \qquad (4)$$

となると假定する

この式が~~成立するとき~~は F = t とおけば (3_2) となる。

F = p or q ~~の場合に成立するためには~~ とおけば、(3_6)及び(3_4)により

$$\left.\begin{aligned} i\hbar \frac{dp}{dt} &= pH - Hp \\ i\hbar \frac{dq}{dt} &= qH - Hq \end{aligned}\right\} \qquad (5).$$

となる。かくして一般の函数 F に對して

$$i\hbar \frac{dF}{dt} = i\hbar \frac{\partial F}{\partial t} + FH - HF \qquad (6)$$

が成立する。これら運動の方程式に他ならぬ。

であるから、(3)式は、p, q が ~~t, R,~~ time を parameter に含み、各瞬間に於て ~~$pq - qp = i\hbar$~~ $qp - pq = i\hbar$ を満足し、しかも ~~time を par~~ p, q, t の任意函数 F の time

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..................

NO..................

rate of change は (6) であたへられるといふことによつておきかへられる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........

NO..........

§ Symbolical Method in Q. M. of assembly of indefinite number of similar particles

similar particles よりなる system に於ては、kinematical及び dynamical law の外に particles の statistical property をあらはす wave function の symmetry character をつけ加へることが必要である。~~古典的なき symbolical method に於ては wave function は第二次的のものとして入って居るが、~~ 併し wave function 自身を non-commutative なるとすれば symmetry character は V. R の~~中~~としてあらはされることは既に Dirac, Jordan 等の研究によって明かである。

これ等の関係を最も普遍的に symbolically に表はすれば次の如くすればよい。先 time $t$, space ~~position~~ coord. $x\,y\,z$ 及び その can. conj. $W, p_x\, p_y\, p_z$ を introduce する。これ等は

$$
\text{(A)}\left\{
\begin{array}{lll}
tW - Wt = -i\hbar & t p_x - p_x t = 0 & tx - xt = 0 \\
x p_x - p_x x = i\hbar & x p_y - p_y x = 0 & Wx - xW = 0 \\
\text{etc} & W p_x - p_x W = 0 & \text{etc} \\
 & \text{etc} &
\end{array}
\right.
$$

なる V. R. を満足する。

更に non-commutative quantity $\psi, \psi^\dagger$ を introduce する。これは $t, x\,y\,z$ と commute する。即ち

$$
\text{(B)}\quad
\begin{array}{lll}
\psi t - t\psi = 0 & \psi x - x\psi = 0 & \text{etc.} \\
\psi^\dagger t - t\psi^\dagger = 0 & \psi^\dagger x - x\psi^\dagger = 0 & \text{etc}
\end{array}
$$

は満足されるが、$W, p_x, p_y, p_z$ の如きとは commute し

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

但し、$L^{\dagger}$ は 常に $L$ の conj. comp.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........

NO..........

ないで、それらのある函数 $L(W, p_x p_y p_z, t, x y z)$ と丈 commute する。即ち

(C) $L\psi - \psi L = 0$ $\qquad \psi^\dagger L^\dagger - L^\dagger \psi^\dagger = 0$

である。

$\psi, \psi^\dagger$ の間の V. R. としては

(D) $\psi\psi^\dagger \mp \psi^\dagger\psi = 1.$ $\qquad$ (+の場合には更に $\psi^2 = \psi^{\dagger 2} = 0$ )

を仮定する。

すると $\psi, \psi^\dagger$ は $x, y, z, t$ と commute するから、それらを parameter として含むと見なし得る。即ち $\psi(xyzt)$, $\psi^\dagger(xyzt)$ とかき得る。すると (D) は

(D') 
$$\psi(xyzt)\psi^\dagger(xyzt) \mp \psi^\dagger(xyzt)\psi(xyzt) = (xyzt|1|xyzt)$$
$$\psi^2(xyzt) = \psi^{\dagger 2}(xyzt) = 0.$$

となり、(C) は

(C') 
$$L\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}, t, x y z\right)\psi(xyzt) = 0.$$

尚 $L$ として一つの particle の場合の $L$ と同じ函数を

$$L = W - H(p_x p_y p_z, t, x, y, z)$$

をとれば (C') は quantized wave に対する wave equation となる。

しかもこの場合には V. R. (D') は通常の theory の場合の如き同時刻で、異なる点の field quantity の間の関係を含んで

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........

NO..........

