Yukawa Hall Archival Library
Research Institute for Fundamental Physics
Kyoto University, Kyoto 606, Japan
F03060
©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

Opp.
H. B.
Weiz.
Nishina

collis. theory of conv.
一本 shower

DATE

NO. 1

Über die Wahrscheinlichkeiten von Dreifachprozessen in der Strahlungstheorie

$\gamma \rightarrow \leftarrow \gamma$, ne, p

§1. Dreifachprozesse.

現在の量子論が原子核の中に於けると同じく，又 hohe Energie の問題に対しても versagen する事は一般によく知られて居る. 宇宙線に於ける Schauer の現象も その説明を現在の理論の中に見出そうとする試みは無駄なものであるかも知れない. 併し Strahlungstheorie に於て hohe Ordnung としてあらわれる現象を一應詳しく検討して見る事は Schauererscheinung と独立にも亦興味ある事であらうと思はれる.

先づ dritte Ordnung として起り得る現象を考へると 其の中 実際に興味のあるものは. 次の如きものであらう；—

(I) Dreifachprozesse im freien Raum.

(a) Doppel-Comptoneffekt,

(b) Lichtstreuung am Photon,

(c) Spontane Entzweiung eines Photons.

(II) Dreifachprozesse im Kernfeld.

(d) Doppel-Bremsstrahlung,

(e) Inkohärente Lichtstreuung am Kern,

(f) Kohärente Lichtstreuung am Kern.

此等の中 (a) 及 (d) は Heitler-Nordheim が Abschätzung を行ってゐる. (f) は朝永氏の計算の結果 未だ 此 Ordnung では あらわれない事が分って居る. (c) も ~~X~~ 吾々の計算の結果 矢張 この Ordnung では 起り得ないと云ふ事が分った

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

此處では(b)及(e)のProzeß に對して、Heitler-Nordheim が(a)及(d)に對して行なったと同じ程度の Abschätzung をやって見た。其等の結果を先に纏めておくと次の通りである。

Prozeß	Wahrscheinlichkeit (Wirkungsquerschnitt)	
(a)	$\frac{1}{137}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \frac{mc^2}{h\nu}$	(Heitler-Nordheim)
(b)	$\frac{1}{137}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \frac{mc^2}{h\nu}$	
(c)	0	
(d)	$\frac{Z^2}{137^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \log\frac{h\nu}{mc^2}$	(Heitler-Nordheim)
(e)	$\frac{Z_1^2}{137^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \log\frac{h\nu}{mc^2}$	
(f)	0	(Tomonaga)

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§2. Paarerzeugung durch zwei Photonen.

Heitler-Nordheim が (a) に對して行つたと同じ程度の Abschätzung を (b) に對して行ふ前に 大体の様子を調べる目的から 二つの Photon の衝突による Paarerzeugung の現象を abschätzen して見た. 此の現象の嚴密な計算は既に Breit-Wheeler が行つて居るから 吾々の Abschätzung の結果を彼等の結果と比較する事によつて 吾々の行ふつた Abschätzung の適否を判断する事が出来るであらう.

今 $h\nu_1 = k_1$, 及 $h\nu_2 = \mu (= mc^2)$ なる二つの Photon (1及2と名付く) が head-on-collision をして Paar を造る場合を考へる. Energiesatz 及 Impulssatz は

$$\begin{aligned} k_1 + \mu &= E + E_+ \\ (k_1 - \mu)\vec{n}_1 &= \vec{P} + \vec{P}_+ \end{aligned} \qquad (1)$$

$E, E_+, \vec{P}, \vec{P}_+$ は Elektron 及 Positron の Energie 及 Impuls であり, $\vec{n}_1$ は 1 なる Photon の方向の Einheitvektor である. Impuls はすべて Energie の単位で測られて居る (普通の単位の c 倍)

Differentielle Wirkungsquerschnitt は次の式で与へられる:

$$d\Phi = \frac{2\pi}{\hbar c} \frac{P E d\Omega}{(2\pi\hbar c)^3} \sum \left| \frac{H_{EI} H_{IA}}{E_I - E_A} + \frac{H_{EII} H_{IA}}{E_{II} - E_A} \right|^2 \qquad (2)$$

$d\Omega$ は Elektron の Raumwinkelelement, H_{EI} usw. は Matrixelement で たとえば $H_{EII} = \frac{e\hbar c\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k_1}} (u_E \vec{\alpha}\vec{e}_1 u_2)$ usw. で与えられる. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ は 1 及 2 なる Photon の Polarisation の方向の Einheitvektor, α は Dirac の Operator, u は freie Elektron に對する Dirac の式の解の Amplitude である. E_I usw. は I なる

