(C) $\begin{cases} V(r) = aF(r) \\ a = 16\pi^3 \cdot \frac{1}{2\pi^6} G^2 \end{cases}$

a ノ upper Bound ヲ求メル方法 (paper B)　Bビ

a ノ Lower Bound ヲ $Ce^{-2r}$ ノ形ノ函数ヲ F(r) ノ代用ニ用ヒテ計算シタ結果.

cut off ヲ 0.1 $\left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)$ 程度ニスレバ ソレカラ計算サレル scattering cross section ハ $1\times10^{-28}\,cm^2$ ( for $\mu c^2$ ノ入射エネルギー ) ニナルガ,

cut off 0.1 ニシテ ~~モ~~ モ deuteron ノ triplet state ト singlet state トノ potential ノ order ガ一般ニ云ハレテ居ル様ニナラナイ.

結論トシテ

タトヘ $Ce^{-2r}$ ノ形ノ函数ヲ用ヒテ a (即チ $G^2$) ノ Lower bound ヲ求メテミテモ.

scattering cross section ガ $10^3$ 程モ小サク

程ニハ $G^2$ ガ小サクナラヌ.

cutoff 0.1 ニシタラ 大体ソノ位ニ小サクナルガ ソノ代リニ

deuteron problem デ singlet state ノ level ト triplet state ノ

level ガ ~~逆~~ 実験カラ云ハレテ居ルノト逆ニナル.

[1]

目次

最初ノpaper (A)

$(\mathrm{I})_A$ (2) カラ (3) ヲ導クニ際シテハ　新シイ unit ヲ以テ エネルギー，運動量，長サ ヲ測ツタモノ ヲ 用ヒテヰル．

ソレデ $(p^2+1)^{\frac{1}{2}} + (q^2+1)^{\frac{1}{2}}$ ハ $E_b - E_a$ ヲ コノ unit デ 測ツタ 値デアル．

（$E_b$：中間状態ノ系ノエネルギー，$E_a$：始状態ノ系ノエネルギー）

$(\mathrm{II})_A$ (3) カラ (4) ニ移ルトキ，(3) ノ中デ $\sum_b$ 即チ アラユル可能ナ中間状態ニツイテノ和ヲトル場合 之ヲ momentum space デノ $\int$ ニ直スノデアルガ コノトキ $\int \frac{d\mathfrak{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathfrak{q}}{(2\pi)^3}$ デアル筈デ $\frac{1}{(2\pi)^6}$ ガ落チテヰル．

$(\mathrm{III})_A$ (7) → (8) ニ於テ $f^2 = \frac{f_3^2}{24} = \frac{16}{3}\pi^3 G^2$ トナツテヰルガ 之ハ (II) ヲ考慮スレバ明カニ

$$f^2 = \frac{f_3^2}{24} = \frac{16}{3}\pi^3 \times \frac{1}{(2\pi)^6} G^2$$

ト直サネバナラヌ。

後ノ paper (B)

$(\mathrm{I})_B$ (8) ノ $d\sigma = \frac{2\pi}{h v} |V_{ab}|^2 \rho \, d\Omega$ ノ中デハ $\left(\frac{2\pi}{\hbar v}\right) \cdots$ デアルハズ．

$(\mathrm{II})_B$ (10) ハ 新シイ unit デ書イタモノデハナイ．（paper ニハソウ書イテアルガ）併シ (13) ヲ計算シテミルト 何等矛盾ヲ含マヌ様ニ結果ガ出テヰル．

$(\mathrm{III})_B$ $(18_a)$ ニ用ヒラレテヰル $a = 16\pi^3 G^2$ ナル関係ハ $a = 16\pi^3 \times \frac{1}{(2\pi)^6} G^2$ ト直サネバナラヌ（$\mathrm{III}_A$ ニヨリ）．
(17) (18) ニ於ケル $V(r)$ ノ単位ハ Bethe ノ所謂 $\frac{\mu^2 c^4}{Mc^2}$ ノ単位デアルカラ $(18_a)$ ノ $a$ ハ paper A ノ (8) 及ビ paper (B) ノ (14), (15) デノ $G^2$ トハ単位ガ $\frac{\mu}{M}$ 丈小デアル。

A

($\mathrm{I}_A$)

新シイ unit ハ　エネルギー　運動量　長サ

$\mu c^2$　$\mu c$　$\dfrac{\hbar}{\mu c}$.