はみない。
この相違は次の如く説明される。即ち、我々の論点では四次元空間の任意の closed surface 上の各点における field quantity に任意の値を与へ、之を Randbedingung にとりうるのではなし。従来の formulation では互ひに raumartig な点のみからなる surface 上における field quantity の値を任意にとり、之を Randbedingung としてとりうる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\begin{pmatrix} \psi_1 & & & \\ & \psi_1 & & \\ & & \psi_{-1} & \\ & & & \psi_{-1} \end{pmatrix}$$

$\alpha_x = \rho_1\sigma_1 \quad \alpha_y = \rho_1\sigma_2 \quad \alpha_z = \rho_1\sigma_3 \quad \alpha_t = i\rho_2$

$\cancel{\alpha_1 = \overset{\rho_1}{\rho_2}\sigma_1 \quad \alpha_2 = \overset{\rho_1}{\rho_2}\sigma_2 \quad \alpha_3 = \overset{\rho_1}{\rho_2}\sigma_3 \quad \alpha_4 = \overset{=\rho_2}{\rho_4}}$

$\alpha_x = i\rho_2\rho_1\sigma_1 = +\rho_3\sigma_1$ etc $\quad \alpha_t = i\rho_{3}{}_2$

$\alpha_x\alpha_y = i\sigma_3 \qquad \alpha_x\alpha_y\alpha_z\alpha_t = i\sigma_3 \cdot -\rho_3\sigma_3$

$\left.\begin{array}{l} \alpha_x\alpha_z = i\sigma_2 \\ \alpha_x\alpha_t = -\rho_3\sigma_1 \end{array}\right\}$ etc $\qquad = -i\rho_3.$

$\psi\alpha_x + \alpha_x\psi = 0$ :

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} & & -i & \\ & & & -i \\ i & & & \\ & i & & \end{pmatrix} \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i & & \\ i & & & \\ & & & -i \\ & & i & \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_3\sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1 \\ & & -1 & \end{pmatrix} \quad \rho_3\sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i & & \\ i & & & \\ & & & i \\ & & -i & \end{pmatrix} \quad \rho_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\psi\,\cancel{\alpha_x + \alpha_x}\,\psi = \qquad \psi_1 = \psi_2\,;\ \psi_3 = \psi_4$

$$\begin{pmatrix} \psi_1 & & & \\ & \psi_2 & & \\ & & \psi_3 & \\ & & & \psi_4 \end{pmatrix} \alpha_x = \begin{pmatrix} & & & \psi_1 \\ & & \psi_2 & \\ & \psi_3 & & \\ \psi_4 & & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} & & & i\psi_1 \\ & & i\psi_2 & \\ & -i\psi_3 & & \\ -i\psi_4 & & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \alpha_z = \begin{pmatrix} & \psi_1 & & \\ & & -\psi_2 & \\ \psi_3 & & & \\ & -\psi_4 & & \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_x \begin{pmatrix} \psi_1 & & & \\ & \psi_2 & & \\ & & \psi_3 & \\ & & & \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \psi_4 \\ & & \psi_3 & \\ & \psi_2 & & \\ \psi_1 & & & \end{pmatrix} \quad \alpha_y \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & i\psi_4 \\ & & i\psi_3 & \\ & -i\psi_2 & & \\ -i\psi_1 & & & \end{pmatrix} \alpha_z \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_3 & \\ & -\psi_4 \end{pmatrix}$$

$\cancel{\psi_1 = -\psi_4 \quad \psi_2 = -\psi_3}.$ $\qquad \rho_3\psi(xyzt).$

$+\psi_1 = +\psi_2 = \psi_3 = -\psi_4.$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



§ Case of particles with spin

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ -1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix}$$

spin variable $\alpha_t\ \alpha_x\ \alpha_y\ \alpha_z$ を introduce する.

(1) $\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x = 0$ etc $\qquad \alpha_x^2 = 1$ etc $\qquad \alpha_t^2 = -1$.

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} & & & -i \\ & & i & \\ & -i & & \\ i & & & \end{pmatrix} \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ 1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix}$$

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} & & & i \\ & & i & \\ & -i & & \\ -i & & & \end{pmatrix} \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} & & i & \\ & & & -i \\ -i & & & \\ & i & & \end{pmatrix} \quad \alpha_t = \begin{pmatrix} i & & & \\ & i & & \\ & & -i & \\ & & & -i \end{pmatrix}$$

(2) $x' = x'(x\,y\,z\,t)$ etc とする一般の transf を考へる

(3) $p_x = \frac{\partial x'}{\partial x} p'_x + \frac{\partial y'}{\partial x} p'_y + \frac{\partial z'}{\partial x} p'_z + \frac{\partial t'}{\partial x} W'$

etc

この transformation を考へる.

$$-c(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z) + \alpha_t W_t \quad -imc$$

$$= \sum_{txyz} \left\{ -c\left(\alpha_x \frac{\partial x'}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial x'}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial x'}{\partial z}\right) - \alpha_t \frac{\partial x'}{\partial t} \right\} p'_x \quad -imc$$

(4) $\alpha'_x = \alpha_x \frac{\partial x'}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial x'}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{1}{c}\alpha_t \frac{\partial x'}{\partial t}$

Lorentz ~~transformation~~ でなければ (1) の Vertauschungsrel は invariant でない.

