席数 n を持つ統計力学

§ 集合体の固有函数

同種のNケの粒子の集合を取扱ふ。Nケの粒子はすべて同じ型のハミルトニアンを持ち、その固有解を $\chi_{\alpha_1}, \chi_{\alpha_2}, \chi_{\alpha_3}$ ------ として、α_i はそれ等の解を"或る定つた"順に並へた時の大きさの順を示すものとする。

さて、$\overset{i}{\chi}_{\alpha_i}$ をもつてi番目の粒子が α_i 状態にある事を示せば $\overset{1}{\chi}_{\alpha_1} \overset{2}{\chi}_{\alpha_2} \overset{3}{\chi}_{\alpha_3}$ ------ $\overset{N}{\chi}_{\alpha_N}$ は確かにNケの集合体のハミルトニアンの解である。従つて、粒子を示す上添字を必ず此の順に並べて、下添字 $\alpha_1 \alpha_2$ ---- を $\alpha'_1 \alpha'_2$ ----- で置き代へたもの

$$\overset{1}{\chi}_{\alpha_1} \overset{2}{\chi}_{\alpha_2} \overset{3}{\chi}_{\alpha_3} \text{------} \overset{N}{\chi}_{\alpha_N} = P\, \overset{1}{\chi}_{\alpha_1} \overset{2}{\chi}_{\alpha_2} \text{------} \overset{N}{\chi}_{\alpha_N} \text{ ------ } (1)$$

$\left[\text{但しPは下添字に働く置換を示めし } P = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \text{ ------ } \alpha_N \\ \alpha'_1 \alpha'_2 \text{ ------ } \alpha'_N \end{pmatrix}\right]$

も又矢張り集合体のハミルトニアンの解である。[1]

それ故(1)の型の解の linear combination を取つた

$$\Psi = \sum_P a_P P\, \overset{1}{\chi}_{\alpha_1} \overset{2}{\chi}_{\alpha_2} \text{------} \overset{N}{\chi}_{\alpha_N} \text{ ------ } (2)$$

（但しpはN次の対称置換N!ケのすべてを取る）

は集合ハミルトニアンの一般的な解となる筈である。

即ち(2)式はNケの粒子が全部皆な"異つた"状態にある時の固有函数を示めすものである。

集合状態の更らに一般的な解は Ψ型の固有函数を用いて展開されるものである。

従つて(2)式の型の palinorm に順次述べて行く吾々の要求する統計条件を満たすものが存在するかどうかを調べて行かう。

さて、Ψが席数nの統計函数なるためには次の関係を満たさねばならない。

（條件第一）　$\Psi^* \cdot \Psi = P\Psi^* \cdot P\Psi =$ real posi invariant for any arbitrary P.

---

1) 集合体のハミルトニアンは全つたく対称であるから。
2) $\Psi^* \Psi$ はNケの粒子が α_1, α_2 ------ α_N の状態を占める集合体の確率を示めすものだから。

即ち　$\Psi = \sum_Q a_Q Q\, \overset{1}{\chi}_{\alpha_1} \overset{2}{\chi}_{\alpha_2} \text{------} \overset{N}{\chi}_{\alpha_N}$

$\Psi^* = \sum_{Q'} a^*_{Q'} Q'\, \overset{1}{\chi}{}^*_{\alpha_1} \overset{2}{\chi}{}^*_{\alpha_2} \text{------} \overset{N}{\chi}{}^*_{\alpha_N}$

より $\Psi^* \cdot \Psi$ を作つて任意項 $a^*_{Q'} a_Q$ の如き項を取り出し、Ψに更らに任意の置換Pをほどこし、なほ且つ元の確率に等しいためには、その係数間に

$$a^*_{Q'} a_Q = a^*_{PQ'} a_{PQ} = a^*_{R'} a_R \text{ ------- } (3)$$

（但し $R' = PQ'$　$R = PQ$）

なる事が必要である。

此の時 Q', Q, R', R の間には

$P = RQ^{-1} = R'Q'^{-1}$ なる関係

即ち　$R'^{-1} R = Q'^{-1} Q$ ------ (4)

なる事が必要である。

逆に(4)が成立する時は(3)が成立する。

(3)と(4)を比較して見ると、a_Q がQの表示であり、然も複素数共軛記号*が逆元素記号−1に一致すればよい事が分る。従つて a_Q としてはQの unitale 表示を取ればよい事になる。

或は亦逆に、a_Q に対して Q^{-1} の unitale 表示を取り、a^*_Q に対してQの unitale 表示を取るも矢張り(3)と(4)を同時に満たす事が出来る。

此の二つの可能性の内、吾々は特に前者を選ばう。それは後々便利な為である。[1]

それ故、改めて a_Q をQの unitale 表示であるとする。

すると、$\Psi^* \Psi$ が positive definite なるためには、普通の積 $\Psi^* \Psi$ の代りに $spur(\Psi^* \Psi)$ を取らねばならない。

勿論此の場合も(3),(4)の論法はそのまゝ成り立つものである。

固有函数Ψを1に normalize するために(2)式に $1/\sqrt{N!\,d}$（但しdは表示 Matrix の dimention）を掛けて置かねばならない。