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

Zustand usw. に於ての Gesamtenergie である.
Σ を Casimir の方法により遂行すると

$$d\Phi = \left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2 \frac{\mu}{k_1} pE\,d\Omega \cdot Sp.(\Lambda_+ B^\dagger \Lambda B) \tag{3}$$

$\Lambda, \Lambda_+, B, B^\dagger$ 等は次の Operator である:

$$\Lambda = \frac{(\alpha\vec{p}) + \beta\mu + E}{2E}$$

$$\Lambda_+ = \frac{(\alpha\vec{p}_+) - \beta\mu + E_+}{2E_+}$$

$$B = \frac{(\alpha\vec{e}_2)K_1(\alpha\vec{e}_1)}{F_1} + \frac{(\alpha\vec{e}_1)K_2(\alpha\vec{e}_2)}{F_2} \tag{4}$$

$$\begin{cases} K_1 = \vec{\alpha}\cdot(\vec{p} + \mu\vec{n}_1) + \beta\mu + E - \mu \\ K_2 = -\vec{\alpha}\cdot(\vec{p}_+ + \mu\vec{n}_1) + \beta\mu - E_+ + \mu \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} F_1 = 2k_1E_+(1 - \beta_+\cos\theta_+) = 2\mu E(1 + \beta\cos\theta) \\ F_2 = 2k_1E(1 - \beta\cos\theta) = 2\mu E_+(1 + \beta\cos\theta) \end{cases} \tag{6}$$

$$\theta_+ = \widehat{\vec{p}_+\vec{n}_1}, \quad \theta = \widehat{\vec{p}\vec{n}_1}, \quad \beta_+ = \frac{p_+}{E_+}, \quad \beta = \frac{p}{E}$$

$B^\dagger$ は B の hermitische konjugierte Operator である。即ち

$$B^\dagger = \frac{(\alpha\vec{e}_1)K_1(\alpha\vec{e}_2)}{F_1} + \frac{(\alpha\vec{e}_2)K_2(\alpha\vec{e}_1)}{F_2} \tag{4'}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

Φ の Abschätzung をやるために (1) から次の関係を求めて置く.

$$E = \frac{2k_1}{(1+\beta\cos\theta)+(1-\beta\cos\theta)\frac{k_1}{\mu}} \tag{7}$$

$$E_+ = \frac{2k_1}{(1+\beta_+\cos\theta_+)+(1-\beta_+\cos\theta_+)\frac{k_1}{\mu}} \tag{8}$$

$$\frac{1-\beta\cos\theta}{1+\beta\cos\theta}\,\frac{1-\beta_+\cos\theta_+}{1+\beta_+\cos\theta_+} = \frac{\mu^2}{k_1^2} \tag{9}$$

I. $k_1 \sim \mu$ なる場合

(7), (8) より　$E, E_+ \sim k_1$

従て.　$\left.\begin{array}{l} K_1, K_2 \sim k_1 \\ F_1, F_2 \sim k_1\mu \end{array}\right\}$　$B \sim \frac{1}{\mu}$, $Sp(3) \sim \frac{1}{\mu^2}$

Winkelverteilung は grössenordnungsmässig に gleichförmig であるから

$$\Phi \sim \left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2$$

II. $k_1 \gtrsim \mu$ なる場合

(1) θ endlich なる場合

(7) から $E \sim \mu$,　(9) から $\theta_+ \sim \frac{\mu}{k_1}$,　(8) により $E_+ \sim k_1$

従て.　$\left.\begin{array}{l} K_1 \sim \mu, \quad K_2 \sim k_1, \\ F_1 \sim \mu^2, \quad F_2 \sim k_1\mu \end{array}\right\}$　$B \sim \frac{1}{\mu}$, $Sp(3) \sim \frac{1}{\mu^2}$

Winkelverteilung は grössenordnungsmäßig に gleichförmig であるから

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\Phi \sim \left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2 \frac{\mu}{k_1}$$

(ii) $\theta \sim \sqrt{\frac{\mu}{k_1}}$ なる場合

(7)から $E \sim k_1$, (9)から $\theta_+ \sim \sqrt{\frac{\mu}{k_1}}$, (8)により $E_+ \sim k_1$

従て.

$$\left.\begin{array}{ll} K_1 \sim k_1, & K_2 \sim k_1 \\ F_1 \sim k_1\mu, & F_2 \sim k_1\mu \end{array}\right\} \quad B \sim \frac{1}{\mu}, \quad Sp(3) \sim \frac{1}{\mu^2}$$

$$d\Omega \sim \frac{\mu}{k_1}$$

$$\Phi \sim \left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2$$

(iii) $\theta \sim \frac{\mu}{k_1}$ なる場合

(7)から $E \sim k_1$, (9)から $\theta_+ \sim$ endlich, (8)により $E_+ \sim \mu$

従て.