一般には

(5) $\alpha'_\mu \alpha'_\nu + \alpha'_\nu \alpha'_\mu = 2 g'_{\mu\nu}$

となる. 但し $ds^2 = \sum g'_{\mu\nu}\, dx'_\mu dx'_\nu$ $\qquad$ ~~$x_1 = x$, $x_2 = y$~~, $x_3 = z$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(1) $e\psi$

$e,$ $L\psi \pm \psi L = 0.$

$L(\psi^\dagger\psi \pm \psi\psi^\dagger) = (\psi^\dagger\psi \pm \psi\psi^\dagger)L$

$= (L\psi^\dagger \pm \psi^\dagger L)\psi \mp \psi^\dagger(L\psi \pm \psi L)$

$\pm\{(L\psi \pm \psi L)\psi^\dagger \mp \psi(L\psi^\dagger \pm \psi^\dagger L)\}$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE.

NO.

~~(5)式~~ $\psi, \psi^\dagger$ は $xyzt$ 従ってその $\alpha_\mu$ 等 と commute するから、(5) の仮定は $\psi, \psi^\dagger$ と commute する事。

$$\therefore \quad \psi(\alpha_\mu'\alpha_\nu' + \alpha_\nu'\alpha_\mu') \mp (\alpha_\mu'\alpha_\nu' + \alpha_\nu'\alpha_\mu')\psi = 0 \quad \text{etc}$$

でなければならぬ。
之が成立する為めには

(6) $\psi\alpha_\mu' \cancel{\pm \alpha_\mu'\psi} = 0$ etc

ならばよい。

~~後の場合が重要である。~~ 先 ~~$\psi\alpha_\mu' + \alpha_\mu'\psi = 0$ の方の場合を考へる。~~ に限れば之 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \alpha_t$, $\alpha_x\alpha_y$ etc $\alpha_x\alpha_y\alpha_z$ etc $\alpha_x\alpha_y\alpha_z\alpha_t$ が $\psi, \psi^\dagger$ と commute し、且 之等の中其の互に commute するものは $\alpha_x\alpha_y$ etc 及び $\alpha_x\alpha_y\alpha_z\alpha_t$ で、(而も $\alpha_x\alpha_y\alpha_z\alpha_t$ は凡ての $\alpha_x\alpha_y$ etc と commute する) $\psi, \psi^\dagger$ は $\alpha_x\alpha_y\alpha_z\alpha_t = -i\rho_3$ 及び $\alpha_x\alpha_y = i\sigma_3$ or $\rho_3, \sigma_3$ を parameter としてあらはせばよい。

$$\psi(xyzt, \rho_3, \sigma_3), \quad \psi^\dagger(xyzt, \rho_3\ \sigma_3)$$

すると ~~wave~~ field equation は、

(7) $L\psi \pm \psi L = 0 \qquad L^\dagger\psi^\dagger \pm \psi^\dagger L^\dagger = 0$.

~~従って~~ 但し

(8) $L = \sum_\mu \alpha_\mu\left(p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu\right) + imc$

$\frac{e}{c}A_\mu$ $\alpha_\mu$

+の場合には $imc$ の項はのこるが、一の場合には $imc$ の項は field eq. に入ってこない。(但し $e$, $m$ は $\psi$ と commute すると(して))

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

matter の場合には、 $\psi^\dagger \psi$ : Wahrs. dichte

radiation 〃 ~~$\psi^\dagger \psi$~~ : energie dichte

$$(\mathbb{E} - i \mathbb{H}) \cdot (\mathbb{E} + i \mathbb{H})$$

$$= (\mathbb{E} - i \mathbb{H}) \boxed{\phantom{x}} ( \quad \cdot \quad )$$

$$\cancel{(L \psi \pm \psi L)} (\psi^\dagger \psi \pm \psi \psi^\dagger) - (\psi^\dagger \psi \pm \psi \psi^\dagger) \cancel{L \psi}$$

$$=$$

$$\cancel{\psi^\dagger \alpha_x p_x \psi \cdot \psi}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..................

NO..................

$\psi$の時には $imc$ の項のこり、$\frac{e}{c}A_\mu$ の項はなくなる。(但し $m, e$ は $\psi$ と commute するとして)

$e$ が $\psi$ と anticommute するとすれば $\psi$ の時 ~~[illegible]~~. $\frac{e}{c}\alpha_\mu A_\mu$ の項がのこる。~~しかるに $e$~~ $e, m$ 共に $\psi$ と anticommute すると 今度は $imc$ の分がなくなる。

($e$ のかはりに $A_\mu$ 自身が $\psi$ と commute or anticommute すると考へても同じこと)

以上を一般化して、

$$L\psi \pm \psi L = \rho. \qquad L^\dagger\psi^\dagger \pm \psi^\dagger L^\dagger = \rho^\dagger.$$