即ち
$$\psi = 1/\sqrt{N!a}\sum a_p P \overset{1}{x}_{\alpha_1}\overset{2}{x}_{\alpha_2}\cdots\cdots\overset{N}{x}_{\alpha_N} \quad\cdots\cdots(2)'$$

§ 係数 a_p の決定

更らに ψ が統計函数であるためには、第二の條件を滿たさねばならない。即ち ψ の変数 $\overset{1}{x}, \overset{2}{x}\cdots\cdots\overset{N}{x}$ の内任意の $n+1$ ケ以上が等しくなつた時には必然的に $\psi\equiv 0$ で、n ケ以下が等しい場合は $\psi \neq 0$ でない事が必要である。

これは物理的には一つの状態に n ケだけ入り得る事を示めすものである。

（條件第二）
$$\psi(n+1 \text{ケ以上の} x \text{が同じ値を取つた時}) \equiv 0 \quad\cdots\cdots(\mathrm{I})$$
$$\psi(m \text{ケの} x \text{が同じ値を取つた時}) \neq 0 \quad\cdots\cdots(\mathrm{II})$$
但し $m = 1 \cdots\cdots n$ 迄

さてそれでは、前の§で見出した ψ の内に此等の條件を満す ψ が求まるであろうか。

席数 n が2以上の場合は全つたく同じ論法が取り得るから簡單のため $n=2$ の場合を考へる。

先づ、粒子の總數 N が3の場合より初める。それは、此の場合が全つたく基礎となるから。

此の際は ψ は $3!=6$ 項より成る。
$$\psi = C\sum_{p=3!} a_p P \overset{1}{x}_{\alpha_1}\overset{2}{x}_{\alpha_2}\overset{3}{x}_{\alpha_3}$$

此の ψ に於て $\overset{1}{x}=\overset{2}{x}=\overset{3}{x}=x$ とすれば（條件第二の(I)）
$$\psi = C\left(\sum_p a_p\right)x^3$$

これが恒等的に zero なるためには、( ) の内が zero でなければならない。即ち3次の対稱群の表示のすべての element の和 V が zero Matrix でなければならない。

無論表示は、既約とは限つた訳けではないが、既約として上の條件を滿しているものがあるか、どうか探して見よう。
$$V = \sum_p^{3!} a_p \quad\cdots\cdots(5)$$

(5) 式に於て、任意の element a_p に対して
$$a_p V = V$$

即ち $\mathrm{Spur}\, a_p V = \mathrm{Spur}\, V$

又一方 Spur V は表示 a_p が恒等表示を含む回数を与へるもの
（を element の總數6で割つたもの）
であるから此の表示を既約と限定してしまへばり
$$\mathrm{Spur}\, V = 0$$
である。

それ故 $\mathrm{Spur}\, a_p V = 0$ 　for any arbitary a_p

結局 Burnside の定理から、$V=0$ である事が保証される。

これで a_p は恒等表示を除く、既約表示であれば、良い事が分つた。

さて、3次の対稱群の既約表示は、3種類（その群の class の数）だけあり、その内の恒等表示と交代表示はその dimention は1で、もつの表示は dimention が2である。

それ等の character は 2)

class \ character	恒	交	another
C_1	1	1	2
C_2	1	−1	0
C_3	1	1	−1

である。此の内、恒等表示は問題外であるが、交代表示と第三番目の表示は確かに條件第一と條件第二の(I)迄は滿しているのである。然し交代表示は條件第二の(II)にフレルのである。

事実それが Fermi 統計に対応している事から当然の事である。

殘りの最後の表示 another が條件第二の(II)を滿している事は容易に分る。即ち、此の表示が既約であると云ふ事から、その Matrix element は linear independent でなければならない。（Burnside の定理）従つて、任意に選んだ二つの Matrix a_p, a_q に対して 3)
$$a_p + a_q \equiv 0$$
と云ふ事はあり得ないのである。

事実此等の Matrix は
$$E\text{inheit} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad (12) = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$
$$(13) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad (23) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
$$(123) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad (132) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

1) 恒等表示そのものは問題とならない。なんとならば、此れは既に Base の統計に対応するものであるから、従ってここでは除外している。
2) 例へば Murnaghan: The theory of Group Representation Page 100 を見よ
3) a_p は二列二行であるから4ケの独立成分を持つベクトルと見なされる。

である。
兎も角．吾々は吾々の統計條件を満す．Palinominal はかくの如き表示をその係数に持つ事を知った。
勿論．必ずしも既約表示と限った訳けではなく．少くともかくの如き表示を一回以上含んで居さへすればいゝのであるが，同じ事であるから此後はいつも既約が選定されるものとする。
これだけ用意の後
今度は粒子の總数が一般的Nケの場合に移る。
先ず $\psi = C\sum_P a_P\, P\, \overset{1}{x}_{\alpha_1}\overset{2}{x}_{\alpha_2}\overset{3}{x}_{\alpha_3}\cdots\cdots\overset{N}{x}_{\alpha_N}$
に於て．任意の3ケが同じ状態にある~~時~~時 $\psi\equiv 0$ である様な表示 S_N がある事を示めさなければならない。
そのため先ず $\overset{1}{x}=\overset{2}{x}=\overset{3}{x}=x$ なる特別な三ケを取り出して考へる。此の場合も矢張り a_P はN次の対稱群の既約表示 S_N であるとする。
その時

$$\psi(\overset{1}{x}=\overset{2}{x}=\overset{3}{x}=x) = C\sum_{\alpha_4\cdots\alpha_N}\left[\Big(\sum_{P'} a_{P'}\Big) x^3\, \overset{4}{x}_{\alpha_4}\overset{5}{x}_{\alpha_5}\cdots\cdots\overset{N}{x}_{\alpha_N}\right]\cdots\cdots(6)$$