$$\left.\begin{array}{ll} K_1 \sim k_1, & K_2 \sim \mu \\ F_1 \sim k_1\mu, & F_2 \sim \mu^2 \end{array}\right\} \quad B \sim \frac{1}{\mu}, \quad Sp(3) \sim \frac{1}{\mu^2}$$

$$d\Omega \sim \frac{\mu^2}{k_1^2}$$

$$\Phi \sim \left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2 \frac{\mu}{k_1}$$

以上の考察によると(ii)の領域からのΦへの Beitrag は非常に大きい様であるが更に詳細に調べると却って此部分は contribution を持たない事が分る. 即ち(ii)の場合には

$$p = E + O\left(\frac{\mu^2}{k_1^2}\right), \quad p_+ = E_+ + O\left(\frac{\mu^2}{k_1^2}\right)$$

$$\vec{p} = p\{\cos\theta \cdot \vec{n}_1 + \sin\theta \cdot \vec{e}\} = E\left\{\vec{n}_1 + O\left(\sqrt{\frac{\mu}{k_1}}\right) \cdot \vec{e} + O\left(\frac{\mu}{k_1}\right)\right\}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

同様に $$\vec{P}_+ = E_+\left\{\vec{n}_1 + O\left(\sqrt{\tfrac{\mu}{P_1}}\right)\cdot\vec{e}_+ + O\left(\tfrac{\mu}{P_1}\right)\right\}$$

と書ける. $\vec{e}$ 及 $\vec{e}_+$ は $\vec{n}_1$ と垂直な Einheitvektor である.

従て.

$$\Lambda = \tfrac{1}{2}\{1+(\vec{\alpha}\vec{n}_1)\} + O\left(\sqrt{\tfrac{\mu}{P_1}}\right)\cdot(\vec{\alpha}\vec{e}) + O\left(\tfrac{\mu}{P_1}\right)$$
$$\Lambda_+ = \tfrac{1}{2}\{1+(\vec{\alpha}\vec{n}_1)\} + O\left(\sqrt{\tfrac{\mu}{P_1}}\right)\cdot(\vec{\alpha}\vec{e}_+) + O\left(\tfrac{\mu}{P_1}\right)$$
$$K_1 = E\left[\{1+(\vec{\alpha}\vec{n}_1)\} + O\left(\sqrt{\tfrac{\mu}{P_1}}\right)\cdot(\vec{\alpha}\vec{e}) + O\left(\tfrac{\mu}{P_1}\right)\right]$$
$$K_2 = -E_+\left[\{1+(\vec{\alpha}\vec{n}_1)\} + O\left(\sqrt{\tfrac{\mu}{P_1}}\right)\cdot(\vec{\alpha}\vec{e}_+) + O\left(\tfrac{\mu}{P_1}\right)\right]$$

此處で $O\left(\sqrt{\tfrac{\mu}{P_1}}\right)$ と記した量は Operator をふくまないが $O\left(\tfrac{\mu}{P_1}\right)$ と記した量は一般に Operator をふくんでゐる.

さて (3) の Spur を計算する場合に

$$\{1+(\vec{\alpha}\vec{n}_1)\}(\vec{\alpha}\vec{e}_i)\{1+(\vec{\alpha}\vec{n}_1)\} = 0$$
$$\{1+(\vec{\alpha}\vec{n}_1)\}(\vec{\alpha}\vec{e}_i)(\vec{\alpha}\vec{e}_j)(\vec{\alpha}\vec{e}_k)\{1+(\vec{\alpha}\vec{n}_1)\} = 0$$

usw.

$$\vec{e}_{i,j,k} = \vec{e}_1 \text{ oder } \vec{e}_2 \text{ oder } \vec{e} \text{ oder } \vec{e}_+$$

なる関係のある事を注意するならば Sp.(3) の grössenordnung は上にやった Abschätzung の際よりもずっと下って

$$Sp(3) \sim \frac{1}{P_1^2}$$

となる. 従てこの Winkelbereich よりの Wirkungsquerschnitt への Beitrag は他の部分に比して order が低くなってゐる.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

以上得た結果を綜合すると

	$k_1 \sim \mu$	$k_1 \gg \mu$
Φ	$\left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2$	$\left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2 \cdot \frac{\mu}{k_1}$