相対論ノ公式カラ
運動量 $p$、静止質量 $\mu$ ヲモッタ粒子ノエネルギーハ

$$E^2 = c^2(p^2 + \mu^2c^2).$$

今新シイ unit デ測ッタ量ヲ夫々 $E_1$, $P_1$ トスレバ

$$(E_1\mu c^2)^2 = c^2\{(P_1\mu c)^2 + \mu^2c^2\}$$

$$\therefore\quad E_1^2\mu^2c^4 = P_1^2\mu^2c^4 + \mu^2c^4$$

$$\therefore\quad E_1^2 = P_1^2 + 1.$$

(以下デハコノ suffix ヲ取去ッテ置ク)

始状態デハ
Nuklon.

中間状態デハ
Nuklon + heavy electron pair. (運動量 $p$, $q$)

$\therefore$ (中間状態ノエネルギー) $-$ (始状態ノエネルギー) $= \sqrt{p^2+1} + \sqrt{q^2+1}$.

$E_b$　$E_a$

Ⓐ

(II)$_A$

(3) ノ中間状態ニツイテノ $\sum_b$ ヲ momentum space ノ $\int$ ニ直ス.

先ヅ

中間状態デ存在スル heavy electron ノ波動函数トシテ平面波ノ形ヲ採用シ, 新シイ長サノ unit $\left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)$ デ測ッタ unit volume ニツイテ normalize シテ置ク.

スルト

$$\psi_q = \bar{\psi}_q \, e^{-i \mathfrak{q} \mathfrak{r}}$$ ノ形ヲトル

($\bar{\psi}_q$ ハ amplitude)

(普通ナラ $e^{-i \frac{\mathfrak{q} \mathfrak{r}}{\hbar}}$ 所が $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \mu c$, $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 \frac{\hbar}{\mu c}$.

$\rightarrow e^{-i \frac{\mathfrak{q}_1 \mu c \cdot \mathfrak{r}_1 \frac{\hbar}{\mu c}}{\hbar}} = e^{-i \mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{r}_1}$

suffix ヲトレバ 左ノ様ニナル)

元々 $e^{-i \mathfrak{p} \mathfrak{r}}$ ノ形ノ波動函数ハ $\int_{V=1} e^{+i \mathfrak{p} \mathfrak{r}} \times e^{-i \mathfrak{p} \mathfrak{r}} \, d\tau = 1$

$\mathfrak{p}$ ノ大イサヲキメテモ方向ハイロイロアリ得ルガ, コノ unit volume ノ表面デ periodic デアルトイフ條件カラ $\mathfrak{p}$ ノ component ノトリエル値ニハ制限ガ与ヘラレル 即チ

$$p_x = \frac{2\pi}{1} n_x, \quad p_y = \frac{2\pi}{1} n_y, \quad p_z = \frac{2\pi}{1} n_z$$

$$p^2 = \sum_{x,y,z} p_x^2 = (2\pi)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2).$$

アルキマッタ $p$ ニ対シ, $p$ ト $p + dp$ ノ間ノ運動量ヲモチ $d\Omega$ ノ方向ノ間ニアル方向ヲ向イタ wave ヲ表ハス 定常状態ノ数ハ

$n$-space ノ volume element ニ等シイ.

$$\therefore \quad \rho_p \, dp \, d\Omega = n^2 \, dn \, d\Omega = \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 \frac{dp}{2\pi} d\Omega.$$

一方一般ニ $p^2 \, dp \, d\Omega = d\mathfrak{P}$ デアルカラ

$$\rho_p \, dp \, d\Omega = \frac{p^2 \, dp \, d\Omega}{(2\pi)^3} = \frac{d\mathfrak{P}}{(2\pi)^3}.$$