ここに P' に就いての加算は $\overset{4}{x}\,\overset{5}{x}\cdots\cdots\overset{N}{x}$ に就いては同じ α の組み合せで．唯だ $\overset{1}{x},\overset{2}{x},\overset{3}{x}$ の内でのみで α の入れ替へをやったもの $3!$ ケだけに就いて加へる事を意味する。
(6)式が恒等的にzeroなるためには すべてのかゝる組合せに関して

$$\sum_{P'=1}^{3!} a_{P'} \equiv 0 \quad ---------- \quad (7)$$

であればよい。
所が．$N!$ ケの P より成る群 G を．$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ の置換 $3!$ よりなる分部群 F の Neben complex (coset) で展開すると

$$G = F + P_1F + P_2F + \cdots\cdots + P_{\frac{N!}{3!}}F$$

此の際 F は

$$(1)=\begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \cdots\cdots \alpha_N\\ \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \cdots\cdots \alpha_N\end{pmatrix}\qquad (12)=\begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \cdots\cdots \alpha_N\\ \alpha_2\,\alpha_1\,\alpha_3 \cdots\cdots \alpha_N\end{pmatrix}$$

$$(13)=\begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \cdots\cdots \alpha_N\\ \alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_N\end{pmatrix}\qquad (23)=\begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \cdots\cdots \alpha_N\\ \alpha_1\,\alpha_3\,\alpha_2 \cdots\cdots \alpha_N\end{pmatrix}$$

$$(123)=\begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \cdots\cdots \alpha_N\\ \alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_N\end{pmatrix}\qquad (132)=\begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \cdots\cdots \alpha_N\\ \alpha_3\,\alpha_1\,\alpha_2 \cdots\cdots \alpha_N\end{pmatrix}$$

より成る。

次に F に屬せざる任意の $P_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2 \cdots\cdots \alpha_N\\ \alpha_1'\,\alpha_2' \cdots\cdots \alpha_N'\end{pmatrix}$ を持って来て
P_1F を作ると

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \cdots\cdots \alpha_N\\ \alpha_1'\,\alpha_2'\,\alpha_3' \cdots\cdots \alpha_N'\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \cdots\cdots \alpha_N\\ \alpha_2'\,\alpha_1'\,\alpha_3' \cdots\cdots \alpha_N'\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \cdots\cdots \alpha_N\\ \alpha_3'\,\alpha_2'\,\alpha_1' \cdots\cdots \alpha_N'\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \cdots\cdots \alpha_N\\ \alpha_1'\,\alpha_3'\,\alpha_2' \cdots\cdots \alpha_N'\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \cdots\cdots \alpha_N\\ \alpha_2'\,\alpha_3'\,\alpha_1' \cdots\cdots \alpha_N'\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \cdots\cdots \alpha_N\\ \alpha_3'\,\alpha_1'\,\alpha_2' \cdots\cdots \alpha_N'\end{pmatrix}$$

となる。即ち F の $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ となった所が新に $\alpha_1'\,\alpha_2'\,\alpha_3'$ で置きかへられるのである。
次いで F にも．P_1F にも屬せざる P_2 を取り出し順次．P_iF を作る。所が此の coset P_iF の一つ〱が全たく(6)式の $\sum_{P'=1}^{3!}P'$ に一致していると云ふ事である。
それ故表示 S_N に於て．coset の各 element の和が zero であれば(7)式が滿される事となる。
更らに F に屬する element の和

$$a_{(1)}+a_{(12)}+a_{(13)}+a_{(23)}+a_{(123)}+a_{(132)}\equiv 0 \quad ------ \quad (8)$$

であれば，必然的に各 coset P_iF の element の和は zero になる。
そこで $a_{(1)}+a_{(12)}+a_{(13)}+a_{(23)}+a_{(123)}+a_{(132)}\equiv \Box$
と置く。
表示 S_N に於て その分部群 F は最早や一般に既約とならないから．適当に座標軸を變換して $A^{-1}\Box A$ を Matrix Block に分ける事が出来る。

$$A^{-1}\Box A = \sum_P A^{-1}a_P A$$

但し．A は座標變換の Matrix で．a_P は F の element である。
各々の $A^{-1}a_PA$ は皆な3次の対稱群の既約表示を Block の形に含んでいる。
既に述べた如く．3次の対稱群の既約表示は3種類有り．その内恒等表示を除けば $3!$ ケの element の和が常に zero である。
それ故 $A^{-1}\Box A$ が zero になるためには．表示 a_P の内に恒等表示を含んではいけない。
$A^{-1}\Box A=0$ であれば．$|A|\neq 0$ であるから $\Box=0$ が保証される。