とおく。$\rho, \rho^\dagger$ が $\psi, \psi^\dagger$ と commute するなら、この式は ~~[illegible]~~ $\psi^\dagger\psi \pm \psi\psi^\dagger = 1$ etc に矛盾しない。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$( i\rho_1 \quad \rho_2 \quad i\rho_3 ) \psi = 0$$

$$L\rho_1$$

$$L\psi = 0. \qquad \psi i\rho_2 L i\rho_2 \qquad \rho_3 \qquad \rho_1$$

$$L^\dagger \psi^\dagger = 0. \qquad i\rho_2 \quad i\rho_2 \quad \rho_1 \quad -\rho_1 i$$

$$\psi(x, y, z, t) \qquad (1 \quad -\rho_3 \quad -\rho_2)$$

理論の基礎は Lagrange 式にある. $\quad i\rho_2 (1 \quad -\rho_3 \quad -\rho_2) \leftarrow i\rho_1$

$$\delta(\psi^\dagger L \psi) = 0. \qquad (\rho_3, \quad \rho_2, \quad \rho_1)$$

$$\psi^\dagger \alpha_t = \overline{\Psi} \qquad \cancel{\overline{\Psi}^\dagger \alpha_t}$$

$$\overline{\Psi}\alpha_t \psi + \psi \overline{\Psi} \alpha_t = \overline{\Psi}\alpha_t \psi + \psi \cdot \alpha_t \overline{\Psi} = \alpha_t \overline{\Psi}.$$

$$\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ -1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix} (\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4) = (\psi_3 \ \psi_4 \ -\psi_1 \ -\psi_2)$$

$$(\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4) \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ -1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix} = (-\psi_3 \ -\psi_4 \ \psi_1 \ \psi_2)$$

$$\overline{\Psi}_i \psi_j + \psi_j \overline{\Psi}_i = \delta_{ij}$$

$$\cancel{\overline{\Psi}_j \overline{\Psi}_i \quad \overline{\Psi}_i \alpha^{(t)}_{jk}}$$

$$\psi_k^\dagger \alpha^{(t)}_{ki} \cdot \psi_j + \psi_j \cdot \psi_k^\dagger \alpha^{(t)}_{ki} = \delta_{ij}$$

$$\psi_1$$

$$\psi(1, 2, 3, 4) \ \cancel{\alpha(1, 2, 3, 4)}.$$

$$(\ \ )^{\alpha(\cdots\cdots)} \qquad \underline{\overline{\Psi}\rho_2} \cdot \underline{\rho_1 \psi} - \underline{\rho_1 \psi} \cdot \underline{\overline{\Psi}\rho_2} = \delta.$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........................

NO..........................

§ Particles with spin or ~~wave~~ polarized wave

particle が spin を有する場合、又は wave が polarization を有する場合には問題は難しくなる。で之に従って $\psi$ は矢張り一種の wave 函数と考へ、

$x\ y\ z\ t$, $p_x$ etc, $\sigma_x$ etc 並に $\psi$ 若しくは又函. ~~等~~ 函数 $\psi$ に対する operator としてあらはす。~~Operatorの種類~~ non-commutative なるを $i$ あるとし、それに対する conj. 函数 $\psi^\dagger$ との間に適当な V.-R. を ~~考~~ assume する。次に $\psi, \psi^\dagger$ を更にある函数に対する operator と考へる。

之が量子化のやり方。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..............
NO..............

# General Method

物理的な~~A坤~~量を non-commutative quantity $(\alpha\beta\gamma..)$ とする。此等の間に幾つかの関係が存在してゐるとする。之を例へば

$$\cancel{A=B}\ A(\alpha\beta\gamma\cdots) = B(\alpha\beta\gamma\cdots) = \cdots = 0$$

等とする。すると当然 $AB = BA = \cdots = 0$ 等が成立せねばならぬ。~~A, B 等が同じ~~（$A=0$, $B=0$ 等は矛盾しないものでなければならぬ.）故に若し $AB-BA \equiv d + aA + bB + \cdots$ の形にかけないなら, $AB-BA=0$ は新しい條件になる。そこで $AB-BA \equiv C$ …… とし. $A = B = \cdots = C = \cdots = 0$ から更に $AC-CA$ etc を作つても之等が凡て $d + aA + bB + \cdots + cC + \cdots$ なる形にかけるならば, $A = B = \cdots = C = \cdots = 0$ を complete system of equations と称することにする。

~~ABC~~…

一般に $A.B.C$ … なる量（独立な）に對し

$$AB-BA = d + aA + bB + cC + \cdots$$

等が成立すれば. $A, B, C$ … を complete set of ~~dyn~~ physical quantity と称する.

例へば $p, q$ は complete set である.

$$\because\quad pq - qp = -i\hbar$$

又 $m_x = [r\,p]_x$　$m_y = [r\,p]_y$　$m_z = [r\,p]_z$ は之等で complete set

$$\because\quad [m_x\, m] = i\hbar\, m$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$A\psi = B\psi = 0$$
$$AB\psi = BA\psi = 0$$

$$\frac{1}{|r|}\ \boxed{\psi^\dagger\psi}$$

$$\psi^\dagger\psi(r, t^2) =$$

$$\mathrm{grad}\left|\frac{1}{|r|}\{\delta(|r|+ct)-\delta(|r|-ct)\}\right|$$

$$= \frac{-r}{|r|^3}\{\delta(|r|+ct)-\delta(|r|-ct)\}$$

$$-\frac{1}{r}\{\delta'(r+ct)-\delta'(r-ct)\}\cdot\frac{r}{r}$$

$$= \cancel{\frac{1}{r}} - \frac{r}{r^3}\{(\delta + r\delta') -$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\delta'(|r|+ct)+\delta'(|r|-ct)}{|r|}$$