Breit及Wheelerの計算の結果によると $\gamma_1\mu$ 及 $\gamma_2\mu$ なるエネルギーの二つのPhotonがWinkel θ をなして衝突したときPaarerzeugungのWirkungsquerschnittは

$$\Phi = 2\pi\left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2 \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2}\left[-SC^{-3} - SC^{-5} - \theta C^{-6} + 2\theta C^{-4} + 2\theta C^{-2}\right]$$

$$C = \sqrt{\gamma_1\gamma_2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2},\quad S = \sqrt{C^2-1},\quad \theta = \cosh^{-1}C$$

で与えられる. 吾々の計算した様な場合に於て此式は次の値を与へる;

	$k_1 \sim \mu$	$k_1 \gg \mu$
Φ	$\left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2$	$\left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2 \frac{\log\frac{k_1}{\mu}}{\frac{k_1}{\mu}}$

従て $k_1 \gg \mu$ なる場合のlogを除いては全く吾々の結果と一致する
このlogだけの不定は吾々のAbschätzungでは止むを得ないものである
併し此logの有無はこの式を用ひてWilliamsが行なった様にしてPhotonがNuclear fieldでpairを造る確率を求め~~る~~た時の~~には~~結果には影響しない.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE.................
NO. 9

§3. Lichtstreuung am Photon.

次に §2 と同様な Abschätzung を (b) の Prozeß の確率に就ても行ふのであるが吾々の本来の目的は此結果を用ひて (c) の Abschätzung がやり度いのであるから (b) の中で次の如きものを考へるのが zweckmäßig である. 又一般の場合は Lorentz transformation に依て容易に得られる.

$h\nu_1 = k_1$ 及 $h\nu_2 = \mu\,(= mc^2)$ なる二つの Photon (1 及 2 と名付く) が head-on-collision をして pair と $h\nu_3 = k_3$ なる Photon (3 と名付く) とを造る場合を考へる. Energiesatz 及 Impulssatz は

$$\left.\begin{aligned} k_1 + \mu &= E + E_+ + k_3 \\ (k_1 - \mu)\vec{n}_1 &= \vec{P} + \vec{P}_+ + \vec{k}_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

記号はすべて前節と同じ意味をもつものとする.

Differentielle Wirkungsquerschnitt は次の式で与へられる;

$$d\Phi = \frac{2\pi}{\hbar c}\,\frac{pE\,k_3^2\,dk_3\,d\Omega\,d\Omega_3}{(2\pi\hbar c)^6}\,\sum\left|\sum\frac{H_{E\mathrm{II}}H_{\mathrm{II}\,\mathrm{I}}H_{\mathrm{I}A}}{(E_{\mathrm{II}}-E_A)(E_{\mathrm{I}}-E_A)}\right|^2, \qquad (2)$$

$d\Omega_3$ は Photon 3 の Raumwinkelelement である. 前節同様 Σ を Casimir の方法で遂行すると

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{1}{137}\left[\frac{e^2}{\mu}\right]^2\cdot\frac{\mu}{k_1}\cdot pE\,k_3\,dk_3\,d\Omega\,d\Omega_3\;Sp.(\Lambda_+ B^\dagger \Lambda B), \qquad (3)$$

Λ 及 Λ_+ は前節と同一の Operator であるが B は次の如き Operator である

$$B = \sum_{\substack{i,j,k=1,2,3\\ i\neq j\neq k}} (\alpha e_i)\frac{L_i}{G_i}(\alpha e_j)\frac{K_k}{F_k}(\alpha e_k) \qquad (4)$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

$$\left.\begin{aligned}
G_1 &= 2k_1 E(1-\beta\cos\theta) \\
G_2 &= 2\mu E(1+\beta\cos\theta) \\
G_3 &= -2k_3 E(1-\beta\cos\theta') \\
F_1 &= 2k_1 E_+(1-\beta_+\cos\theta_+) \\
F_2 &= 2\mu E_+(1+\beta_+\cos\theta_+) \\
F_3 &= -2k_3 E_+(1-\beta_+\cos\theta'_+)
\end{aligned}\right\} \quad \text{-------- (5)}$$

$$\theta = \widehat{\vec{p}\vec{n}_1}, \quad \theta_+ = \widehat{\vec{p}_+\vec{n}_1}, \quad \theta' = \widehat{\vec{p}\vec{n}_3}, \quad \theta'_+ = \widehat{\vec{p}_+\vec{n}_3} \qquad \left(\vec{n}_3 = \frac{\vec{k}_3}{k_3}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}
L_1 &= \vec{\alpha}\cdot(\vec{p}-\vec{k}_1) + \beta\mu + E - k_1 \\
L_2 &= \vec{\alpha}\cdot(\vec{p}+\mu\vec{n}_1) + \beta\mu + E - \mu \\
L_3 &= \vec{\alpha}\cdot(\vec{p}+\vec{k}_3) + \beta\mu + E + k_3 \\
K_1 &= -\vec{\alpha}\cdot(\vec{p}_+-\vec{k}_1) + \beta\mu - E_+ + k_1 \\
K_2 &= -\vec{\alpha}\cdot(\vec{p}_++\mu\vec{n}_1) + \beta\mu - E_+ + \mu \\
K_3 &= -\vec{\alpha}\cdot(\vec{p}_++\vec{k}_3) + \beta\mu - E_+ - k_3
\end{aligned}\right\} \quad \text{--------- (6)}$$