亦條件第二の(II)を満すためには表示 a_p (即 S_N)の内に少くとも一回 dimention 2 の表示(character 表に於て another)を含まなければならない。[4]

かゝる表示の具体的構成法は character の性質を用ひて容易に求める事が出来る。

それには、N次対称群の既約表示 S_N の unit に対応する class の character を $\chi(1)$[1] で表し、binary cycle 1ケを含む class の character、thertiary cycle 1ケを含む class の character を、それぞれ $\chi(12)$、$\chi(123)$ で表はすと

$$\left.\begin{array}{l}\chi(1)+3\chi(12)+2\chi(123)=0\\ 2\chi(1)+0-2\chi(123)\ \cancel{\geqq}\ 0\end{array}\right\}\text{------}(9)$$

を満す character の存在が先ず必要である。[4]

第一番目の式は表示 a_p (a_p は F の element)に恒等表示を含んでいない條件で第二番目は dimention 2 の表示を含んでいるための條件である。

さてN次の対称群の既約表示はNの partition に対応して作られるから。[2]

即ち $N=\lambda_1+\lambda_2+\text{------}+\lambda_k$ ------ (10)

但し $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \text{------} \geqq \lambda_k \geqq 0$

(9)を満す partition の組 $\{\lambda\}$ の存在する事を示めさなければならない。

Frobenius の公式に依つて $\chi(1)\ \chi(12)\ \chi(123)$ を求めると[3]

$$\chi_{(\lambda)}^{(12)}\Big/\chi_{(\lambda)}^{(1)}=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\lambda_j-2j+1)\Big/m(m-1)$$

$$\chi_{(\lambda)}^{(123)}\Big/\chi_{(\lambda)}^{(1)}=\left[\sum_{j=1}^{k}\{\lambda_j(\lambda_j-j+1)(2\lambda_j-4j+1)\}-3m(m-1)\right]\Big/2m(m-1)(m-2)$$

1) $\chi(1)$ は即ちその表示 Matrix の dimention である。
2) 例へば Murnaghan ; The theory of group Representation
3) 例へば Murnaghan ; 140頁参照 但し Murnaghan の本のものを幾分カクチョして用ひなければならない。

1) ~~例へば Weyl ; gruppen Theorie und Quantenmechanik 第三章及びフロク参照~~
2) ~~i, j, k ------ は必ずしも隣り合つた番号を示していない。~~
3) ~~今は~~ j番目の占める ~~state~~ に対応する。
4) これは決して充分條件ではない、フロクに於て詳論する。

従つて(9)式の第一番目は

$$2m(m-1)(m-2)+2(m-2)\left\{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\lambda_j-2j+1)\right\}+\left\{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\lambda_j-j+1)(2\lambda_j-4j+1)\right\}-2k\,m(m-1)=0$$

即ち

$$(9)'\left\{\begin{array}{l}2m(m-1)(m-2-k)+\sum_{j=1}^{k}\{\lambda_j(\lambda_j-j+1)(2\lambda_j-4j+1)+\\ 2(m-2)\lambda_j(\lambda_j-2j+1)\}=0\\ \text{第二番目の式は}\end{array}\right.$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2} > \chi_{(\lambda)}^{(123)}\Big/\chi_{(\lambda)}^{(1)}} \qquad \chi_{(\lambda)}(1) > \chi_{(\lambda)}(123)$$

に歸す。

(9)′と(10)とを同時に満す整数解 $\{\lambda\}$ が存在すれば吾々の要求する統計函数が求まる訳である。

事実此等は存在するのである。[1]

即ち(9)′(10)を同時に満す既約表示を求めるに歸するのである。

以上は1番目、2番目、3番目が同じ状態にあるとして論じたのであるが、Nケの粒子中いづれの3ケが同じ state にある時で全つたく同様な論法がそのまゝ成り立つものである。

同じ流儀に従つて席数nが2以上の場合に容易に拡張する事が出来る。但し基調に取るのは N=n+1 の表示である。(n=2の時、N=3を基にした様に) 此の際は

然し、かくして求めた表示が唯だ一つに限る訳けでなく一般には若干個存在するものである。

~~然し、その内の一つが特に物理的に優位を占めるものでなくすべてが一様に可能なものである事は Spin を無視した電子に就いて(即ち n=2)、その合成 Spin の状態に応じて色々の状態函数が与へられる事に対応しているのである。~~
~~事実 Spin の概念を導入して導いた状態函数と吾々の求めた状態函数は全々一致しているのである。[2]~~

1) 証明はフロク参照。
2) 例へば Weyl ; gruppen Theorie und Quantenmechanik 第三章及びフロク参照

此等の表示は実は條件第二の(II)[1]を一般に満していなく、唯だその内の一つだけが條件第二の(II)を満足している(その表示Matrixのdimentionは丁度粒子の總數Nの時N−1に等しい)。その他の表示は次の§で述べる様一つの状態を既に幾つかの粒子で占めている時に對應するものである。
此等に関してはフロクで詳論する。
然しかくして求められた表示がSpinを無視した電子に就いて(即ち$n=2$)算出された状態函數と全ったく一致しているものである[2]——但し彼等はSpinを一度は導入して後から消去している。従って吾々の算出法とは全く異るものである。