$$\int\delta(x)\,dx = 1 \qquad \left(= 2\int\frac{\delta'(r)}{r}\, r^2\, dr\, d\theta\, d\varphi \right. \sin\theta$$

$$\int x\,\delta'(x)\,dx = -1 \qquad = -8\pi.$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



$$\left.\begin{array}{l} L_1 \Psi = 0 \\ L_2 \Psi = 0 \\ \cdots\cdots \\ L_n \Psi = 0 \end{array}\right\} (\mathrm{I}) \qquad P_{ij}\Psi = -\Psi \qquad i, j = 1, 2, \cdots \ell \ (\mathrm{II})$$

$$\left.\begin{array}{l} D\psi \ \Phi = 0 \\ \psi^\dagger D \ \Phi = 0 \end{array}\right\} (1) \qquad F_\mu(\psi^\dagger, \psi)\Phi = 0 \qquad \mu = 1, 2, \cdots \nu \ (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Psi(x_1 y_1 z_1 t_1 \rho_1, x_2 y_2 z_2 t_2 \rho_2, \cdots x_\ell y_\ell z_\ell t_\ell \rho_\ell) \\ = \sum_{n_1 n_2 \cdots} (x_1 y_1 z_1 t_1 \rho_1 \cdots x_\ell y_\ell z_\ell t_\ell \rho_\ell / n_1 n_2 \cdots)(n_1 n_2 \cdots /) \end{array}\right\} (3)$$

$$(4) \left\{\begin{array}{l} L_1 = L_{10} + L_1' \\ L_2 = L_{20} + L_2' \\ \cdots\cdots \\ L_\ell = L_{\ell 0} + L_\ell' \end{array}\right.$$

$$L_{10} u_\alpha(x_1 y_1 z_1 t_1 \rho_1) = \lambda_\alpha u_\alpha(x_1 y_1 z_1 t_1 \rho_1) \qquad (5)$$

$$u_\alpha(x_1 y_1 z_1 t_1 \rho_1) = u_\alpha(1)$$

$$\Psi = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} u_{\alpha_1}(1) u_{\alpha_2}(2) \cdots u_{\alpha_\ell}(\ell) \cdot C(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\ell) \qquad (6)$$

$$L_1 \Psi = \sum_{\alpha_1 \beta_1 \cdots \alpha_n} (\lambda_{\alpha_1} \delta_{\alpha_1 \beta_1} + L'_{\alpha_1 \beta_1}) u_{\beta_1}(1) u_{\alpha_2}(2) \cdots u_{\alpha_\ell}(\ell) \times C(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\ell) \qquad (7)$$

$$\tilde{u}_\beta(1) L_1' u_\alpha(1) = L'_{\alpha\beta} \qquad (8)$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..................

NO..................

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§

non-relativistic quantum mechanics に於いては、kinematic and dynamical laws は V.R. 及び Bew.Gl. によって与へられる。

即ち dynamical variables は time $t$ を parameter とする non-commutative quantity ~~として表へられ~~ であって、~~p(t)~~ 互に canonical conjugate な variables $p(t), q(t)$ は ~~の間には~~

(1) $$q(t)p(t) - p(t)q(t) = i\hbar$$

なる V.R. を満足せねばならぬ。~~B.G は 任意の dyn. variable~~ p, q, t の任意函数 $f(p,q)$ の change の time rate は

(2) $$i\hbar\frac{df}{dt} = \cancel{Hf - fH}\; fH - Hf + i\hbar\frac{\partial f}{\partial t}.$$

なる B.G によって決定される。但し $H$ は $p, q$ 及び $t$ の函数で、classical dyn に於ける Hamilton 函数に相当するものである。

この様に non-rel. quantum mechanics の根本法則は V.R. 及び B.G なる二つの別々の要素から構成されてゐるが、之は次の如き考察によって、もっと一般化された V.R. より導き出すことが出来る。

即ち、classical dynamics に於ける canonical variable に対応して non-commutative quantity $q, p$ に、time 及びその conjugate な variable に対応して、non-commutative quantity $t, W$ を考へる。その間には (1) の natural extension として、

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO.

$$\left.\begin{aligned}
&qp - pq = i\hbar \\
&tW - Wt = -i\hbar \\
&qW - Wq = 0 \\
&tp - pt = 0 \\
&qt - tq = 0 \\
&\cancel{tp - pt} \\
&pW - Wp = 0
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

なる V. R. が存在するとする。

更に W の代りに $L = H(p, q, t) - W$ (B)

なる量を introduce すると、(A) ~~の代りに~~ は

$$\left.\begin{aligned}
&qp - pq = i\hbar \\
&tL - Lt = +i\hbar + \overset{0}{(tH - Ht)} \\
&qL - Lq = qH - Hq \\
&tp - pt = 0 \\
&qt - tq = 0 \\
&pL - Lp = pH - Hp
\end{aligned}\right\} \quad (\cancel{B})(C)$$