Ⓐ

(Ⅲ)$_A$

$$H = G\left\{ C_1 \Psi^*\Psi\, \psi^*\beta\psi + C_2 \Psi^*\Psi\, \psi^*\psi + C_3 \Psi^*\sigma_n \Psi\, \psi^*\beta\sigma_e\psi + C_4 \Psi^*\sigma_n \Psi\, \psi^*\sigma_e\psi \right\} \quad (1)$$

ノ形ノ相互作用ヲ neutron proton 間ニ働クト假定シ，ソレカラ potential ノ形ヲ推定スルノデアルガ 特ニ single force hypothesis ヲ採用シテ $C_3$ 丈ヲトルカラ
（$C_i$ ハ weight ニスギヌカラ single force ニスレバ 1 トシテイヽハズ）

$$H = G\int \Psi^*\sigma_n\Psi\, \psi^*\beta\sigma_e\psi \, dr$$ 丈ヲトリ　$G : [L^3, erg]$

重電子対ノ virtual ナ交換ノ process ヲ second order ノ perturbation method デ計算シ．中間状態デ重電子対ノトリエルアラユル可能ナ運動量ニツイテノ ∫ 及ビ重電子対ノ夫々ノトリエル spin raum デノ和ニツイテノ Σ ヲナシ，最後ノ結果トシテ推定サレル Nuetron-Proton 間ノ potential ハ コノ paper ニヨレバ

$$J_{12}(r) = \frac{f_3^2}{3}\left\{(\sigma_1\cdot\sigma_2)\left[\frac{K_0(Z)}{Z^3} + \frac{2K_1}{Z^2} + \frac{2K_1}{Z^4}\right] + \left[-\frac{3(\sigma_1\cdot Z)(\sigma_2\cdot Z)}{Z^2} + \sigma_1\cdot\sigma_2\right]\left[\frac{5K_0}{Z^3} + \frac{K_1}{Z^2} + \frac{10K_1}{Z^4}\right]\right\}$$

$Z = 2r$ デアルカラ 之ヲ入レテ 簡単ニスレバ

$$= \frac{f_3^2}{24}\left\{(\sigma_1\cdot\sigma_2)\underbrace{\left[\frac{K_0(2r)}{r^3} + \frac{4K_1}{r^2} + \frac{K_1}{r^4}\right]}_{F(r)} + \left[-\frac{3(\sigma_1\cdot r)(\sigma_2\cdot r)}{r^2} + \sigma_1\sigma_2\right]\underbrace{\left[\frac{5K_0}{r^3} + \frac{2K_1}{r^2} + \frac{5K_1}{r^4}\right]}_{K(r)}\right\}$$

コノ $f_3^2 \equiv 128\pi^3 G^2$ デアル．　∴ $\cancel{f_3}$

$$= \frac{\cancel{128}^{16}\,\pi^3 G^2}{\cancel{24}_{3}}$$

$$= \frac{16}{3}\pi^3 G^2 \equiv f^2$$ トナッテヰル．

所ガ (Ⅱ)$_A$ ノ理由デ 之レハ $\frac{1}{(2\pi)^6}$ ガオチテル
間違ヲ正セバ

∴ $$f^2 = \frac{16\pi^3}{3} G^2 \times \frac{1}{(2\pi)^6}$$ デアル．

即チ
$V = V_1 + V_2$,

$$V_1 = f^2\cdot(\sigma_1\cdot\sigma_2)\,F(r).$$

$$V_2 = f^2\left[-\frac{3(\sigma_1\cdot r)(\sigma_2\cdot r)}{r^2} + \sigma_1\cdot\sigma_2\right]G(r)$$

注意スベキコトハ コノ potential ハ $\mu c^2$ デ割ラレタモノデアルコト．

(B)