§2 一つの状態を若干個の粒子が占めている場合の状態函數

今迄では各々の粒子が各々の粒子が、それぞれ異った状態にある場合を考へていたが、今度はその内の若干が(無論席数をコエル事なく)同じ状態にある場合、その表示が如何に変るかを調べて見よう。
例へばN个中、n_1个がχ_{α_i} stateに$(n>n_1)$、n_2个がχ_{α_j}-state $(n_1>n_2)$にある様な場合を考へて見る。
χ_{α_i} stateにあるのは$i\, j\, k\, l\, m$……番目[3]でχ_{α_j}-stateにあるのは$i'\, j'\, k'\, l'$……番目の粒子であるとする。更らに残りの$(N-n_1-n_2)$个はa, b, c, d, e, f……番目の粒子であるとする。
§1で述べた並べ方に従へば先ず1番目、2番目、3番目……と粒子の順に並べ全部の粒子が皆各々異れるstateを占めていると考へ(此の状態函數を大きさの順に並べたものを基準にして測った)状態添字$\{abc\cdots ij\cdots\}$の置換pに依って、その係a_pを定めるのであった。
此の流儀に従ふとn_1个のχ_{α_i} stateにある粒子間での置換は(α_i, α_j), (α_j, α_k)……[4]等で表はされる。所で此等

1) 條件第二の(II)はすべてのstateが一个の粒子だけで占められている條件である。次の§を参照。
2) 例へば Weyl: Gruppen Theorie und Quanten mechanik 第三章
3) i, j, k……必ずしも隣り合った番号を示していない。
4) α_iはi番目の占めるstateに對應する。

の状態が皆共通の状態を取るのであるから、最早や(α_i, α_j) (α_j, α_k)……等の間には何等の区別もない。すべてunitと見なされねばならない。
同様にn_2个のχ_{α_i} stateを占める粒子間の置換も矢張りunitである。
それ故$\{i\, j\, k\cdots\}$に属する一个と$\{a\, b\, c\cdots\}$に属する一个の入れ代へに関しては

$$(\alpha_i, \alpha_a) = (\alpha_j, \alpha_a) = (\alpha_k, \alpha_a) = \cdots$$
$$(\alpha_i\, \alpha_b) = (\alpha_j\, \alpha_b) = (\alpha_k, \alpha_b) = \cdots$$

……… etc が成立しなければならない。
それは

$$(\alpha_i\, \alpha_j\, \alpha_a) = (\alpha_i\, \alpha_a)(\alpha_i\, \alpha_j) = (\alpha_i\, \alpha_a)(1) = (\alpha_i\, \alpha_a)$$

α間の置換は、すべて互換(binary cycle)の積になほる事を考慮に入れゝば、n_1ヶの組($i\,j\,k\cdots\cdots$)、n_2ヶの組($i'j'k'\cdots\cdots$)の各々内部の粒子は最早や完全に区別する必要なく、一組全部を一つのα_i、又はα_i'で代表すれば充分である。従って粒子数が恰もn_1+n_2-2ヶだけ減じた如くになる。そこで此の際は$x_{\alpha_a}, x_{\alpha_b}, \cdots\cdots x_{\alpha_i}, x_{\alpha_j}\cdots\cdots x_{\alpha_i'}\, x_{\alpha_j'}\cdots\cdots$等の並べ方を次の如くするのである。

先ず粒子を1番目, 2番目, 3番目……と並べて置いて、それに$(N-n_1-n_2+2)$ヶの$x_{\alpha_a}, x_{\alpha_b}\cdots\cdots x_{\alpha_i}\cdots\cdots x_{\alpha_i'}\cdots\cdots$を大きさの順に並べて、振り当て行くのである。所が$i\,j\,k\cdots\cdots$番目は同じ状態を取るから、$i\,j\,k\cdots\cdots$の中の一番若い番号$i$の場所へ隣り続きに全部並べてしまふ事とする。$i', j'k'\cdots\cdots$に関しても全ったく同様である。

即ち $\overset{1}{x}_{\alpha_1}\,\overset{2}{x}_{\alpha_2}\,\overset{3}{x}_{\alpha_3}\cdots\cdots\overset{i}{x}_{\alpha_i}\,\overset{j}{x}_{\alpha_i}\,\overset{k}{x}_{\alpha_i}\cdots\cdots\overset{i'}{x}_{\alpha_i'}\,\overset{j'}{x}_{\alpha_i'}\,\overset{k'}{x}_{\alpha_i'}\cdots\cdots$

これを基として、α間に置換をほどこした、$(N-n_1-n_2+2)!$ヶの項のlinear combinationがΨとなるのである。

更らにΨには Normalization factor として$\frac{1}{\sqrt{n_1!\,n_2!}}$が掛る。

さて$\{a\,b\,c\cdots\cdots\}$の粒子間では、依然条件第二が、そのまゝ成り立たねばならないが、$\{i\,j\,k\cdots\cdots\}$番粒子と$\{a, b, c, \cdots\cdots\}$番粒子との入れ替へに関しては、最早や事態は一変する。