となる。但し、H は classical な Hamiltonian に相当するものと考へる。すると (~~B~~) の第四 第五の式からして、~~p, q を~~ t を diagonal にする様な representation に於ては p, q の matrix element で 0 でないのは t に関して diagonal なもののみである。∴ p, q は t を parameter として含むと ~~考へられる~~ 見なしてよい。

~~之を~~ 次に第二の式から $L = i\hbar\frac{d}{dt} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\frac{dp}{dt}\frac{\partial}{\partial p} + i\hbar\frac{dq}{dt}\frac{\partial}{\partial q}$ (D)

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



としてはいけないから。従って、第三及び第六の式は夫々

$$-i\hbar\frac{dq(t)}{dt} = Hq(t) - q(t)H,$$

$$-i\hbar\frac{dp(t)}{dt} = Hp(t) - p(t)H$$

となり、~~従って、p,qの任意函数~~ 又第一の式は

$$q(t)p(t) - p(t)q(t) = i\hbar$$

~~之等~~となる。従って p,q の任意函数に対し

$$-i\hbar\frac{df}{dt} = Hf(t) - f(t)H \pm i\hbar\frac{\partial f}{\partial t}$$

が成立する。之等は夫々 V.R.(1) 及び B.G.(2) に他ならぬ。であるから ~~Lなる~~ time derivative を表はす operator L ~~いいかへれば~~ が p.q.t,W の函数として定義され~~ることによつて~~ dynamical system の dynamical な property が characterize されることになる。

dynamical law として与へられるのは (A) なる V.R. のみであつて、(A)の ~~式から~~ 第四、第五 ~~第六式~~ からして、p.q は time を parameter にふくむ ~~$W+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ と等しくなるから~~、即ち time の函数と考へるべきである。そこで time を単なる number と考へてしまへば ~~$t(W+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}) - (W+i\hbar\frac{\partial}{\partial t})t =$~~ 第二式から

$$t\left(W \mp i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right) - \left(W \mp i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)t = 0$$

又第四、第六式から

$$q\left(W \mp i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right) - (\quad '' \quad)q = 0$$

$$p(\quad '' \quad) - (\quad '' \quad)p = 0$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..................
NO..................

従って $W$ 及 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ は凡ての量と commute する。∴ 或る number と見なしうる。之を 0 とおけば、

$$W = + i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad (E)$$

となり 従って (B) 及び (C) から

$$H = i\hbar\frac{dp}{dt}\frac{\partial}{\partial p} \quad 及 \; i\hbar\frac{dq}{dt}\frac{\partial}{\partial q} \qquad (F)$$

となる。

—

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\bar{H} = \iiint \psi^\dagger(xyzt)\, H\left(xyzt,\ i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right) \psi(xyzt)\, dv.$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE ..........
NO. ..........

§

以上は particle の system に対する kinematic and dynamical laws であるが、similar particles の indefinite number から成る system に対する kinematic and dynamical laws は次の如き形で与へられる。

$x, y, z$ 及び $t$ を parameter として含む non-commutative quantity $\psi_{(xyzt)}$, $\psi^{\dagger}_{(xyzt)}$ を考へ、その間に

(1). $\psi(x'y'z't')\psi^{\dagger}(x''y''z''t') \mp \psi^{\dagger}(x''y''z''t')\psi(x'y'z't') = \delta(r'r'')$

なる V. R. が成立するとする。但し $\mp$ symbol は夫々 particle が ~~sym.~~ Bose or Fermi statistics に従ふことに対応してゐる。

而して $\psi^{\dagger}\psi(x'y'z't')$ ~~を以って~~ は time $t'$ に於て $x'y'z'$ に存在する particle の number を意味する。

$\psi, \psi^{\dagger}$ に対する Bew. Gl は

$$(2)\begin{cases} -i\hbar\dfrac{d\psi}{dt} = \bar{H}\psi - \psi\bar{H} \\ i\hbar\dfrac{d\psi^{\dagger}}{dt} = \bar{H}\psi^{\dagger} - \psi^{\dagger}\bar{H} \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} +i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi. \\ -i\hbar\dfrac{\partial\psi^{\dagger}}{\partial t} = \psi^{\dagger}H. \end{cases}$$

なる式によりおかれる。但し $\bar{H}$ は $\psi, \psi^{\dagger}$ 及びその derivative の或る bilinear form の space-time $\int$ で、~~time~~ time を explicit に含まぬ時には其の eigenvalue は system の energy をあらはす。(external field が存在すれば それが factor として入ってくる)

~~to non~~ $\psi$,

之を前節の様に symbolically に表はすれば次の如くすればよい。先づ time $t$ ~~and~~ space coord. $x\,y\,z$ 及びその can. conj. $W, p_x\,p_y\,p_z$ を introduce する。之れ之等は

(A) $tW - Wt = i\hbar$, $xp_x - p_x x = i\hbar$ $tp_x - p_x t = 0$ $tx - xt = 0$
$Wp_x - p_x W = 0$ $Wx - xW = 0$.
etc

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE..........