(1)の Energie-Impulssatz より 次の関係が 得られる：

$$2k_1 = E\left\{(1+\beta\cos\theta)+(1-\beta\cos\theta)\frac{k_1}{\mu}\right\} + k_3\left\{(1+\cos\theta_3)+(1-\cos\theta_3)\frac{k_1}{\mu}\right\} - \frac{Ek_3}{\mu}(1-\beta\cos\theta') \quad \text{---- (7)}$$

$$2k_1 = E_+\left\{(1+\beta_+\cos\theta_+)+(1-\beta_+\cos\theta_+)\frac{k_1}{\mu}\right\} + k_3\left\{(1+\cos\theta_3)+(1-\cos\theta_3)\frac{k_1}{\mu}\right\} - \frac{E_+k_3}{\mu}(1-\beta\cos\theta'_+) \quad \text{---- (8)}$$

$$\theta_3 = \widehat{\vec{k}_3\vec{n}_1}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 11

$$\frac{1-\beta_+\cos\theta_+}{1+\beta_+\cos\theta_+}=\frac{\mu}{k_1}\,\frac{E(1+\beta\cos\theta)+k_3(1+\cos\theta_3)-\frac{k_3E}{\mu}(1-\beta\cos\theta')}{2k_1-E(1+\beta\cos\theta)-k_3(1+\cos\theta_3)} \qquad (9)$$

I. $k_1\sim\mu$ なる場合

(7) 及 (8) により $E, E_+, k_3\sim\mu$

従て. $K_1, K_2, K_3, L_1, L_2, L_3\sim\mu$
$F_1, F_2, F_3, G_1, G_2, G_3\sim\mu^2$ } $Sp\sim\frac{1}{\mu^4}$

$$\Phi\sim\frac{r_0^2}{137} \qquad r_0=\frac{e^2}{\mu}$$

II. $k_1\gtrsim\mu$ なる場合

(i) $\theta\sim$endlich, $\theta_3\sim$endlich, $k_3\sim\mu$ なる場合

(7) により $E\sim\mu$, (9) により $\theta_+\sim\frac{\mu}{k_1}$, (8) により $E_+\sim k_1$

従て.

$L_1\sim k_1,\ L_2\sim\mu,\ L_3\sim\mu$
$G_1\sim k_1\mu,\ G_2\sim\mu^2,\ G_3\sim\mu^2$
$K_1\sim\mu,\ K_2\sim k_1,\ K_3\sim k_1$
$F_1\sim\mu^2,\ F_2\sim k_1\mu,\ F_3\sim k_1\mu$

$$Sp\sim\frac{1}{\mu^4}$$

$$pE\,k_3dk_3\sim\mu^4$$

Winkelverteilung は grössenordnungsmässig に gleichförmig であるから

$$\Phi\sim\frac{r_0^2}{137}\frac{\mu}{k_1}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(2) $\theta \sim$ endlich $\theta_3 \sim \frac{\mu}{k_1}$, $k_3 \sim k_1$ なる場合

(7) により　$E \sim \mu$

(9) により　$\frac{1-\beta_+\cos\theta_+}{1+\beta_+\cos\theta_+} = \frac{O(\mu)}{O(k_1-k)}$

所が (7) によると

$$2k_1 = E\left\{(1+\beta\cos\theta)+(1-\beta\cos\theta)\frac{k_1}{\mu}\right\}+k\left\{(1+\cos\theta_3)+(1-\cos\theta_3)\frac{k_1}{\mu}\right\}-\frac{Ek_3}{\mu}(1+\cos\theta')$$