即ちx_{α_i} state は既にn_1ヶの粒子で占められているから、更らに入り得るのは残りの$(n-n_1)$ヶだけである。

従って此の場合は、席数が恰も$(n-n_1+1)$になったかの如くになるはずである。

同様に$\{i'j'k'\cdots\cdots\}$と$\{a\,b\,c\cdots\cdots\}$との入れ替へに関しては、恰も席数は$(n-n_2+1)$の如く舞振ふ。

$\{i\,j\,k\cdots\cdots\}$と$\{i'j'k'\cdots\cdots\}$の間の入れ替へに関しては、$q+1$の席数を取らねばならない。但しqとは$(n-n_1)/n_2$より規定される最大の整数である[1]。

1) 例へば $n=16$、$n_1=8$ $n_2=3$ とすれば $n-n_1/n_2=8/3$ それ故 $q=2$.

②

さて、これだけ用意の後、一般の場合の統計函数の係数a_pを求める問題に立ち入らう。

一つの状態に一ヶだけ入っている(即ち着席数1)様な組みの数をm_2、一つの状態に2ヶ入っている(即ち着席数2)様な組みの数をm_3、着席数3の組の数をm_3、……着席数がn(席数)の――つまり満員の――組の数をm_nとする。

勿論、此の際、$m_1+2m_2+3m_3+\cdots\cdots+nm_n=N$である。

粒子の総数はNであるけれども、或る一つの状態に入っている粒子は互に区別がつかず、それ自身一ヶと見做す事が出来たから、結局$M=m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n=\sum_{i=1}^{n}m_i$ヶの間の置換の表示を考へれば充分である[1]。

勿論此の際、一つの状態に既に何ヶ入っているかに依って、その席数の"変る"事を是非とも考慮に入れなければならない。

m_1の間の置換では確かに$S^n_{m_1}$[2]で充分であり、m_2の間では$S^{n-1}_{m_2}$で、m_3の間では$S^{n-2}_{m_3}$で……m_nの間では$S^1_{m_n}$を取らねばならない。

さて直積$S^n_{m_1}\times S^{n-1}_{m_2}\times S^{n-2}_{m_3}\times\cdots\cdots\times S^1_{m_n}$($m_1!\times m_2!\times\cdots\cdots\times m_n!$ヶのelementより成る置換群の既約表示である)はM次の対称群の部分群の表示であるから、(但しかくの如く見た場合は最早や既約ではない!)かゝる表示を、その部分群とする様なM次の対称群表示を求めれば、それが吾々の要求する統計函数の係数a_pを与へるものである事は、フロクで詳論する。

然しかゝる表示は一般には既約とはならないもので(M次の対称群の表示と見た時)あるが、N次(Nは粒子の総数で、従って$N>M$)対称群の既約表示の部分群(elementの数$M!$)になっているのである。

結局粒子の総数N(const)の場合、各状態を何ヶの粒子で占めているか、(即ち着席数n_iの如何に依って)に依って、N次対称群

1) 一つの状態が一つの粒子で占められている場合、N次の対称群の表示を用ひた様に、此の場合はM次の対称群の表示を用ひると云ふ意味である。

2). S^n_mと云ふのはm次の対称群の席数nを持つ表示と云ふ事である

の既約表示の間を適当に移り変るのである。
例へば、全部の粒子が異つた状態にあつた場合の表示 S より、唯だ一つの状態が n_i 個の粒子に依つて占められる(他のstateは一ケづつ)場合の表示 S' への移行を operator $O_1^{n_i}$ で示せば、即ち $S'=O_1^{n_i}S$。
更らに他の一つのstateの着席数 n_j となつた時の表示は $O_1^{n_j}O_1^{n_i}S$ となる。
此後は $O_{n_k}^{n_i}$ を以つて、一つのstate(特定の)の着席数が n_k から n_i に変つた為めに起る表示への移転を示めすoperatorであるとする。

§4. 集合の運動方程式

全つたく同種の粒子の集合を考へているのであるから、そのHamiltonianも各粒子に就いて全つた同型である。
簡単のためHamiltonianの内には二個以上の粒子の座標を含んだinteraction termは含まないものとする。そうすれば各々の粒子に就いての運動の方程式は

$$-i\hbar\frac{dx_\alpha}{dt}=\sum_\beta H_{\alpha\beta}x_\beta \quad \text{------}(12)$$

となる。
(11)の Ψ を便宜上 $\Psi=c\varphi$ と書く。但し $c=\dfrac{1}{\sqrt{M!}\,d\sqrt{n_1!\,n_2!\cdots\cdots}}$。
すると、

$$-i\hbar\frac{d\varphi}{dt}=-i\hbar\Big[\sum_P a_P P\frac{d\overset{1}{x}_{\alpha_1}}{dt}\overset{2}{x}_{\alpha_2}\cdots\cdots\overset{N}{x}_{\alpha_N}+\sum_P a_P P\overset{1}{x}_{\alpha_1}\frac{d\overset{2}{x}_{\alpha_2}}{dt}\cdots\cdots\overset{N}{x}_{\alpha_N}+\cdots\cdots\Big]$$