カクシテ paper (A) ノ potentialガ導カレル為ノ出発点

$$H = G \int \Psi^* \sigma_n \Psi \psi^* \beta \sigma_e \psi \, d\Omega$$

ヘモドルトキ コノ G トシテ $[L^3 \cdot erg]$ ノ dimension デアルカラ

~~今与ヘ~~ =

今計算シタ G ノ numerical value =
dimension ヲ与ヘルナラバ .

$$G^2 = \left( \frac{(2\pi)^6}{16\pi^3} \times 0.46 \times \frac{1}{10} \right) \left[ \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^3 \cdot mc^2 \right]^2$$

ソシテコノ H ~~ヲ用ヒテ~~ ノ中ノ G ト同ジ G ヲ用ヒテ
nutron ニヨル heavy electron ノ Scattering cross section ヲ
計算スルナラバ

$$V = G \int d\Omega \left\{ (\Psi_0^* \beta \sigma^n \Psi_0)(\chi_q^* \beta^e \sigma^e \psi_p) + \cdots \right\}$$

ヲ出発点トシテ得タ cross-section ノ式 =

$$\sigma = \frac{3\mu^2 G^2}{2\pi \hbar^4} (p^2 + 2) \qquad p \ll \frac{M}{\mu}$$

= 於ケル $G^2$ ニハ当然上ノ値ヲ採用スルヿガ許サレヨウ

Ⓑ

$(\mathrm{I})_B$

之ハ 簡単＝間違ッタ print ＝スギナイ．

$\boxed{\text{古イ unit}}$ $\boxed{\text{新シイ unit}}$

$(\mathrm{II})_B$.

$$\rho = \frac{q E_f}{8\pi^3 c^2 \hbar^3} \longrightarrow \frac{q_1 \mu c}{8\pi^3 c^2 \hbar^3} E_f \mu c^2 = \frac{q_1 E_f \mu^2 c}{8\pi^3 \hbar^3} = \frac{q_1\sqrt{q_1^2+1}\,\mu^2 c}{8\pi^3 \hbar^3}.$$

$$v = \frac{c^2 p}{E_i} \longrightarrow \frac{c^2 p_1 \mu c}{E_i \mu c^2} = \frac{c\,p_1}{\sqrt{p_1^2+1}}.$$

(12) ト 上ノ $\rho$, $v$ ノ値ヲ (8) ＝代入スレバ (13) ガ出ル．

$$= \frac{2\pi}{\hbar v} |V_{ab}|^2 \cdot \rho \, d\Omega$$

$$d\sigma = \frac{2\pi\sqrt{p^2+1}}{\hbar\, c p} \frac{3}{4} G^2 \cdot \frac{2}{(p^2+1)^{\frac12}(q^2+1)^{\frac12}} \left[ (p^2+1)^{\frac12}(q^2+1)^{\frac12} + \frac{pq}{3}\cos\Theta + \frac{M/\mu}{(\quad\cdot\cdot\quad)^2} \right] \frac{q\sqrt{q^2+1}\,\mu^2 c}{8\pi^3 \hbar^3}\, d\Omega.$$

$$= \frac{3\mu^2 G^2}{8\pi^2\hbar^4} \frac{q}{p} \left[ \qquad \cdot\cdot \qquad \right] d\Omega$$

$(\mathrm{III})_B$ paper (A) ＝ヨッテ推定サレタ potential V ヲ用ヒテ singlet deuteron ＝関スル微分方程式 (17) ヲ解クノデアルガ．

(18a) ノ

$a = 16\pi^3 G^2$ ハ 勿論 $(\mathrm{III}_A)$ ノ理由カラ

$a = \frac{16\pi^3}{(2\pi)^6} G^2$ トナスベキデアル．

尚 (18a) 以下デハ potential ガ $\mu c^2 \cdot \frac{\mu}{M}$ デ測ラレテキル．

従ッテ 最后＝ $a = 0.46$ トシテ 得ラレタ結果、ヲ用ヒテ

cross section ノ表式 (14) (15) (16) ＝代入スルトキハ．

$$V(r)\ \left(\mu c^2 \frac{\mu}{M}\right) = a\, F(r) = 0.46\, F(r). \quad \left(\mu c^2 \frac{\mu}{M}\right).$$