NO..........

なる Vertauschungsrelation を満足せねばならぬ。

之れ, non-commutative quantity $\psi, \psi^\dagger$ を introduce する. 之等は t 及び x y z と commute するとする。即ち

(B) $\psi t - t\psi = 0 \qquad \psi x - x\psi = 0$ etc

$\psi^\dagger t - t\psi^\dagger = 0 \qquad \psi^\dagger x - x\psi^\dagger = 0$ etc

は満足されるが, L の如き W, $p_x, p_y, p_z$ の函数とは commute しないで, それらのある函数と丈 commute する, 即ち

(C) $L\psi - \psi L = 0 \qquad \psi^\dagger L^\dagger - L^\dagger\psi^\dagger = 0.$

である。

$\psi, \psi^\dagger$ の間の Vertauschungsrel としては

(D) $\psi\psi^\dagger \mp \psi^\dagger\psi = 1$ (十負の場合には更に $\psi^2 = \psi^{\dagger 2} = 0$ を仮定する)

を仮定する。

かかる non-commutative quantity の scheme は上の kinematical and dynamical laws と少しの点を除いて equivalent である。

∵ $\psi, \psi^\dagger$ は x y z t と commute するから, それらを parameter として含むとみなしうる。即ち $\psi(xyzt)$, $\psi^\dagger(xyzt)$ とかきうる。

しかると, $W = +i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ $p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ etc となり. 従って

$L = H(p_x\, p_y\, p_z, x\, y\, z\, t) \mp W$ とすれば,

(3) $+i\hbar\frac{\partial\psi(xyzt)}{\partial t} = H(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}, x, y, z\, t)\,\psi(xyzt)$

$-i\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t} = H(i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, i\hbar\frac{\partial}{\partial z}, x\, y\, z\, t)\,\psi^\dagger(xyzt)$

となる。之は Schrödinger の wave equation と同形で, (2)の式は必要ない。之は $\psi, \psi^\dagger$ が non-commutative quantity であることが異なる丈.

この場合 V.R. は $\psi(xyzt)\psi^\dagger(xyzt) \mp \psi^\dagger(xyzt)\psi(xyzt)$

(D)' $= (xyzt|1|xyzt)$

+の場合には更に $\psi^2(xyzt) = \psi^{\dagger 2}(xyzt) = 0$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\sum_{mn}(a_n a_m^\dagger \mp a_m^\dagger a_n)\,\delta_{mn} = \nabla$$

$$t\psi_n - \psi_n t = 0 \qquad t a_n - a_n t = 0$$

$$W\psi_n - \psi_n W = 0 \qquad W a_n - a_n W \neq 0.$$

$$\psi = \sum_n a_n \psi_n \cancel{(xyzt)} \qquad \psi^\dagger = \sum_n a_n^\dagger \psi_n^\dagger a_n^\dagger$$

$$\cancel{\psi_m^\dagger \psi_n = \delta_{mn} \sum a_n \psi_n} \qquad \psi_n \psi_m^\dagger = \psi_m^\dagger \psi_n$$

$$\underline{\psi^\dagger \psi^\dagger \mp \psi^\dagger \psi^\dagger = \sum_{m,n}(a_n a_m^\dagger \mp a_m^\dagger a_n)\,\psi_m^\dagger \psi_n} = \delta\, 1.$$

$$\psi^\dagger(xyzt)\psi^\dagger(x'y'z't) \mp \psi^\dagger(x'y'z't)\psi^\dagger(xyzt)$$

$$= \sum_{mn}(a_m^\dagger(t) a_n^\dagger(t) \mp a_n^\dagger(t) a_m(t))\,\tilde{\psi}_m(xyz)\psi_n(x'y'z')$$

$$\psi_m(xyz) = \cancel{\psi_m(xyz)}(xyzt|\delta|x'y'z't)$$

$$\{a_m^\dagger(t) a_n(t)^\dagger \mp a_n^\dagger(t) a_m(t)\}\,\psi_n(x'y'z') = \psi_m(x'y'z')$$

$$= \delta_{mn}$$

$$(x't|\psi^\dagger e^{\frac{i}{\hbar}p_x c_x}\psi|x''t) = \psi^\dagger(x',t)\cdot\psi(x'',t) = 0$$

$$\pm\psi(x'',t)\psi^\dagger(x',t)$$

$$|x'''t)\cdot(x'''t|$$

$$\pm\psi\, e^{\frac{i}{\hbar}p_x c_x}\psi^\dagger$$

$$|x^{IV}t)\cdot(x^{IV}t|$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE
NO.