(12)式を参照して

$$=\Big[H_{\alpha_1\alpha_1}\sum_P a_P P\overset{1}{x}_{\alpha_1}\overset{2}{x}_{\alpha_2}\cdots\cdots\overset{N}{x}_{\alpha_N}+\sum_{\beta_1\neq\alpha_1}H_{\alpha_1\beta_1}\Big(\sum_{P_{\beta_1}}a_{P_{\beta_1}}P_{\beta_1}\overset{1}{x}_{\beta_1}\overset{2}{x}_{\alpha_2}\cdots\cdots\overset{N}{x}_{\alpha_N}\Big)$$
$$+H_{\alpha_2\alpha_2}\sum_P a_P P\overset{1}{x}_{\alpha_1}\overset{2}{x}_{\alpha_2}\cdots\cdots\overset{N}{x}_{\alpha_N}+\sum_{\beta_2\neq\alpha_2}H_{\alpha_2\beta_2}\Big(\sum_{P_{\beta_2}}a_{P_{\beta_2}}P_{\beta_2}\overset{1}{x}_{\alpha_1}\overset{2}{x}_{\beta_2}\cdots\cdots\overset{N}{x}_{\alpha_N}\Big)$$
$$+\cdots\cdots\Big] \quad \text{-------}(13)$$

此の場合 P が P_{β_i} で置き代へられたのは、これ迄で $\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_N$ を基準にして、P を作つたけれども、今度は α_i が消て、β_i で置き代へられた為め、$\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\beta_i\cdots\cdots\alpha_N$ (β_i はその α_i のあつた場所)は最早や大きさの順に並んで居ない。従つて、これを大きさの順に並び変へ、これを新なる基準にして、新なる P を作らねばならない。これが即ち P_{β_i} である。[1]

$$P\equiv\begin{pmatrix}\alpha_1\cdots\cdots\alpha_i\cdots\cdots\alpha_N\\ \alpha_1'\cdots\cdots\alpha_i'\cdots\cdots\alpha_N'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\cdots\cdots\beta_i\cdots\cdots\alpha_N\\ \alpha_1'\cdots\cdots\beta_i'\cdots\cdots\alpha_N\end{pmatrix}$$

α_i のあつた場所に、そのまゝ β_i を入れただけ、従つて大きさの順には並んで居ない!!

$$P_{\beta_i}\equiv\begin{pmatrix}\alpha_1\cdots\cdots\alpha_{i+1}\cdots\cdots\beta_i\cdots\cdots\alpha_N\\ \alpha_1'\cdots\cdots\beta_i\cdots\cdots\alpha_r\cdots\cdots\alpha_N'\end{pmatrix}$$

元 α_i のあつた場所

大きさの順に並び変へた為めこんな所へ現はれる! r 番目とする。

それ故

$$P_{\beta_i}=\begin{pmatrix}\alpha_1\cdots\cdots\beta_i\cdots\cdots\alpha_N\\ \alpha_1'\cdots\cdots\beta_i'\cdots\cdots\alpha_N'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\cdots\cdots\alpha_{i+1}\cdots\cdots\beta_i\cdots\cdots\alpha_N\\ \alpha_1\cdots\cdots\beta_i\cdots\cdots\alpha_{r-1}\cdots\cdots\alpha_N\end{pmatrix}$$

$$=P\begin{pmatrix}\alpha_1\cdots\cdots\alpha_{i+1}\cdots\cdots\beta_i\cdots\cdots\alpha_N\\ \alpha_1\cdots\cdots\beta_i\cdots\cdots\alpha_{r-1}\cdots\cdots\alpha_N\end{pmatrix}$$

$$=Pf_{\alpha_i}^{\beta_i} \quad \text{----------}(14)$$

$$\text{但し}\quad f_{\alpha_i}^{\beta_i}=\begin{pmatrix}\alpha_1\cdots\cdots\alpha_{i+1}\cdots\cdots\beta_i\cdots\cdots\alpha_N\\ \alpha_1\cdots\cdots\beta_i\cdots\cdots\alpha_{r-1}\cdots\cdots\alpha_N\end{pmatrix} \quad \text{-------}(15)$$

以上はすべての粒子 N 個がそれぞれ異つた状態を占め、i 番目の粒子が、α_i と云ふ状態から、全つたく見なれない β_i と云ふ状態に移る場合であるが、始めから、一つの状態を若干個の粒子が占めている複雑な場合も全々同様に扱はれる。
例へば：初め全部が異つたstateにあつたものが、α_i が消て、i 番目の粒子が、l 番目の粒子と同じstateになつた時、[2]

$$f_\alpha^\beta=\begin{pmatrix}\alpha_1\cdots\cdots\alpha_{i+1}\;\alpha_{i+1}\;\alpha_{i+2}\cdots\cdots\alpha_l\;\alpha_{l+1}\cdots\cdots\alpha_N\\ \alpha_1\cdots\cdots\alpha_l,\;\alpha_l,\;\alpha_{i+1}\cdots\cdots\alpha_{l-1}\;\alpha_{l+1}\cdots\cdots\alpha_N\end{pmatrix} \quad \text{------}(15)'$$