$\mu c^2$ デハカレバ

$$\therefore\ V'(r)\ (\mu c^2) = 0.46 \times \frac{1}{10} F(r)$$

paper (A) ノ (18) ダ之レヲ $V_1 = f^2 F(r) = \frac{1}{(2\pi)^6} \cdot 16\pi^3 G^2 F(r)$. トナッテアル

$$\therefore\ \boxed{\frac{1}{(2\pi)^6} \cdot 16\pi^3 G^2 = 0.46 \times \frac{1}{10}}$$

裏へ

(C)

$$\frac{d^2u}{dr^2} = -V(r)\cdot u \qquad (17)$$

$$V(r) = a\,F(r)$$

$$F(r) = \frac{K_0(2r)}{r^3} + \frac{4K_1(2r)}{r^2} + \frac{K_1(2r)}{r^4}.$$

[此ノ $a$ ノ upper bound] 先ヅ $F_0(r) = Ce^{-\alpha r}$ ナル $c, \alpha$ ノ二ツノ自由度ヲモツタ近似的ナ curve (但シ $F(r) \geq F_0(r)$ for all $r$)
ヲ置キカヘ，コノ curve ニ対シ

$$F(r_0) = F_0(r_0), \qquad F'(r_0) = F_0'(r_0) \qquad (r_0 \text{ cut off pt})$$

ナル條件デ $C, \alpha$ ヲ決定シタ

$a$ ノ upper bound ヲ $b$ トシ

$V \longrightarrow b\,F_0(r)$ ヲ代用シテ diff eq (17) ヲトクト

適当ナ boundary condition ニヨツテ

$$\left.\begin{aligned} u &= J_0(se^{-\frac{\alpha r}{2}}) - 0.1\left(\frac{\pi}{\alpha}N_0(se^{-\frac{\alpha r}{2}}) - \frac{2}{\alpha}\log\frac{\gamma s}{2}\right) & \quad r > r_0 \\ u &= K r, & \quad r < r_0 \end{aligned}\right\}(20)$$

$$\text{但シ } s = \frac{2\,b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}}{\alpha}$$

$$\gamma = 0.577\cdots = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m\right)$$

| | | |
|---|---|---|
| $r_0 = 0.2$ | $\alpha =$ | $C =$ |
| $r_0 = 0.4$ | $\alpha =$ | $C =$ |
| $r_0 = 0.6$ | $\alpha =$ | $C =$ |
| $r_0 = 0.8$ | $\alpha =$ | $C =$ |

ソシテ $u(r_0)$, $\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=r_0}$ ガ等シクナル様ニ $K$, $b$ ヲキメル，(20) カラ $K$ ヲ消去スレバ $b$ ハ次ノ eq ノ根トシテ与ヘラレル

$$f(b) \equiv se^{-\frac{r_0\alpha}{2}} r_0\left\{J_1(se^{-\frac{r_0\alpha}{2}}) - \frac{0.1\pi}{2}Y_1\right\} - J_0 + 0.1\left\{\frac{\pi}{2}Y_0 - \log\frac{0.577\cdots\times s}{2}\right\} = 0.$$

コノ root ノ最モ小サイ値トシテ $b$ ヲキメル，種々ノ $r_0$ ニ対スル $\alpha, C$ ヲ入レルト ソレニヨツテ $b(r_0)$ ガキマル．

a ノ up.B.

| $r_0$ | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 |
|---|---|---|---|---|
| b | 0.041 | 0.27 | 0.56 | 0.9 |

(後ノ圖) Fig 2.

又一方 deuteron ノ singlet, triplet ノ order カラ

$\underset{(\mathrm{trip})}{W} - \underset{(\mathrm{sing})}{V} < 0$ デナケレバナラナイカラ.