$$= 2k_3 + \frac{E(k_1-k_3)}{\mu}(1-\beta\cos\theta) + O(\mu)$$

即ち　$k_1 - k \sim O(\mu)$

従て,　$\theta_+ \sim$ endlich,　(8) により　$E_+ \sim \mu$

$K_1 \sim k_1$, $K_2 \sim \mu$, $K_3 \sim k_1$

$F_1 \sim k_1\mu$, $F_2 \sim \mu^2$, $F_3 \sim k_1\mu$

$L_1 \sim k_1$, $L_2 \sim \mu$, $L_3 \sim k_1$

$G_1 \sim k_1\mu$, $G_2 \sim \mu^2$, $G_3 \sim k_1\mu$

$$Sp.(3) \sim \frac{1}{\mu^4}$$

$$pEk\,dk \sim \mu^2 k_1^2,\quad d\Omega_3 \sim \frac{\mu^2}{k_1^2}$$

$$\Phi \sim \frac{r_0^2}{137}\frac{\mu}{k_1}$$

(3) $\theta \sim \frac{\mu}{k_1}$, $\theta_3 \sim$ endlich, $k_3 \sim k_1$ なる場合

(7) により　$E \sim k_1$

(9) により　$\frac{1-\beta_+\cos\theta_+}{1+\beta_+\cos\theta_+} \sim \frac{O(\mu)}{O(k_1-E)}$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

所が (7) により.

$$2\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{E}\left\{(1+\beta\cos\theta)+(1-\beta\cos\theta)\frac{\mathfrak{k}_1}{\mu}\right\}+\mathfrak{k}_3\left\{(1+\cos\theta_3)+(1-\cos\theta_3)\frac{\mathfrak{k}_1}{\mu}\right\}-\frac{\mathfrak{E}\mathfrak{k}_3}{\mu}(1-\beta\cos\theta')$$

$$= 2\mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{k}_3(\mathfrak{k}_1-\mathfrak{E})}{\mu}(1-\beta\cos\theta) + O(\mu)$$

即ち　$\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{E} \sim O(\mu)$

従て　$\theta_+ \sim$ endlich ,　(8) により $\mathfrak{E}_+ \sim \mu$

$$L_1 \sim \mu, \quad L_2 \sim \mathfrak{k}_1, \quad L_3 \sim \mathfrak{k}_1$$

$$G_1 \sim \mu^2, \quad G_2 \sim \mathfrak{k}_1\mu, \quad G_3 \sim \mathfrak{k}_1\mu$$

$$K_1 \sim \mathfrak{k}_1, \quad K_2 \sim \mu, \quad K_3 \sim \mu$$

$$F_1 \sim \mathfrak{k}_1\mu, \quad F_2 \sim \mu^2, \quad F_3 \sim \mu^2$$

$$Sp(3) \sim \frac{1}{\mu^4}$$

$$p\mathfrak{E}\mathfrak{k}_3 d\mathfrak{k}_3 \sim \mathfrak{k}_1^2\mu^2, \quad d\Omega \sim \frac{\mu^2}{\mathfrak{k}_1^2}$$

$$\Phi \sim \frac{r_0^2}{137}\frac{\mu}{\mathfrak{k}_1}$$

(4) $\theta \sim \sqrt{\frac{\mu}{\mathfrak{k}_1}}$, $\theta_3 \sim \sqrt{\frac{\mu}{\mathfrak{k}_1}}$, $\mathfrak{k}_3 \sim \mathfrak{k}_1$ なる場合

(7) により　$\mathfrak{E} \sim \mathfrak{k}_1$

(9) により　$\dfrac{1-\beta_+\cos\theta_+}{1+\beta_+\cos\theta_+} \sim \dfrac{\mu}{\mathfrak{k}_1}$,　従て　$\theta_+ \sim \sqrt{\frac{\mu}{\mathfrak{k}_1}}$

(8) により　$\mathfrak{E}_+ \sim \mathfrak{k}_1$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

従て
$$L_1 \sim k_1,\ L_2 \sim k_1,\ L_3 \sim k_1$$
$$G_1 \sim k_1\mu,\ G_2 \sim k_1\mu,\ G_3 \sim k_1\mu$$
$$K_1 \sim k_1,\ K_2 \sim k_1,\ K_3 \sim k_1$$
$$F_1 \sim k_1\mu,\ F_2 \sim k_1\mu,\ F_3 \sim k_1\mu$$
$$Sp(3) \sim \frac{1}{\mu^4}$$

$$pE\, k_3 dk_3 \sim k_1^4,\quad d\Omega, d\Omega_3 \sim \frac{\mu}{k_1}$$
$$\Phi \sim \frac{r_0^2}{137}\cdot\frac{k_1}{\mu}$$