逆に i 番目と l 番目が同じstate α_i にあつて、i 番目が α_r と云ふ新なるstateに変つた時 —— 結果として、全部が異つたstateになつている —→ (勿論此の際特に i 番目と l 番目とは区別する必要はない)。

1) 一つの状態を若干個が占めている場合は、全つたく同様である。
2)、但し、基準に取るべき並べ方は§3の規則に従ふものとする。

$$f_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots\cdots \alpha_i\ \alpha_{i+1}\ \alpha_{i+2} \cdots\cdots \alpha_r\ \alpha_{r+1} \cdots\cdots \alpha_N \\ \alpha_1 \cdots\cdots \overset{(i)}{\alpha_r}\ \overset{(l)}{\alpha_r}\ \alpha_{i+1} \cdots\cdots \alpha_{r-1}\ \alpha_{r+1} \cdots\cdots \alpha_N \end{pmatrix} \cdots\cdots (15)''$$

i番目とl番目が同じstate α_iにあって、i番目が(或はl番目が)j+1番目の占めているstate α_jに変った時は

$$f_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots\cdots \alpha_i\ \alpha_{i+1}\ \alpha_{i+2} \cdots\cdots \alpha_{j-1}\ \alpha_j\ \alpha_j \cdots\cdots \alpha_{N-1} \\ \alpha_1 \cdots\cdots \alpha_j\ \alpha_j\ \alpha_{i+1} \cdots\cdots \alpha_{j-2}\ \alpha_{j-1}\ \alpha_j \cdots\cdots \alpha_{N-1} \end{pmatrix} \cdots\cdots (15)'''$$

一般に

$$f_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} \alpha\text{の代りに}\beta\text{が入った為め大小の順に並び替へたるり} \\ \alpha\text{のあった位置へ、そのまゝ}\beta\text{を並べたるり} \end{pmatrix} \cdots\cdots (16)$$

と云ふ事が出来る。

(13)式は結局

$$-i\hbar\frac{d\varphi}{dt} = H_{\alpha_1\alpha_1}\varphi + \sum_{\beta_1 \neq \alpha_1} H_{\alpha_1\beta_1}\varphi f_{\alpha_1}^{\beta_1} + H_{\alpha_2\alpha_2}\varphi + \sum_{\beta_2 \neq \alpha_2} H_{\alpha_2\beta_2}\varphi f_{\alpha_2}^{\beta_2} + \cdots\cdots$$

$$= \sum_\alpha n_\alpha H_{\alpha\alpha}\varphi + \sum_\alpha \Big(\sum_{\beta\neq\alpha} n_\alpha H_{\alpha\beta}\varphi f_\alpha^\beta \Big)^{1)}$$

但し n_α は α と云ふstateを占めている粒子の着席数である。

そこで ψ のargumentを着席数 $n_1\ n_2 \cdots\cdots$ [2] で置き代へれば

$$-i\hbar\frac{d}{dt}\psi(n_1 n_2 \cdots\cdots) = \sum_\alpha n_\alpha H_{\alpha\alpha}\psi(n_1 n_2 \cdots\cdots) + \sum_{\beta\neq\alpha\text{ナル}\alpha,\beta\text{ニ就イテ全部ノ和}} \sqrt{n_\alpha(n_\beta+1)}\, H_{\alpha\beta}\psi(\cdots n_\alpha-1, n_\beta+1) f_\alpha^\beta$$

即ち　$-i\hbar\dfrac{d\psi}{dt} = \mathbb{H}\psi$

こゝに $\mathbb{H}$ は Matrix の Matrix で

$$\mathbb{H} = \sum_{\alpha,\beta} H_{\alpha\beta}\, \mathcal{U}_{\alpha\beta} \cdots\cdots (17)$$

1) $H_{\alpha_i\beta_i}$ は各粒子共、全く同型であるから、区別の要なし。

2) $n_1\ n_2 \cdots\cdots$ は、1と云ふstateの着席数 n_1、2と云ふstateの着席数 n_2 と云ふ意味である。

$$\mathcal{U}_{\alpha\beta}(n_1, n_2 \cdots\cdots n_\alpha \cdots\cdots n_\beta \cdots\cdots, n_1', n_2' \cdots\cdots n_\alpha' \cdots\cdots n_\beta' \cdots\cdots)$$

$$= \begin{cases} \sqrt{n_\alpha(n_\beta+1)}\, f_\alpha^\beta \\ 0 \end{cases}$$

$n_\alpha' = n_\alpha - 1$, $n_\beta' = n_\beta + 1$ を除いては、總の $n' = n$ の時、上方の式が、そうでないすべての時、下方の式(即ち zero)が成り立つ。

特に $\alpha = \beta$ の時

$$\mathcal{U}_{\alpha\alpha} = \begin{cases} n_\alpha & \text{總の } n \text{ と } n' \text{ が等しい時} \\ 0 & \text{その他の場合。} \end{cases}$$

§5 Second Quantization