極限トシテ $W = V$ ノ場合ヲ考ヘルト.

$$\frac{-2a}{3} F(r) + \frac{3}{r^2} + a\,G(r) - \left[\left(a\,G(r) + \frac{1}{r^2}\right)^2 + \frac{8}{r^4}\right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

即チ $r(a)$ ナル $r$ ガアツテソレ以上ノ所デハ $W - V < 0$ ガ成立シナイ

| $a$ | 1.5 | 0.75 | 0.35 | 0.12 | 0.04 |
|---|---|---|---|---|---|
| $r(a)$ | 0.63 | 0.56 | 0.50 | 0.39 | 0.29 |

$a$ = depend シタ $r$ ノ critical value.

(後ノ圖). fig 2.

以上ハ paper B ノ結果

次ニ $Ce^{-\alpha r}$ ノ形ノ近似 curve ヲ用ヒテ diff eq. (17) ヲトイテ $a$ ノ lower bound ヲ求メル. 此場合ニハ $\alpha = 2$ ヲ最初カラキメテオキ, C 丈ヲ adjust シテ cut off pt. ヲ $Ce^{-\alpha r}$ ガ通リシカモ $F(r)$ ヨリ常ニ $Ce^{\alpha r}$ ガ大ニナル可ガ出来ル。[Fig 1] ソシテ upper bound ヲ求メタト同じ様ニシテ (17) ヲ $C'e^{-2r}$ ナル pot. ノ形ニヨツテ解キ、種々ノ $a$ ノ値ヲ ($r_0$ = depend) 求メル.

| $r_0$ | 0.1 | 0.2 | 0.4 |
|---|---|---|---|
| $a$ ノ L.B | 0.0002 | 0.0028 | 0.037 |

| Cut off | Lower bound of a. | cross section (for $1\mu c^2$) | Upper B. of a. | cross section (for $1\mu c^2$) |
|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.0002 | $1 \times 10^{-28}\ \mathrm{cm}^2$ | | |
| 0.2 | 0.0028 | $1.4 \times 10^{-27}\ \mathrm{cm}^2$ | 0.0410 | $2 \times 10^{-26}\ \mathrm{cm}^2$ |
| 0.4 | 0.0370 | $1.9 \times 10^{-26}\ \mathrm{cm}^2$ | 0.2700 | |
| | | | 0.4600 | $2.4 \times 10^{-25}\ \mathrm{cm}^2$ |
| 0.6 | | | 0.5600 | |