併し此場合は前節の (ii) の場合と同様な注意を必要とする. 即ち彼の場合と同様
$$\vec{p} = E\left\{\vec{n}_1 + O\left(\sqrt{\tfrac{\mu}{k_1}}\right)\cdot\vec{e} + O\left(\tfrac{\mu}{k_1}\right)\right\}$$
$$\vec{p}_+ = E_+\left\{\vec{n}_1 + O\left(\sqrt{\tfrac{\mu}{k_1}}\right)\cdot\vec{e}_+ + O\left(\tfrac{\mu}{k_1}\right)\right\}$$
更に
$$\vec{k}_3 = k_3\left\{\vec{n}_1 + O\left(\sqrt{\tfrac{\mu}{k_1}}\right)\cdot\vec{u} + O\left(\tfrac{\mu}{k_1}\right)\right\}$$
$$\vec{e}_3 = \vec{v} + O\left(\sqrt{\tfrac{\mu}{k_1}}\right)\cdot\vec{n}_1 + O\left(\tfrac{\mu}{k_1}\right)$$
$\vec{e}, \vec{e}_+, \vec{u}, \vec{v}$ は皆 $\vec{n}_1$ と垂直な Einheitsvektor である.

$$\Lambda = \frac{1}{2}\{1 + (\vec{\alpha}\vec{n}_1)\} + O\left(\sqrt{\tfrac{\mu}{k_1}}\right)\cdot(\vec{\alpha}\vec{e}) + O\left(\tfrac{\mu}{k_1}\right)$$
$$\Lambda_+ = \frac{1}{2}\{1 + (\vec{\alpha}\vec{n}_1)\} + O\left(\sqrt{\tfrac{\mu}{k_1}}\right)\cdot(\vec{\alpha}\vec{e}_+) + O\left(\tfrac{\mu}{k_1}\right)$$

$$L_1 = (E - k_1)\{1 + (\vec{\alpha}\vec{n}_1)\} + O(\sqrt{k_1\mu})\cdot(\vec{\alpha}\vec{e}) + O(\mu)$$
$$L_2 = E\{1 + (\vec{\alpha}\vec{n}_1)\} + O(\sqrt{k_1\mu})\cdot(\vec{\alpha}\vec{e}) + O(\mu)$$
$$L_3 = -(E_+ - k_1)\{1 + (\vec{\alpha}\vec{n}_1)\} + O(\sqrt{k_1\mu})\cdot(\vec{\alpha}\vec{e}_+) + O(\mu)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

$$K_1 = -(E_+ - k_1)\{1+(\alpha\vec{n}_1)\} + O(\sqrt{k_1\mu})\cdot(\alpha\vec{e}_+) + O(\mu)$$
$$K_2 = \quad -E_+\{1+(\alpha\vec{n}_1)\} + O(\sqrt{k_1\mu})\cdot(\alpha\vec{e}_+) + O(\mu)$$
$$K_3 = \quad (E - k_1)\{1+(\alpha\vec{n}_1)\} + O(\sqrt{k_1\mu})\cdot(\alpha\vec{e}) + O(\mu)$$

此處で $O(\sqrt{\frac{\mu}{k_1}})$, $O(\sqrt{k_1\mu})$ は Operator ではないが $O(\frac{\mu}{k_1})$, $O(\mu)$ は一般に Operator を含む.

矢張 $Sp(3)$ を計算する場合に $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, usw. が $\vec{n}_1$ に垂直な Vektor であると

$$\{1+(\alpha\vec{n}_1)\}(\alpha\vec{a})\{1+(\alpha\vec{n}_1)\} = 0$$
$$\{1+(\alpha\vec{n}_1)\}(\alpha\vec{a})(\alpha\vec{b})(\alpha\vec{c})\{1+(\alpha\vec{n}_1)\} = 0$$

usw.

なる関係のある事を注意せねばならない. そうすると Spur (3) の Grössenordnung は上の粗雑な Abschätzung の際よりずっと下って

$$Sp(3) \sim \frac{1}{\mu k_1^3}$$

となる. 從て.

$$\Phi \sim \frac{1}{137}\left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2 \cdot \frac{\mu^2}{k_1^2}$$

以上得た結果を綜合すると

	$k_1 \sim \mu$	$k_1 \gg \mu$
Φ	$\frac{1}{137}\left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2$	$\frac{1}{137}\left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2 \cdot \frac{\mu}{k_1}$

注意すべき事は $k_1 \gg \mu$ なる時, 実際の Φ が上記の値であるか, 或は $\frac{1}{137}\left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2 \frac{\log \frac{k_1}{\mu}}{\frac{k_1}{\mu}}$ であるかは吾々の Abschätzung では不定である事である.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§4. Inkohärente Lichtstreuung am Kern.