この様な formulation の最後の form との差は、我々の場合には空間の任意の closed surface 上の点の field quantity に任意の値を与へうる ~~点~~ 之を Randbedingungen とするのに対し、従来の formulation では、~~space~~ Raumartig な点 ~~のみ~~ からなる surface 上における field quantity を与へることにより他の点の field quantity の値は定まつてくる。

四次元

となり、異なる position の間の V.R. が含まれてゐない点が、従来の quantization の方法と異なる。之を補ふには新に条件をおいて

$$(4)\quad \psi(xyzt)\,\psi^\dagger(x'y'z't) \mp \psi^\dagger(x'y'z't)\,\psi(xyzt) = (xyzt|1|x'y'z't)$$

~~とおけば~~、通常の quantization の方法と全く一致する。

であるから上の commutative quantities の間の scheme は、system の状態を(従来の quantum mechanics に於ると同程度に)完全に describe するには不充分である。

ない一つの例は

$$(4)\quad \psi(xyzt)\,\psi(x'y'z't) - \psi(x'y'z't)\,\psi(xyzt) = 0 \text{ etc}$$

$$+ \quad ,, \quad \psi(xyzt)\,\psi(x'y'z't) + \psi(x'y'z't)\,\psi(xyzt) = 0 \text{ etc}$$

とすれば、

この様に上の scheme に於ては異なる位置の間の V.R. がわからぬが、これ(4)に於ける部分を補はねばならぬ。之れは之の範囲では ~~relati~~ scheme の structure から見て rel. invariant なことは明かである。~~それで~~ 之からつけ加へる restriction は rel. invariant であるはならないかも知れぬ。故に (4) なる式は rel. inv. であるかどうかこの式丈からはわからぬ。

(D') の式を $x$ について微分すると

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\psi^\dagger + \psi\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x} \mp \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x}\psi \mp \psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,$$

$$\text{or } \lim_{x'\to x}\frac{1}{x'-x}\{\psi(x')\psi^\dagger(x) + \psi(x)\psi^\dagger(x') \mp \psi^\dagger(x')\psi(x) \mp \psi^\dagger(x)\psi(x')\}$$

$$-\lim_{x'\to x}\frac{1}{x'-x}\{\psi(x)\psi^\dagger(x) + \psi(x)\psi^\dagger(x) \mp \psi^\dagger(x)\psi(x) \mp \psi^\dagger(x)\psi(x)\}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\psi^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}(dx\, p_x + dy\, p_y + dz\, p_z + dt\, p_t)}$$

for $\sum g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0.$

$$(1+s)\,\psi^\dagger\,(1-s) = \psi^\dagger + (s\psi^\dagger - \psi^\dagger s)$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}\delta_x p_x}\,\psi^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}\delta_x p_x} \cdot x = e\,\psi^\dagger (x - \delta_x)\, e = x\, e\,\psi^\dagger e$$

$\psi^\dagger\psi \mp \psi\psi^\dagger$
$+ (s\psi^\dagger - \psi^\dagger s)\psi$
$\mp \psi(s\psi^\dagger - \psi^\dagger s) = 1$

Extra condition

$$(xyz)\; e^{\frac{i}{\hbar}\ldots}\,\psi^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}(\delta_x p_x + \delta_y p_y + \delta_z p_z)}\,\psi(x'y'z') = \;^{xyz}\,|^{x}$$

$$\psi\psi^\dagger \mp \psi^\dagger\psi = 1$$

$$\left(S^{\frac{1}{2}}\psi S^{\frac{1}{2}}\right)\left(S^{\frac{1}{2}}\psi^\dagger S^{-\frac{1}{2}}\right) \mp \left(S^{\frac{1}{2}}\psi^\dagger S^{\frac{1}{2}}\right)\left(S^{-\frac{1}{2}}\psi S^{\frac{1}{2}}\right) = 1$$

$$\psi S \psi^\dagger S^{-1} \mp S\psi^\dagger S^{-1}\psi = 1 \qquad = 1$$

$$~~S\psi^\dagger S^{-1}\psi =~~$$

$$\psi S\,\psi^\dagger \tilde{S} \mp S\psi^\dagger \tilde{S}\psi = 1.$$

a matrix の
尺てdiagonal sum は coord. transfn に対して invariant である。

~~$\psi^\dagger\psi$ … a priori pro~~

$$\Psi^\dagger\Psi\,(x, y, z, t, N(xyzt)) = 0.$$

a priori relative prob.

Property.

$\psi^\dagger\psi$

diagonal sum:

$$\psi^\dagger\psi = \sum_{m,n}\sum a_m^\dagger a_n \psi_m \psi_n$$

$$\psi^\dagger\psi(xyzt) = \sum\sum a_m^\dagger(t)\, a_n(t)\, \psi_m(xyz)\,\psi_n(xyz)$$

$$\text{Spur}\,\psi^\dagger\psi = \sum_{m,n}\int_{t=-\infty}^{\infty} a_m^\dagger(t)\, a_n(t)\, \delta_{mn}\, dt = \sum_m \int a_m^\dagger(t)\, a_m(t)\, dt$$

$$\psi^\dagger e\,\psi e \mp e\psi e\,\psi^\dagger = 1$$