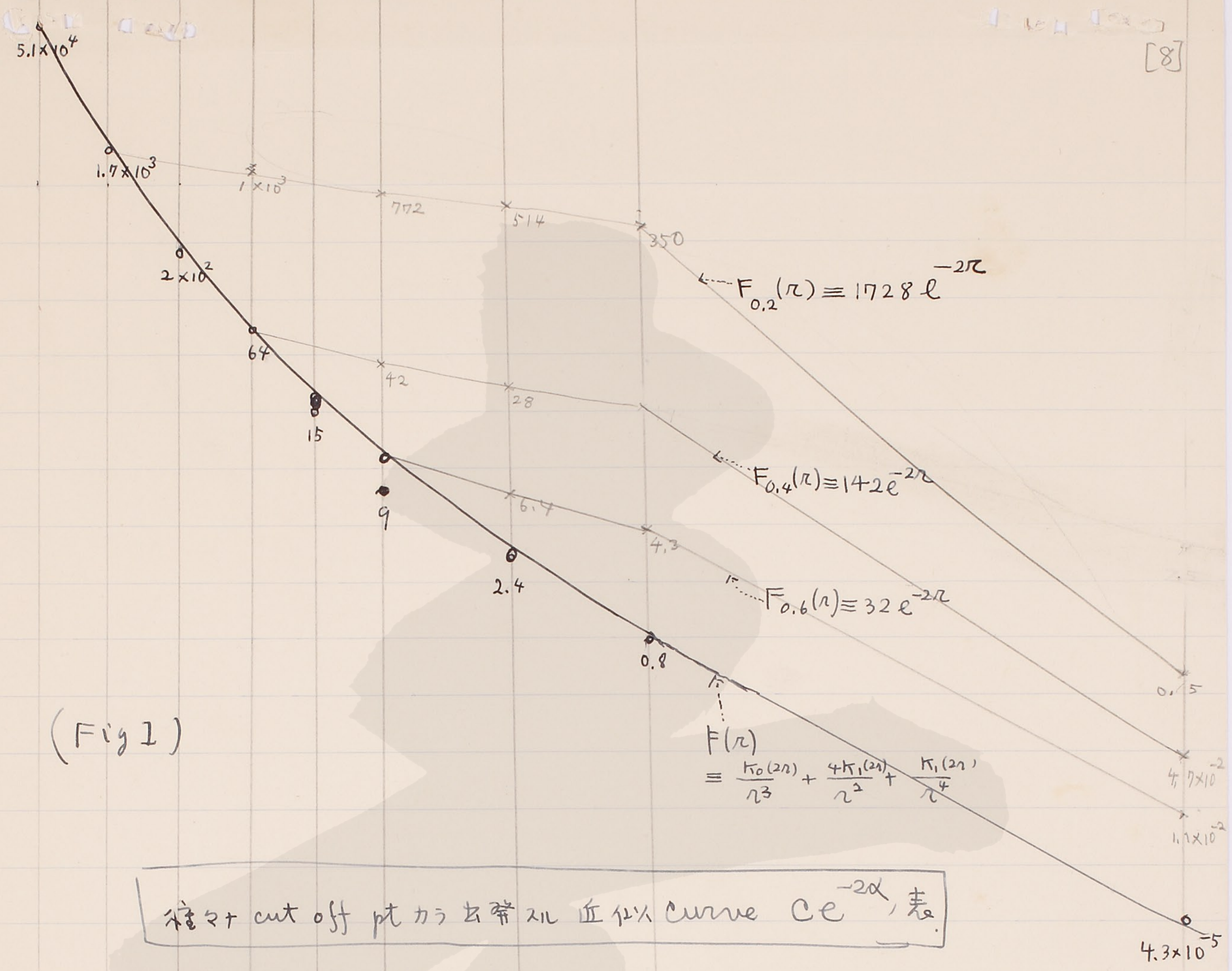
之等ノ三ツノ函数ヲ [Fig 2] ニ plot セリ.

Up of $a(r_0)$ — upper bound of a —— $r_0$
L. of $a(r_0)$ — Lower bound of a —— $r_0$
Critical val. of $r(a)$ — a —— critical value of $r$

$$a = \frac{16\pi^3}{(2\pi)^6} G^2 .$$

$$\sigma = \frac{3}{2\pi} \frac{G^2}{\hbar^4 c^4} (E^2 + \mu^2 c^4)$$

今 $E = \mu c^2$ トオイタ.