Williams—Weizsäcker の方法を用ふるならば前節の結果から (e) の Prozess の確率を求める事は容易である。彼等の方法によると Kernfeld は Kern に對して光速度に近い速度 βc $(\beta\sim 1)$ をもつ Beobachter に對しては近似的に次の如き Strahlungsfeld で置きかへる事が出来る。Kern の path からの垂直距離が r の場所に於て pro cm^2 をとうして やって来る Photon の數は Energieintervall dk_1 の間で

$$n(k_1,r)\,dk_1 = \frac{1}{137}\frac{Z^2}{r^2}\frac{dk_1}{k_1} \qquad \left(k_1 < g\frac{\lambda\zeta\mu}{r}\right) \tag{1}$$

$$= 0 \qquad \left(k_1 > g\frac{\lambda\zeta\mu}{r}\right)$$

$$g\sim O(1),\quad \lambda=\frac{\hbar}{mc},\quad \zeta=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

で與えられる。

今 $h\nu = k$ なる Photon が Kernfeld で Paar を造り streuen される確率を計算するのに此 System に對して やって来た Photon と同一の方向に動いて居る System で計算する。その相對速度は やって来た Photon のエネルギーが新しい System に於ては丁度 μ となる様にえらぶ。從て

$$\zeta = \frac{2k}{\mu} \tag{2}$$

そうすると前節の結果を用ふる事が出来て新しい System に於ける上の Prozess の Wirkungsquerschnitt は

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\sigma_3 = \int_{r_{min}}^{r_{max}} r\,dr \int_{\mu}^{\frac{g\lambda\xi\mu}{r}} \Phi(k_1)\, n(k_1, r)\, dk_1 \qquad (3)$$

で与えられる．簡單な考察から この σ_3 が 又 元の System に於ける 作用断面に 等しい事が 分る．$\Phi(k_1)$ に 前節の 結果を入れて 積分を行ふと

$$\sigma_3 \sim \alpha^2 Z^2 \left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2 \cdot \left[\log r - \frac{r}{\lambda\xi\mu}\right]_{r_{min}}^{r_{max}} \qquad (4)$$

(簡單のため $g=1$ ととった.)

Abschirmung の 影響を 考へない ならば

$$\begin{cases} r_{max} = \lambda\xi \\ r_{min} = \lambda \end{cases}$$

従て

$$\sigma_3 \sim \alpha^2 Z^2 \left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2 \cdot \log \xi \sim \alpha^2 Z^2 \left[\frac{e^2}{\mu}\right]^2 \cdot \log \frac{h\nu}{\mu} \qquad (5)$$

$\xi > 137 Z^{-\frac{1}{3}}$ d.h. $2h\nu > 137 Z^{-\frac{1}{3}}\mu$ に對しては Abschirmung のため

$$\begin{cases} r_{max} = a_0 Z^{-\frac{1}{3}} \\ r_{min} = \lambda \end{cases} \qquad (a_0 = \text{Wasserstoffradius})$$

をとらねばならぬ．従て

$$\sigma_3 \sim \alpha^2 Z^2 \left[\frac{e^2}{\mu}\right]^2 \cdot \log 137 Z^{-\frac{1}{3}} \qquad (2h\nu > 137 Z^{-\frac{1}{3}} mc^2) \qquad (6)$$

次に Oppenheimer の 考へに 従て $r < \left[\frac{e^2}{\mu}\right] \cdot \xi$ の 部分の Beitrag を除いて 計算すると $\xi > 137$ d.h. $2h\nu > 137\mu$ に 對しては

$$\begin{cases} r_{max} = \lambda\xi \\ r_{min} = \rho\,\xi \end{cases} \qquad \left(\rho = \frac{e^2}{\mu}\right)$$

従て

$$\sigma_3 \sim \alpha^2 Z^2 \left[\frac{e^2}{\mu}\right]^2 \cdot \log 137 \qquad (2h\nu > 137\mu) \qquad (7)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

Abschirmung を考慮に入れるときは　$\xi > 137$ に對しては

$$\begin{cases} r_{max.} = a_0 Z^{-\frac{1}{3}} \\ r_{min.} = \rho \xi \end{cases}$$

從て

$$\sigma_3 \sim \alpha^2 Z^2 \left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2 \cdot \log\left\{(137)^2 Z^{-\frac{1}{3}} \xi^{-1}\right\}, \quad (137)^2 Z^{-\frac{1}{3}} \mu > 2h\nu > 137\mu \tag{8}$$

$$\sim 0 \qquad 2h\nu > (137)^2 Z^{-\frac{1}{3}} \mu$$

2^{te} Ordnung に於ける γ-Strahlen が Kernfeld で Paar を造る Wirkungsquerschnitt σ_2 との比を考へると

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2} \sim \alpha \times \text{numerical factor} \tag{9}$$