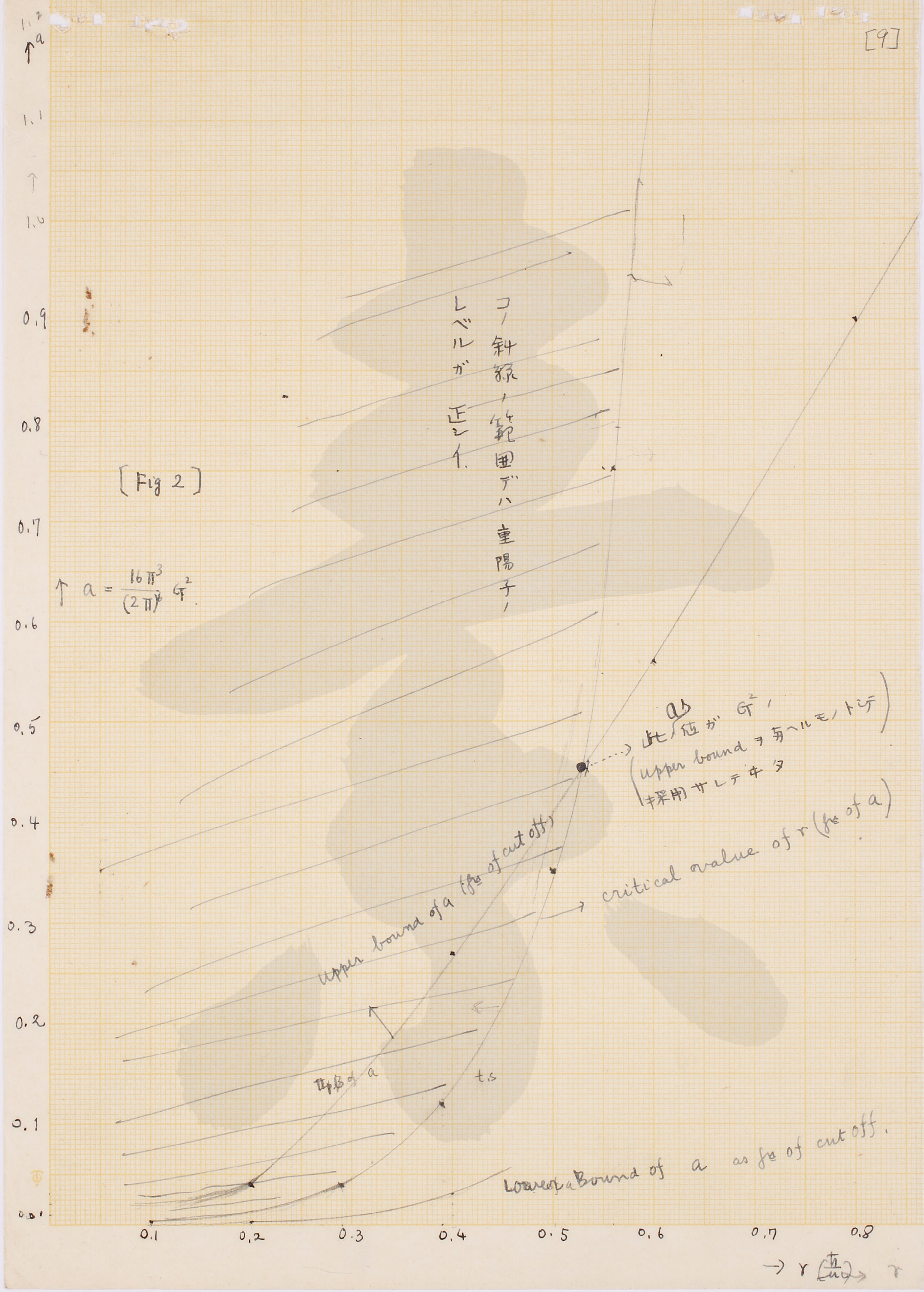

(Fig 1)

$\boxed{\text{種々ナ cut off pt カラ出発スル近似 curve } Ce^{-2\alpha}\text{ ノ表.}}$

( $F(r_0) = F_0(r_0)$ カラ C ヲ求メタ )
切線ハ考慮シナイ.

a ノ lower bound ヲ求メル為ニ F(r) ノ代リニ
近似的ニ $F_{0.2}(r)$, $F_{0.4}(r)$ etc ヲ用ヒル.

上ニ図示セル如ク $F_{0.2}(r)$, $F_{0.4}(r)$ … ハ F(r) ヨリモ r ノ總テノ値
ニ対シテ 大デアルヿガ分ツタ. カラ差支ヘナイワケデアル
(採用シテ)


↑ a
$\uparrow a = \frac{16\pi^3}{(2\pi)^6} G^2$
コノ斜線ノ範囲デハ重陽子ノレベルが正シイ.
a
此ノ値が $G^2$ ノ upper bound ヲ与ヘルモノトシテ採用サレテ居タ
upper bound of a (fn of cut off)
critical value of r (fn of a)
Lower Bound of a as fn of cut off.
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
→ r

[Fig 2]